Úvodem

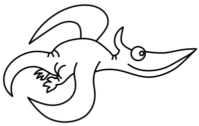
Milé řešitelky, milí řešitelé,
přichází k vám poslední brožurka tohoto ročníku. Pomalu se začneme těšit na léto s úlohou vodácká záhada, připomeneme si důležitost vyhození starých svačin s Jardovým shnilým jablkem, budeme zahřívat gadoliniovou kouli nebo měřit co nejmenší vlny. V seriálu se podíváme na excitované stavy molekul a vše aplikujeme na již známou molekulu betakarotenu.

FYKOSí výprava do Asie je již u konce a pracujeme pro vás na další akci, kterou jsou letní stáže na MFF pro nejlepší řešitele experimentálních úloh. Brzy oznámíme podrobnosti, nyní si však ještě můžete zlepšit své skóre řešením poslední úlohy.

Nejbližší již tradiční akcí je jarní soustředění, které se bude letos konat ve Frýdštejně. Těšíme se na setkání s vámi. Pokud jste se na soustředění nedostali nebo si chcete pojistit účast na tom podzimním, máte stále šanci zlepšit si své umístění.

Děkujeme za další úspěšný ročník FYKOSu s rekordním počtem účastníků a těšíme se na vás v dalším ročníku, případně na maturanty v našem organizačním týmu.

Organizátoři



Zadání VI. série

Termín uploadu: 02. 05. 2023 23.59
Termín odeslání: 01. 05. 2023

Úloha VI.1 ... vodácká záhada — 3 body

Za slunečného letního počasí pozorujeme na řece během dne zajímavý průběh chování větru. Ráno při východu slunce je zima a někdy i ranní mlha. Ta se následně rychle rozplyne a teplota vzduchu roste. Poté se rozfouká slabý vítr proti proudu řeky. Večer se situace uklidní a po sklonění slunce k obzoru se směr větru obrátí po proudu řeky. Čím je tento úkaz způsobený? Vysvětli proces, který v těchto dvou případech probíhá.

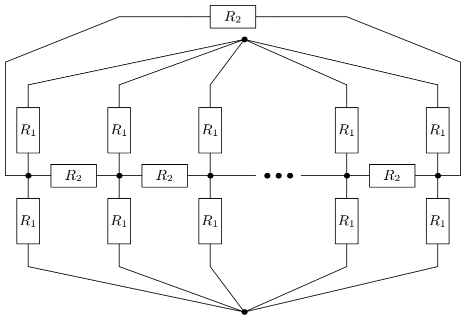
Úloha VI.2 ... shnilé jablko — 3 body

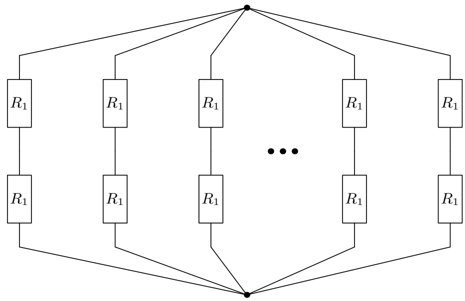
Jarda našel po FYKOSím soustředění ve svém batohu jablko, které už nebylo v dobrém stavu. Hodil ho do nízkého koše na kuchyňský odpad vzdáleného $1{,}0\,\mathrm{m}$ a samozřejmě se trefil. Jablko házel vodorovně z výšky $0{,}5\,\mathrm{m}$, dopadlo na rozmezí stěny a dna koše, kde se rozpláclo. Koš o hmotnosti $910\,\mathrm{g}$ se po dopadu jablka posunul o vzdálenost $5\,\mathrm{cm}$. Jaký je koeficient tření mezi podlahou a košem? Jablko má hmotnost $230\,\mathrm{g}$.

Úloha VI.3 ... odporné bipyramidky — 5 bodů

V drátěném modelu pravidelného N-stěnného dvojjehlanu jsou vodivá spojení v rovině symetrie tvořena odpory R_2, zatímco spojení jdoucí z jednoho z vrcholů do bodu v pravidelném N-úhelníku mají odpor R_1. Určete odpor mezi

1. hlavními vrcholy (nad a pod rovinou základny),
2. sousedními vrcholy v rovině základny,
3. protějšími vrcholy v rovině základny (ty nejvzdálenější) pro N sudé.





