Úloha V.3 ... čekáme na výtah

6 bodů; průměr 4,43; řešilo 69 studentů

Karel jezdí výtahem v budově, která má přízemí a nad ním dalších 12 pater, přičemž výška jednoho patra je $h = 3{,}0\,\mathrm{m}$. Uvažujte, že výtah během své jízdy polovinu doby zrychluje a druhou polovinu doby zpomaluje konstantním zrychlením $a = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. S 50% pravděpodobností výtah stojí v přízemí a zbytek pravděpodobnosti je rovnoměrně rozdělený mezi ostatní patra. Jaká je očekávaná doba čekání na výtah v jednotlivých patrech budovy? Zanedbejte čas otevírání dveří.

Bonus Mějme 2 výtahy opět v dvanáctipatrové budově. Jeden výtah bude odvolávaný do přízemí. Do jakého patra bychom měli posílat druhý, abychom minimalizovali průměrnou dobu čekání? Předpokládejte analogicky, že polovina jízd bude začínat v přízemí a druhá polovina s rovnoměrnou pravděpodobností v libovolném z dalších pater. *Karel čekává často na výtah.*

Začněme se základní teorií, která je velice jednoduchá, protože jde pouze zrychlený pohyb. V indexech i a j budeme značit, že výtah pojede z i-tého do j-tého patra. Polovinu rozdílu výšek mezi patry $h_{i,j}$ ujede výtah za polovinu celkové doby $t_{i,j}$, což můžeme zapsat jako

$$\frac{h_{i,j}}{2} = \frac{1}{2}a\left(\frac{t_{i,j}}{2}\right)^2 ,$$

z této rovnice vyjádříme, jak dlouho výtah jede

$$4h_{i,j} = at_{i,j}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{i,j} = 2\sqrt{\frac{h_{i,j}}{a}} .$$

Rozdíl výšek je násobek absolutního rozdílu pater, tedy $h_{i,j} = h\,|j-i|$. Rovnici můžeme upravit na tvar

$$t_{i,j} = 2\sqrt{\frac{h}{a}}\sqrt{|j-i|} .$$

Pokud vynásobíme tuto dobu pravděpodobností p_i, že výtah bude v i-tém patře, když na něj čekáme v j-tém, a všechny pravděpodobnosti sečteme, dostaneme celkovou očekávanou dobu čekání na výtah v j-tém patře

$$T_j = \sum_{i=0}^{12} p_i \sqrt{\frac{h}{a}}\sqrt{|j-i|} .$$

V zadání jsou uvedeny pravděpodobnosti, které vychází z toho, že lidé jezdí rovnoměrně do všech pater a že se do budovy a z ní dostanou pouze v přízemí.[1] Pravděpodobnosti jsou $p_0 = 1/2$ a $p_i = 1/24$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, 12\}$. Úpravou pak dostaneme

$$T_j = \sqrt{\frac{h}{a}j} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{h}{a}}\sum_{i=1}^{12}\sqrt{|j-i|} .$$

Toto je vlastně požadovaný výsledek s tím, že jej musíme vyčíslit. Můžeme buď samotnou sumu zadat, aby nám ji spočítal program, např. Wolfram Mathematica[2], nebo můžeme propočítat

[1] Vzhledem k tomu, že lidé příliš často nevylézají ven z oken, nelezou domů po okapu apod., pak jde o rozumný předpoklad alespoň co se týče přízemí. V reálném provozu nebude splněn předpoklad o rovnoměrnosti ježdění do jednotlivých pater, protože někteří lidé vychází ven častěji. Ale i tak jde o nejlepší odhad, který můžeme mít bez znalosti místních poměrů.

[2] Můžeme také využít zdarma dostupný WolframAlpha `https://www.wolframalpha.com/`.

jednotlivé části např. v Excelu či Google Tabulkách. My jsme se v rámci vzorového řešení rozhodli využít Google Tabulky a postup zveřejňujeme pod odkazem v poznámce.[3] Na prvním listu jsou vypočítané výsledky základní úlohy. V oblasti C5:O17 jsou doby jízdy pro výtah umístěný v patře uvedeném v řádku 3 a čekající bude v patře uvedeném ve sloupci A. V oblasti C20:O32 jsou pak již časy vážené pravděpodobností, že výtah bude v daném patře.
Pro jednotlivá patra nám vyšly výsledky $T_0 = 4{,}2\,\mathrm{s}$, $T_1 = 5{,}5\,\mathrm{s}$, $T_2 = 5{,}8\,\mathrm{s}$, $T_3 = 6{,}1\,\mathrm{s}$, $T_4 = 6{,}4\,\mathrm{s}$, $T_5 = 6{,}7\,\mathrm{s}$, $T_6 = 7{,}0\,\mathrm{s}$, $T_7 = 7{,}4\,\mathrm{s}$, $T_8 = 7{,}7\,\mathrm{s}$, $T_9 = 8{,}1\,\mathrm{s}$, $T_{10} = 8{,}6\,\mathrm{s}$, $T_{11} = 9{,}1\,\mathrm{s}$, $T_{12} = 9{,}7\,\mathrm{s}$. Pokud bychom chtěli odvolávat výtah do nějakého patra tak, aby se minimalizoval střední čas čekání, pak za předpokladu, že výtah vždy stihne dojet do tohoto patra, bude nejvýhodnější, aby jezdil do přízemí. Což je relativně očekávatelný výsledek, když polovina jízd začíná v přízemí.

