Úloha I.2 ... vážíme neznámý předmět

3 body; (chybí statistiky)

Mějme ideální váhu, kterou zkalibrujeme státním etalonem o hmotnosti $m_\mathrm{e} = 1{,}000\,000\,165\,\mathrm{kg}$ *a hustotě* $\rho_\mathrm{e} = 21\,535{,}40\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. *Kalibrací myslíme to, že po položení etalonu na váhu přiřadíme naměřené hodnotě právě hmotnost* m_e. *Vážení neznámého předmětu pak provedeme za stejných podmínek, při kterých má objem* $V_0 = 3{,}242\,27\,\mathrm{dl}$. *Jestliže jsme navážili váhu* $G = 1{,}420\,12\,\mathrm{N}$, *jakou hmotnost jsme naměřili? Jaká je skutečná hmotnost předmětu? Experiment provádíme v místě s normálním tíhovým zrychlením* $g = 9{,}806\,65\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ *a hustotou vzduchu* $\rho_\mathrm{v} = 1{,}292\,23\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. *Uvažujte, že kalibrace je lineární a že nezatížená váha ukazuje nulu.*

Karel chtěl použít etalon.

Ještě než se pustíme do samotného řešení, zaveďme následující značení veličin. Vždy bude existovat nějaká přesná síla, která působí na váhu, tu označíme F. Jako G potom označíme sílu, kterou v procesu vážení naměříme, jako M hmotnost, kterou naměříme, a nakonec m bude značit skutečnou hmotnost váženého předmětu. Při kalibraci váhy pak v podstatě stanovujeme závislost veličin G a M na síle F. Dále si uvědomme, že pro nezatíženou váhu i pro vážený etalon musí platit $M(F) = m(F)$. Z toho budeme vycházet při kalibraci.

Při řešení příkladu bude nyní naším úkolem najít vztahy mezi zmíněnými veličinami. Začneme konstatováním, že mezi skutečnou silou F a hmotností m vždy platí z Archimédova zákona následující vztah

$$\begin{aligned} F &= F_\mathrm{G} - F_\mathrm{vz}\,, \\ F &= (m - V\rho_\mathrm{v})g\,, \end{aligned} \tag{1}$$

kde V je objem váženého předmětu a ρ_v hustota vzduchu. Zbývá nám tedy najít vztahy mezi veličinami F a G a následně mezi G a M. Protože ale známe ze zadání pouze vztah mezi M_e a F_e (hodnotu G_e neznáme), musíme něco předpokládat.

Uvědomme si, co v našem případě znamená kalibrace. Měřicí přístroj velmi často funguje tak, že při měření nějaké veličiny přímo změří veličinu jinou a v závislosti na nějakých referenčních hodnotách určí vztah mezi těmito veličinami. Právě stanovení tohoto vztahu se nazývá kalibrace.

Máme dvě možnosti, jak příklad chápat. První možností je, že váha změří sílu přesně. Bude tedy v našem zavedeném značení platit $F = G$ a při kalibraci budeme hledat, jak na této síle závisí hmotnost. Váha v tomto případě uvnitř funguje jako dokonalý siloměr.

Druhou možností je, že váhu přímo ztotožníme se siloměrem, který teprve kalibrujeme. Budeme tedy při kalibraci hledat, jak závisí naměřená síla G na skutečné síle F a pro naměřenou hmotnost položíme $G = Mg$.

Tyto dvě možnosti si jsou na první pohled velmi blízké, ale ve skutečnosti se při procesu kalibrace jedná o velmi zásadní rozdíl a v obou případech budeme mít úplně jiné výsledky.

Obě možnosti při opravování považujeme za správné. Myslíme si ovšem, že první řešení má trochu blíže formulaci ze zadání, protože při druhém řešení je kalibrovaný přístroj přísně vzato siloměrem a při prvním řešení je kalibrovaný přístroj váhou.