Úloha VI.4 ... světlo rychlejší než světlo — 7 bodů

Ve vzdálenosti L od rozlehlého stínítka se nachází laser. Ten až do času $t = 0\,\mathrm{s}$ svítí na stínítko tak, že vzdálenost skvrny od laseru je $R > L$. Náhle začneme laserem otáčet rovnoměrnou úhlovou rychlostí ω, přičemž vzdálenost skvrny na stínítku od laseru se zmenšuje na L a následně zpět na R. Vyjádřete rychlost této skvrny vzhľadom na stínítko. Může překročit rychlost světla ve vakuu c nebo být dokonce nekonečná? Jak (kvalitativně) tato rychlost závisí na poloze skvrny na stínítku? Celá aparatura se nachází ve vakuu.

Úloha VI.5 ... gadoliniová koule — 9 bodů

Jaké nejmenší množství gadolinia 148 je nutné dát k sobě dohromady, aby se svým jaderným rozpadem zahřívalo tak, že by došlo k lokálnímu tavení? Uvažujte, že probíhají pouze rozpady α a že materiál je ve vzduchu pokojové teploty.

Úloha VI.P ... zem na plné obrátky — 10 bodů

Odhadněte horní limit práce za čas, kterou je možné na Zemi dlouhodobě vykonávat. Planeta musí zůstat obyvatelná a pokud možno se stejným klimatem i pro další generace.

Úloha VI.E ... minivlny — 13 bodů

Sestavte aparaturu, která bude schopná měřit co nejmenší vlnky na povrchu kapaliny. Nádobu si můžete sami určit – může to být hrnek, láhev či něco jiného. Aparaturu celou řádně popište a vyfoťte. Určete, jakou minimální amplitudu jste schopni naměřit.

Úloha VI.S ... excitující kvanta — 10 bodů

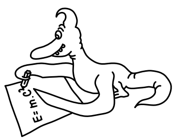
Nejnižší excitovaný singletní stav beta karotenu má energii o $1{,}8\,\mathrm{eV}$ vyšší než je energie základního stavu. Přechod mezi tímto stavem a základním stavem je ale zakázaný, takže molekula na této energii fotony neabsorbuje. Naopak přechod na druhý nejnižší singletní stav o energii $2{,}4\,\mathrm{eV}$ je povolený a zodpovědný za zářivě oranžovou barvu molekuly. Nejnižší tripletní hladina pak je na energii $0{,}9\,\mathrm{eV}$. Načrtněte Jablonského diagram a pomocí něj vysvětlete, proč beta karoten nefluoreskuje, přestože silně absorbuje viditelné světlo. (3 b)

Bonus: Proč je pro život na zemi tak zásadní, že kyslík je v základním stavu triplet? (+1 b)

Zkuste spočítat, jaký je přibližně limit pro počet orbitalů v aktivním prostoru u metody CASSCF. Uvažujte, že v aktivním prostoru máte stejně elektronů jako orbitalů (což odpovídá tomu, že v HF by právě polovina byla obsazená) a že většina dnešních superpočítačů na výpočty má maximálně 1 TB operační paměti, do které se vám potřebuje vejít hamiltonián. (3 b)

Pro litografickou výrobu moderních polovodičových čipů se používají takzvané excimerové lasery, které září v daleké UV oblasti. Jsou založené na takzvaných excimerech, což jsou molekuly, které jsou stabilní pouze v excitovaném stavu, zatímco v základním stavu se rozpadnou. Díky tomu se molekula po vyzáření fotonu rozpadne a máme zajištěné splnění podmínky pro fungování laseru, tedy to, že ve vyšším stavu je větší část molekul než v tom nižším. Zkuste pomocí Psi4 pro dimer helia ($He_2{}^*$) spočítat a vykreslit disociační křivky základního a nejnižšího excitovaného stavu. ($He_2{}^*$ se pro lasery zatím nevyužívá, ale například $Ar_2{}^*$ či $Kr_2{}^*$ ano.) Na jaké vlnové délce vám vyjde, že by laser pracoval? Srovnejte s experimentální vlnovou délkou 66 nm. (4 b)

Poznámka: U úlohy na webu najdete připravený vstupní soubor pro jednu geometrii. Nelekněte se, že v něm jsou nastavené celkově tři stavy, je to proto, že máme dva excitované stavy blízko sebe, a pokud bychom počítali jen s jedním z nich, pro některé mezijaderné vzdálenosti by to vedlo k problémům s konvergencí.