Pokud bychom chtěli úlohu mít více realistickou, pak bychom museli uvážit to, že výtah zrychluje jenom část doby než dosáhne nějaké maximální rychlosti. Dalším problémem by se mohla zdát doba otevírání a zavírání dveří, ale pokud jsou dveře vždy zavřené, pak se náš výsledek změní pouze o konstantu pro jakékoliv patro a nezmění tak pořadí výhodnosti. Čas jízdy nám také ovlivní doba nastupování a vystupování. V reálném provozu, zejména v přízemí, čím déle čekáte, tím více lidí výtah nakonec ve střední hodnotě sveze, což vás opět zdrží při nastupování a i daleko více, pokud výtah po cestě vícekrát zastaví. Minimalizace času jde víceméně také proti šetření za energie.

Bonus

Podle zadání si zafixujeme jeden výtah v přízemí a pak pro všechny kombinace čekajícího a umístění druhého výtahu vytvoříme tabulku, kde opět váženě sečteme doby čekání. Postup je uvedený na druhém listu Google Tabulek. Vzorce jsou sestavené tak, že opět bereme doby jízdy výtahu do daného patra, které získáme ze vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb. Vybereme ale vždy ten z výtahů, který přijede dříve. Přitom vyzkoušíme všechny pozice druhého výtahu (od 1. do 12. patra) a vypočteme vážený průměr pro všechna patra. Mezivýsledky zde nerozepisujeme, protože by řešení bylo pak zbytečně zdlouhavé.

Výsledkem pro naše vstupní parametry je, že si můžeme vybrat, jestli druhý výtah budeme umisťovat do 8., nebo 9. patra, protože střední čas čekání je identický, a to 2,4 s. Oproti situaci s jedním výtahem ve střední hodnotě tak ušetří lidé 1,8 s, tedy 44 % času čekání.

Pokud by vás zajímalo, jak by to vyšlo, kdybychom se rozhodli přidat třetí výtah, pak řešení již není tak jednoduché, ale dá se očekávat, že druhý výtah by měl také změnit své umístění. Ponecháme pouze ten v přízemí a budeme zkoumat celkové očekávané doby čekání pro různé kombinace 2. a 3. výtahu. Když se zamyslíme, tak zjistíme, že hodně kombinací je duplicitních nebo nepřipadají v úvahu. Nicméně jsme vypsali většinu všech možných a z nich se nám podařilo určit, že optimální rozložení je přízemí, 5. patro a 10. patro. Při této kombinaci je očekávaná doba čekání pouze těsně nad 1,7 s. Takže bychom ušetřili ve střední hodnotě dalších 0,6 s na jednu jízdu.

[3] `https://docs.google.com/spreadsheets/d/10pQ3D7nYGmeDKZK2DYpOCqA2AjqMDX86f9s39_lGfn0`

Dále by se dalo úlohu dále variovat. Můžete se zamyslet, jak nepříjemně by se zkomplikovala, pokud byste měli možnost umístit 3 výtahy, ale pokaždé byste potřebovali 2, protože se vždy přesouváte jako velká skupina, která se ale nevejde do jednoho výtahu. V reálném světě ale nechodí všechny skupiny stejně velké, výtah vždy nemá čas dojet do daného patra a náš předpoklad s konstantním zrychlením byl také velice idealistický. Ještě víc se nám zkomplikuje situace u budov, které nemají jedno význačné patro, ale mají například i podzemní parkoviště.

Drobnou poznámkou může ještě být, že jsme uvažovali, že výtahy umisťujeme pouze do celočíselných pater, ale nechávat výtah v patře devět a tři čtvrtě by bylo dost nepraktické z technického hlediska. Nejspíše i tak bychom došli k závěru, že se i časově hodí mít výtah pouze v celočíselných patrech, protože alespoň ti, kteří vyjíždějí z daného patra nemusí čekat. Nevylučujeme, že pro nějaké kombinace počtu výtahů, počtu pater, výšek pater a zrychlení by ale mohlo být časově výhodné zvolit pro některý výtah neceločíselné patro.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.