Měřenou veličinou je hmotnost a přímo naměřenou veličinou je síla (kalibrace vah)

Máme přesně naměřenou sílu, která působí na váhu a podle informace ze zadání hledáme funkci $m(F) = kF + c$. Do této síly se promítá nejen hmotnost měřeného tělesa (zmenšená o určitý faktor, který je způsobený vztlakovou silou), ale navíc i sloupec vzduchu nad ní. Protože v nezatíženém stavu máme ovšem nulovou sílu, pak hledaný koeficient c musí být nutně nulový a silové působení sloupce vzduchu na váhu již nemusíme uvažovat.

V tomto případě je velmi jednoduché dopočítat skutečnou hmotnost předmětu – můžeme totiž rovnou vyjít z rovnice (1) a dostaneme

$$m = \frac{G}{g} + V_0\rho_\mathrm{v} \doteq 145{,}231\,\mathrm{g}\,.$$

Jaký bude rozdíl mezi touto skutečnou hmotností předmětu a hmotností, kterou navážíme pomocí nakalibrovaných vah? Bude dán tím, že váhy neumějí pracovat s objemem tělesa.

Označme G_e naměřenou váhu etalonu. Hledáme koeficient k z kalibrační rovnice. Potom budeme již schopni najít naměřenou hmotnost neznámého předmětu pomocí vztahu $M = \frac{G}{k}$.

Rovnici pro G_e sestavíme analogicky jako v předchozím případě a vyjde nám

$$G_e = V_\mathrm{e}\left(\rho_e - \rho_v\right) g \quad \Rightarrow \quad G_e = m_\mathrm{e} g \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_e}\right)\,.$$

Vidíme tedy, že $k = g\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_e}\right)$. Kalibrované váhy tedy budou ukazovat

$$M = \frac{G}{g\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_e}\right)} \doteq 144{,}821\,\mathrm{g}\,.$$

Měřenou veličinou je síla, ze které dopočítáme hmotnost (kalibrace siloměru)

V tomto případě můžeme přímočaře ze zadání určit, jakou hmotnost jsme naměřili. Váhu totiž považujeme za (nepřesně) zkalibrovaný siloměr, proto máme pro naměřenou tíhu G naměřenou hmotnost

$$M = \frac{G}{g} \doteq 144{,}812\,\mathrm{g}\,.$$

Nyní budeme chtít najít funkci $G(F) = k'F + c'$. Užitím stejných argumentů jako výše můžeme prohlásit, že $c' = 0$, a hledat dále pouze k'.

Při kalibraci etalonem položíme $G_\mathrm{e} = m_\mathrm{e} g$, což se ale liší od síly F_e, kterou znovu určíme z rovnice (1). Koeficient k' tedy určíme jako

$$k' = \frac{G_\mathrm{e}}{F_\mathrm{e}} = \frac{m_\mathrm{e} g}{(m_\mathrm{e} - V_\mathrm{e}\rho_\mathrm{v})g} = \frac{1}{1 - \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{e}}}\,.$$

Ještě jednou tedy vyjdeme z (1) a dostaneme

$$m = \frac{F}{g} + V_0\rho_\mathrm{v} = \frac{G}{gk'} + V_0\rho_\mathrm{v} = \frac{G}{g}\left(1 - \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{e}}\right) + V_0\rho_\mathrm{v} \doteq 145{,}222\,\mathrm{g}\,.$$

Závěr a několik poznámek

Všimněme si, že obě řešení pro stejnou sílu F dají úplně stejnou hmotnost M – výsledek úlohy je jiný jen proto, že se v obou přístupech liší naměřená síla G.

Uvědomme si také, že váhy mohou měřit přesně pouze pro tělesa, jejichž hustota je rovna hustotě etalonu. Je také nutné podotknout, že veškeré hodnoty byly uvedeny se zbytečně velkou přesností. Jednak je to kvůli efektu vztlakové síly, jednak bychom u takto přesného měření již pocítili dokonce i vliv proudů vzduchu v laboratoři a spoustu dalších efektů.

Lubor Čech
lubor.cech@fykos.cz

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Adam Mendl
adam.mendl@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.