Řešení V. série

Úloha V.1 ... zamáčklý flažolet

3 body; průměr 2,14; řešilo 57 studentů

Vojta hraje na violoncello. Na strunu naladěnou na frekvenci f zlehka přiloží prst do vzdálenosti $1/n$ její délky od hlavy nástroje a rozezní ji, přičemž slyší tón o základní frekvenci f_1. Následně strunu na stejném místě úplně přimáčkne ke hmatníku a rozezní ji znovu. Tentokrát nástroj vydává tón o základní frekvenci f_2. Určete poměr frekvencí f_1/f_2 v závislosti na přirozeném čísle n.

Vojta vzpomíná na cello.

Vlnová délka zvukové vlny, jíž struna vyluzuje, je v základním stavu rovná dvojnásobku délky struny l. Je proto možné psát

$$f = \frac{v}{2l}\,,$$

kde v je rychlost šíření vlnění ve struně. Přiložením prstu na strunu odfiltrujeme veškeré kmitání struny s vlnovou délkou vyšší než $2l/n$, uslyšíme tedy tón odpovídající n-té harmonické frekvenci struny, pro který platí

$$f_1 = \frac{vn}{2l} = nf\,.$$

Když strunu přimáčkneme, snížíme efektivně její délku na $(1-1/n)l$, z čehož můžeme pozorovat, že frekvence vyluzovaného tónu splňuje

$$f_2 = \frac{v}{2l(1-1/n)} = \frac{n}{n-1}f\,.$$

Nyní už tedy lze vyjádřit hledaný poměr jako

$$\frac{f_1}{f_2} = n-1\,,$$

kde pro $n = 1$ intuitivně doplníme hodnotu poměru jako 1. Chytíme-li tedy strunu např. v 1/2, budou vyprodukované tóny stejné, v 1/3 se budou lišit o oktávu a v 1/4 dostaneme kvintu přes oktávu neboli duodecimu.

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

Úloha V.2 ... dopravní pás

3 body; (chybí statistiky)

Na pohybující se vodorovný dopravní pás každou sekundu svisle dopadá materiál o hmotnosti μ, který na jeho konci padá pryč. Na pás působí odporová síla $F_{\mathrm{odp}} = kv$, která je přímo úměrná rychlosti pásu v přes konstantu k. Jak velkou rychlostí se bude pás pohybovat, pokud

- *na něj působí konstantní pohonná síla F?*
- *je poháněn motorem s konstantním výkonem P?*

Karel doufal, že to půjde vyřešit.

Pás je bržděn nejen odporovou silou, ale také dopadajícím materiálem, který urychlujeme. Je tomu tak proto, že se za jednotku času mění jeho hybnost. Jelikož každou sekundu z pásu odpadne materiál o hmotnosti μ, a to rychlostí pásu v, musí se také každou sekundu rychlost materiálu o hmotnosti μ zvýšit z nuly na v. Síla je následně změnou hybnosti za daný čas (tedy jednu sekundu), z čehož dostáváme $F_{\mathrm{mat}} = \mu v$. Celková síla potřebná k pohonu pásu je proto $F = F_{\mathrm{odp}} + F_{\mathrm{mat}}$. Po dosazení známých údajů dostáváme

$$F = \mu v + kv\,,$$

z čehož po úpravě získáme rychlost

$$v = \frac{F}{K + \mu}\,.$$

Pokud je pás poháněn konstantním výkonem P, pak za čas t vykoná pás práci W. Práce W je opět součtem práce, která je potřebná k urychlení materiálu a té, jíž je třeba za účelem překonání brzdné síly. Za čas t je dopadajícímu materiálu na zvýšení kinetické energie dodána práce

$$W_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\mu v^2 t,$$

a na překonání odporových sil je potom potřeba

$$W_{\mathrm{odp}} = F_{\mathrm{odp}} s = F_{\mathrm{odp}} vt = kv^2 t\,,$$

kde $s = vt$ je dráha, jíž za čas t pás urazí.
Sečtením obou předchozích rovnic a pokrácením času t dostáváme výslednou rychlost

$$v = \sqrt{\frac{P}{\frac{\mu}{2} + k}}\,.$$

Pro druhou část naší úlohy by nás mohlo napadanou vyjádřit celkový výkon jako $P = P_{\mathrm{mat}} + P_{\mathrm{odp}} = (F_{\mathrm{mat}} + F_{\mathrm{odp}})\,v$, což by nás ale dovedlo k jinému výsledku, než k tomu, který jsme dostali pomocí našich úvah o energiích. Neplatí totiž $P_{\mathrm{mat}} = F_{\mathrm{mat}} v$, protože je materiál urychlován postupně a jeho části mají odlišnou rychlost.

