Úloha I.5 ... otužování v létě

10 bodů; průměr 6,65; řešilo 110 studentů

V zimě Matěj našel balík polystyrenu o objemu $0{,}5\,\mathrm{m^3}$ *a rozhodl se, že ho využije. Vyrobí si z něj krabici tvaru krychle a ze zamrzlého rybníku si pak nařeže led, který v polystyrenu uschová ve sklepě, kde je konstantní teplota* $9\,^\circ\mathrm{C}$*. Jak velkou by měl Matěj vyrobit krychli, aby mu v ní po půl roce zbylo co největší množství ledu? A kolik kilogramů ledu mu zbude? Uvažujte, že led z rybníka má teplotu přesně* $0\,^\circ\mathrm{C}$*. Objem polystyrenu spotřebovaný na hrany krychle zanedbejte.*

Nápověda: Součinitel tepelné vodivosti je nejsnadněji dohledatelný parametr polystyrenu.

Matěj si půjčil balík polystyrenu ze stavby.

Čím větší krabici Matěj vyrobí, tím větší množství ledu bude schopna pojmout, ale tím tenčí stěny a horší izolační schopnosti bude mít.

Předpokládáme, že Matěj postavil krychli vodotěsně, takže z ní voda nevytéká. Proces tání ledu je relativně pomalý, proto budeme uvažovat, že během tání je uvnitř krychle led a voda o konstantní teplotě $0\,^\circ\mathrm{C}$. To si můžeme dovolit, protože voda má mnohem větší tepelnou vodivost než polystyren. Pracujeme tedy s rozdílem teplot $\Delta T = 9\,\mathrm{K}$. Zároveň neuvažujeme vliv vzduchové bubliny, která uvnitř vzniká, protože led při tání zmenšuje objem.

Matěj má k dispozici polystyren o objemu $V = 0{,}5\,\mathrm{m^3}$. Vyrobí-li krychli o hraně a, bude mít tloušťku stěn $d = V/S = V/6a^2$, kde $S = 6a^2$ je povrch krychle a zanedbali jsme materiál spotřebovaný na hrany krychle.

Podle definičního vztahu pro součinitel tepelné vodivosti λ můžeme spočítat energii, která za čas $t = 0{,}5\,\mathrm{let} = 1{,}6 \cdot 10^7\,\mathrm{s}$ prosákne skrze polystyren dovnitř krabice

$$\Delta E = \lambda \Delta T \frac{S}{d} t = \lambda \Delta T \frac{36a^4}{V} t\,,$$

kde $\lambda = 0{,}035\,\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ pro polystyren. Vydělíme-li tuto energii měrným skupenským teplem tání ledu $l_\mathrm{t} = 334\,000\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}}$, dostaneme hmotnost roztátého ledu. Hmotnost zbylého ledu tedy je

$$m = a^3\rho - \frac{\Delta E}{l_\mathrm{t}} = a^3\rho - \lambda \Delta T \frac{36a^4}{V l_\mathrm{t}} t\,,$$

kde $\rho = 920\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota ledu.

Maximální možná hmotnost zbylého ledu je taková, pro kterou nabývá derivace tohoto výrazu nulovou hodnotu, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}a} &= 0\,,\\ 3a^2\rho - 4\lambda\Delta T \frac{36a^3}{V l_\mathrm{t}} t &= 0\,,\\ \lambda \Delta T \frac{48a}{V l_\mathrm{t}} t &= \rho\,,\\ a &= \frac{\rho V l_\mathrm{t}}{48 \Delta T \lambda t} \doteq 0{,}64\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Pro krabici o této délce strany mají stěny tloušťku 0,2 m, čili zanedbání materiálu spotřebovaného na hrany krychle není příliš opodstatněné, ale pro hrubý odhad nám to postačí. Matějovi tak po půl roce zbyde celých $m = \left(\rho V l_\mathrm{t}/(48 \Delta T \lambda t)\right)^3 \cdot \rho/4 = 59\,\mathrm{kg}$ ledu, což je pořád dost na pravidelné letní otužovačky.

Ve skutečnosti by však ledu zbylo ještě více, protože v celém řešení jsme neuvažovali tepelnou vodivost vody (respektive vzduchu, pokud by voda odtékala pryč), která by vnitřní kus ledu ještě pomáhala izolovat.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.