Eliška Malá
`eliska.mala@fykos.cz`

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha V.3 ... čekáme na výtah

6 bodů; průměr 4,32; řešilo 68 studentů

Karel jezdí výtahem v budově, která má přízemí a nad ním dalších 12 pater, přičemž výška jednoho patra je $h = 3{,}0\,\mathrm{m}$. Uvažujte, že výtah během své jízdy polovinu doby zrychluje a druhou polovinu doby zpomaluje konstantním zrychlením $a = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. S 50% pravděpodobností výtah stojí v přízemí a zbytek pravděpodobnosti je rovnoměrně rozdělený mezi ostatní patra. Jaká je očekávaná doba čekání na výtah v jednotlivých patrech budovy? Zanedbejte čas otevírání dveří.

Bonus *Mějme 2 výtahy opět v dvanáctipatrové budově. Jeden výtah bude odvolávaný do přízemí. Do jakého patra bychom měli posílat druhý, abychom minimalizovali průměrnou dobu čekání? Předpokládejte analogicky, že polovina jízd bude začínat v přízemí a druhá polovina s rovnoměrnou pravděpodobností v libovolném z dalších pater.* *Karel čekává často na výtah.*

Začněme se základní teorií, která je velice jednoduchá, protože jde pouze zrychlený pohyb. V indexech i a j budeme značit, že výtah pojede z i-tého do j-tého patra. Polovinu rozdílu výšek mezi patry $h_{i,j}$ ujede výtah za polovinu celkové doby $t_{i,j}$, což můžeme zapsat jako

$$\frac{h_{i,j}}{2} = \frac{1}{2}a\left(\frac{t_{i,j}}{2}\right)^2 ,$$

z této rovnice vyjádříme, jak dlouho výtah jede

$$4h_{i,j} = at_{i,j}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{i,j} = 2\sqrt{\frac{h_{i,j}}{a}} .$$

Rozdíl výšek je násobek absolutního rozdílu pater, tedy $h_{i,j} = h\,|j-i|$. Rovnici můžeme upravit na tvar

$$t_{i,j} = 2\sqrt{\frac{h}{a}}\sqrt{|j-i|} .$$

Pokud vynásobíme tuto dobu pravděpodobností p_i, že výtah bude v i-tém patře, když na něj čekáme v j-tém, a všechny pravděpodobnosti sečteme, dostaneme celkovou očekávanou dobu čekání na výtah v j-tém patře

$$T_j = \sum_{i=0}^{12} p_i\sqrt{\frac{h}{a}}\sqrt{|j-i|} .$$

V zadání jsou uvedeny pravděpodobnosti, které vychází z toho, že lidé jezdí rovnoměrně do všech pater a že se do budovy a z ní dostanou pouze v přízemí.[1] Pravděpodobnosti jsou $p_0 = 1/2$ a $p_i = 1/24$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, 12\}$. Úpravou pak dostaneme

$$T_j = \sqrt{\frac{h}{a}j} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{h}{a}}\sum_{i=1}^{12}\sqrt{|j-i|} .$$

Toto je vlastně požadovaný výsledek s tím, že jej musíme vyčíslit. Můžeme buď samotnou sumu zadat, aby nám ji spočítal program, např. Wolfram Mathematica[2], nebo můžeme propočítat

[1] Vzhledem k tomu, že lidé příliš často nevylézají ven z oken, nelezou domů po okapu apod., pak jde o rozumný předpoklad alespoň co se týče přízemí. V reálném provozu nebude splněn předpoklad o rovnoměrnosti ježdění do jednotlivých pater, protože někteří lidé vychází ven častěji. Ale i tak jde o nejlepší odhad, který můžeme mít bez znalosti místních poměrů.

[2] Můžeme také využít zdarma dostupný WolframAlpha `https://www.wolframalpha.com/`.

jednotlivé části např. v Excelu či Google Tabulkách. My jsme se v rámci vzorového řešení rozhodli využít Google Tabulky a postup zveřejňujeme pod odkazem v poznámce.[3] Na prvním listu jsou vypočítané výsledky základní úlohy. V oblasti C5:O17 jsou doby jízdy pro výtah umístěný v patře uvedeném v řádku 3 a čekající bude v patře uvedeném ve sloupci A. V oblasti C20:O32 jsou pak již časy vážené pravděpodobností, že výtah bude v daném patře.
Pro jednotlivá patra nám vyšly výsledky $T_0 = 4{,}2\,\mathrm{s}$, $T_1 = 5{,}5\,\mathrm{s}$, $T_2 = 5{,}8\,\mathrm{s}$, $T_3 = 6{,}1\,\mathrm{s}$, $T_4 = 6{,}4\,\mathrm{s}$, $T_5 = 6{,}7\,\mathrm{s}$, $T_6 = 7{,}0\,\mathrm{s}$, $T_7 = 7{,}4\,\mathrm{s}$, $T_8 = 7{,}7\,\mathrm{s}$, $T_9 = 8{,}1\,\mathrm{s}$, $T_{10} = 8{,}6\,\mathrm{s}$, $T_{11} = 9{,}1\,\mathrm{s}$, $T_{12} = 9{,}7\,\mathrm{s}$. Pokud bychom chtěli odvolávat výtah do nějakého patra tak, aby se minimalizoval střední čas čekání, pak za předpokladu, že výtah vždy stihne dojet do tohoto patra, bude nejvýhodnější, aby jezdil do přízemí. Což je relativně očekávatelný výsledek, když polovina jízd začíná v přízemí.

Pokud bychom chtěli úlohu mít více realistickou, pak bychom museli uvážit to, že výtah zrychluje jenom část doby než dosáhne nějaké maximální rychlosti. Dalším problémem by se mohla zdát doba otevírání a zavírání dveří, ale pokud jsou dveře vždy zavřené, pak se náš výsledek změní pouze o konstantu pro jakékoliv patro a nezmění tak pořadí výhodnosti. Čas jízdy nám také ovlivní doba nastupování a vystupování. V reálném provozu, zejména v přízemí, čím déle čekáte, tím více lidí výtah nakonec ve střední hodnotě sveze, což vás opět zdrží při nastupování a i daleko více, pokud výtah po cestě vícekrát zastaví. Minimalizace času jde víceméně také proti šetření za energie.

Bonus

Podle zadání si zafixujeme jeden výtah v přízemí a pak pro všechny kombinace čekajícího a umístění druhého výtahu vytvoříme tabulku, kde opět váženě sečteme doby čekání. Postup je uvedený na druhém listu Google Tabulek. Vzorce jsou sestavené tak, že opět bereme doby jízdy výtahu do daného patra, které získáme ze vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb. Vybereme ale vždy ten z výtahů, který přijede dříve. Přitom vyzkoušíme všechny pozice druhého výtahu (od 1. do 12. patra) a vypočteme vážený průměr pro všechna patra. Mezivýsledky zde nerozepisujeme, protože by řešení bylo pak zbytečně zdlouhavé.

Výsledkem pro naše vstupní parametry je, že si můžeme vybrat, jestli druhý výtah budeme umisťovat do 8., nebo 9. patra, protože střední čas čekání je identický, a to $2{,}4\,\mathrm{s}$. Oproti situaci s jedním výtahem ve střední hodnotě tak ušetří lidé $1{,}8\,\mathrm{s}$, tedy $44\,\%$ času čekání.

Pokud by vás zajímalo, jak by to vyšlo, kdybychom se rozhodli přidat třetí výtah, pak řešení již není tak jednoduché, ale dá se očekávat, že druhý výtah by měl také změnit své umístění. Ponecháme pouze ten v přízemí a budeme zkoumat celkové očekávané doby čekání pro různé kombinace 2. a 3. výtahu. Když se zamyslíme, tak zjistíme, že hodně kombinací je duplicitních nebo nepřipadají v úvahu. Nicméně jsme vypsali většinu všech možných a z nich se nám podařilo určit, že optimální rozložení je přízemí, 5. patro a 10. patro. Při této kombinaci je očekávaná doba čekání pouze těsně nad $1{,}7\,\mathrm{s}$. Takže bychom ušetřili ve střední hodnotě dalších $0{,}6\,\mathrm{s}$ na jednu jízdu.

[3] `https://docs.google.com/spreadsheets/d/10pQ3D7nYGmeDKZK2DYpOCqA2AjqMDX86f9s39_lGfn0`

Dále by se dalo úlohu dále variovat. Můžete se zamyslet, jak nepříjemně by se zkomplikovala, pokud byste měli možnost umístit 3 výtahy, ale pokaždé byste potřebovali 2, protože se vždy přesouváte jako velká skupina, která se ale nevejde do jednoho výtahu. V reálném světě ale nechodí všechny skupiny stejně velké, výtah vždy nemá čas dojet do daného patra a náš předpoklad s konstantním zrychlením byl také velice idealistický. Ještě víc se nám zkomplikuje situace u budov, které nemají jedno význačné patro, ale mají například i podzemní parkoviště.

Drobnou poznámkou může ještě být, že jsme uvažovali, že výtahy umisťujeme pouze do celočíselných pater, ale nechávat výtah v patře devět a tři čtvrtě by bylo dost nepraktické z technického hlediska. Nejspíše i tak bychom došli k závěru, že se i časově hodí mít výtah pouze v celočíselných patrech, protože alespoň ti, kteří vyjíždějí z daného patra nemusí čekat. Nevylučujeme, že pro nějaké kombinace počtu výtahů, počtu pater, výšek pater a zrychlení by ale mohlo být časově výhodné zvolit pro některý výtah neceločíselné patro.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha V.4 ... Dark Side Time

8 bodů; průměr 6,94; řešilo 53 studentů

FYKOS plánuje vyslat do vesmíru vlastní družici. Ta bude poháněna solárními články, potřebujeme proto, aby se ve stínu Země nenacházela příliš dlouho. V jaké výšce nad povrchem bude doba průletu stínem Země nejmenší? Při svých výpočtech uvažujte (stejně jako organizátoři), že Země je dokonale kulatá, sluneční paprsky jsou v jejím okolí paralelní a Slunce, Země a trajektorie družice se nachází v jedné rovině.
Bonus Během řešení narazíte na analyticky neřešitelnou rovnici. Nepoužívejte online řešiče, ale naprogramujte vlastní řešení. *Honzovi se v Kerbalovi vybily baterky.*

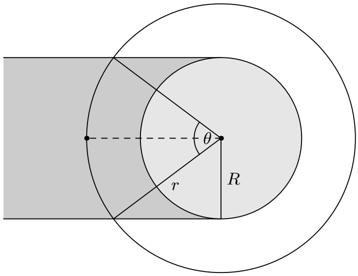
Nejprve vypočteme úhlovou rychlost oběhu satelitu ω.

$$
\begin{aligned}
F_g &= F_d\,,\\
G\frac{mM}{r^2} &= \frac{mv^2}{r}\,,\\
G\frac{M}{r^2} &= \omega^2 r\,,\\
\omega &= \sqrt{\frac{GM}{r^3}}\,,
\end{aligned}
$$

kde M je hmotnost Země, m hmotnost satelitu, r vzdálenost satelitu od hmotného středu Země. Dále potřebujeme zjistit, jakou část trajektorie stráví satelit ve stínu Země. Spočteme tedy úhlovou velikost θ kruhového oblouku schovaného ve stínu Země.

Z náčrtu situace lze vyčíst, že

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{R}{r}\,,\\
\theta &= 2\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\,,
\end{aligned}
$$



Obr. 1: Nákres situace. Zde R je poloměr Země.

kde R je poloměr Země. Čas ve stínu t tedy bude

$$t = \frac{\theta}{\omega}\,,$$
$$t = 2\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\sqrt{\frac{r^3}{GM}}\,.$$

Tento čas chceme minimalizovat vhodnou volbou parametru r. Zderivujeme ho tedy podle r a získaný výraz položíme rovný nule.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(2\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\sqrt{\frac{r^3}{GM}}\right) = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{\frac{3}{2}}\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\right) = 0\,,$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{r}\right)^2}}\frac{-R}{r^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}} + \arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\frac{3}{2R}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}} = 0\,.$$

Rovnice, kterou jsme dostali, vypadá velmi nepříjemně. Použijeme tedy první trik – upravíme ji do bezrozměrného tvaru. V tomto případě to bude jednoduché, neboť máme pouze jednu neznámou, jeden parametr a oba mají rozměr délky. Můžeme tedy problém přeformulovat tak, že se zbavíme jednoho parametru a získáme novou rovnici, která je bezrozměrná. Zavedeme tedy normovanou vzdálenost u, dosadíme ji a výraz upravíme.

$$u = \frac{R}{r}\,,$$
$$\frac{3}{2}\arcsin(u) - \frac{1}{\sqrt{u^{-2}-1}} = 0\,.$$

Tuto rovnici nelze řešit analyticky. Použijeme tedy programy Desmos nebo Wolfram Alpha. Získáme výsledek

$$u \doteq 0{,}823\,.$$

Po vrácení substituce dostaneme

$$r \doteq \frac{R}{0{,}823}\,,$$

$$r \doteq 1{,}215R\,.$$

Vzhledem k tomu, že r je poloměr orbity měřen od středu Země, odečteme od obou stran rovnice R. Tím na levé strmě dostaneme výšku nad povrchem h a na druhé straně hodnotu v násobcích R

$$h \doteq 0{,}215R\,.$$

Po dosazení $R \doteq 6\,378\,\mathrm{km}$ dostaneme konečný výsledek

$$h \doteq 1\,370\,\mathrm{km}\,.$$

Zatím víme, že jde o lokální extrém funkce. Chtěli bychom však vědět, že jde o globální minimum. Spočítáme tedy druhou derivaci $t(r)$.

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}r^2} = \frac{2}{\sqrt{GMr}}\left(\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{-\frac{r^2}{R^2}+2}{\sqrt{\frac{r}{R}^2-1}^3}\right)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}r^2}(1{,}215R) \doteq \frac{4.207}{\sqrt{GMR}}\,.$$

Vidíme, že je kladná, funkce je tedy konvexní a našli jsme lokální minimum.

Jelikož nemáme žádné další kandidáty na extrém, zbývá nám ještě vyšetřit krajní body definičního oboru funkce. V R nabývá funkce hodnoty $\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$, což je očividně vyšší než funkční hodnota v námi nalezeném bodě $2{,}589\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$.

A jelikož $\arcsin(x) \approx x$ pro $x \approx 0$, chová se funkce $t(r)$ v nekonečnu jako

$$t(r) = 2\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \approx 2\frac{R}{r}\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2R\sqrt{\frac{r}{GM}}$$

a v limitě do nekonečna tedy roste nade všechny meze. Opravdu jsme našli globální minimum. Samozřejmě místo tohoto výpočtu bylo možné si funkci nechat nějakým programem nakreslit.

Bonus

Bezrozměrnou rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{3}{2}\arcsin(u) - \frac{1}{\sqrt{u^{-2}-1}} = 0\,.$$

Máme-li rovnici tvaru

$$f(x) = 0\,,$$

pak lze za jistých předpokladů nalézt její kořeny užitím tzv. Newtonovy metody, která funguje následujícím způsobem.

Nejprve se pokusíme odhadnout hodnotou x_0. Tento odhad budeme dále zpřesňovat použitím rekurentního vzorce

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\,,$$

který bude v našem případě po dosazení a úpravě vypadat

$$u_{k+1} = u_k - \frac{\frac{3}{2}\arcsin(u_k) - \frac{1}{\sqrt{u_k^{-2}-1}}}{\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u_k^2}} - \frac{u_k^{-3}}{\sqrt{u_k^{-2}-1}^3}}\,,$$

$$u_{k+1} = \frac{3 - 5u_k^3 - 3\sqrt{1-u_k^2}^3\arcsin(u_k)}{1-3u_k^2}\,.$$

Pokud byl náš počáteční odhad dobrý[4], budou se nové prvky takto získané posloupnosti svojí hodnotou přibližovat hodnotě řešení původní rovnice. Pro počáteční podmínku $u_0 = 0{,}9$ dostaneme posloupnost

Tab. 1: Hodnoty výsledku v jednotlivých iteracích.

k	$\frac{u_k}{1}$
0	0,900 0
1	0,829 4
2	0,823 6
3	0,823 4
4	0,823 4

Z tabulky 1 vidíme, že už ve 3. iteraci se dostaneme na požadovanou přesnost.

Pár poznámek na závěr

Pokud bychom polevili na našich předpokladech, dostaneme další dvě možná řešení.

Tím prvním by byla heliosynchronní dráha. Nedokonale sférický tvar Země způsobuje pomalé stáčení orbit[5] družic, čehož lze pro naše účely využít. Pokud bude mít oběžná dráha naší družice ty správné parametry[6], bude mít perioda tohoto stáčení délku jednoho roku. Lze tedy zařídit, aby rovina oběhu družice měla neměnnou orintaci vuči spojnici Země a Slunce. Když zvolíme takovou orbitu, která do stínu při prvním oběhu nezachází, nevstoupí do stínu Země dlouhodobě.

Druhým řešením by bylo dát družici do jednoho z Lagrangeových bodů. Avšak toto řešení je poněkud problematické. První tři nejsou stabilní, přesto jsou (první dva z nich) využívány mnoha družicemi jako družice SOHO pozorující Slunce v bodě L1, či dalekohlad Jamese Webba v bodě L2. Bod L3 je na opačné straně od Slunce než Země, s potenciální družicí v okolí tohoto bodu by bylo obtížné komunikovat. Body L4 a L5 jsou od Země vzdáleny 1 au, takže by družice taktéž nejspíše byla příliš daleko na to, aby mohla plnit svůj účel.

Jan Benda
`honzab@fykos.cz`

[4] v našem případě musí být počáteční hodnota v intervalu $(0.696, 1)$, jinak Newtonova metoda nebude konvergovat k danému kořenu, ale k 0.

[5] odborně nazývané precese

[6] Zde je důležitý sklon roviny, ve které družice obíhá, vůči rovině rovníku Země. Pro zájemce detaily kupříkladu na `https://en.wikipedia.org/wiki/Sun-synchronous_orbit`.

Úloha V.5 ... xenon šel na vandr

8 bodů; průměr 3,15; řešilo 33 studentů

Jednou kladně ionizovaný atom xenonu vyletěl rychlostí $v = 7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ze středu velké válcové cívky a začal se pohybovat homogenním magnetickým polem v rovině kolmé na magnetické siločáry. V tu chvíli cívku odpojíme od zdroje, takže její indukce začne exponenciálně klesat podle vztahu $B(t) = B_0 \mathrm{e}^{-\Omega t}$, kde $B_0 = 1{,}1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$ a $\Omega = 600\,\mathrm{s^{-1}}$. S jakou odchylkou od původního směru se atom bude pohybovat po ustálení?

Nápověda: V úloze se nebojte použít vhodnou aproximaci, nebo ji zkuste řešit numericky.

Vojta vymýšlel zadání s rozumným řešením několik hodin, ale stejně je to hnus. A to ještě neviděl řešení.

Nejprve si musíme uvědomit, které síly na atom působí. Samozřejmě je tu magnetická síla způsobená přítomností magnetického pole. To se ale s časem mění, proto zde vzniká i pole elektrické, které na elektron také působí. Z Maxwell-Faradayovy rovnice[7] máme pro kruhovou oblast o poloměru r díky symetrii problému

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi r^2 = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{S})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = E 2\pi r \quad \Rightarrow \quad E = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\,.$$

Nalezli jsme tak velikost vektoru elektrické intenzity, ale ještě musíme zjistit, kam míří. Předchozí rovnici můžeme vyjádřit také v diferenciálním tvaru

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}\,.$$

Operátor rotace $\nabla\times$ je vektorový součin operátoru ∇ (což jsou parciální derivace podle jednotlivých souřadnic) s nějakým vektorem jako argumentem (ten je v našem případě intenzita elektrického pole). Například pro komponentu v ose z výsledného vektoru máme $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$.

Orientujme souřadnicový systém tak, že osa z míří ve směru magnetické indukce a je totožná s osou symetrie válce. Osy x a y pak leží v rovině kolmé k této ose. Nechť počátek leží v bodě, odkud vylétá atom a osa x míří do směru jeho rychlosti. Pak má vektor magnetické indukce tvar $\mathbf{B} = B_0 \mathrm{e}^{-\Omega t}\,(0,0,1)^\mathsf{T}$. Proto i vektor vzniklý operátorem rotace na elektrickou intenzitu musí mít pouze třetí komponentu. Snadno si můžete ověřit, že vektor elektrické intenzity

$$\mathbf{E} = \frac{B_0\Omega}{2}\mathrm{e}^{-\Omega t}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$

splňuje Maxwellovu rovnici. Přímý výpočet tvaru vektoru není jednoduchý a vektor dokonce není určený jednoznačně, splňuje ale všechny podmínky, které v rámci elektromagnetismu musí. Samozřejmě jeho velikost koresponduje s velikostí určenou první rovnicí. Směr vektoru bychom už z první rovnice mohli také určit pomocí Lenzova pravidla.

Pohybová rovnice pro nabitou části v elektromagnetickém poli je

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\,.$$

[7] Pro více informací doporučujeme seriál 17. ročníku FYKOSu, který se věnuje elektromagnetismu

V našem případě je částicí kladně nabitý atom o náboji $q = e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ a hmotnosti $m_{\mathrm{Xe}} = m_{\mu} A_{\mathrm{Xe}} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot 137{,}3 = 2{,}2 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$. Vektorovou pohybovou rovnici rozepíšeme na tři složky podle každé z os

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}} \mathrm{e}^{-\Omega t} \left(-\frac{\Omega}{2} y + \dot{y} \right) ,\\
\ddot{y} &= \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}} \mathrm{e}^{-\Omega t} \left(\frac{\Omega}{2} x - \dot{x} \right) ,\\
\ddot{z} &= 0 ,
\end{aligned}
$$

kde jsme rozepsali vektorový součin

$$
\mathbf{v} \times \mathbf{B} = B_0 \mathrm{e}^{-\Omega t} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B_0 \mathrm{e}^{-\Omega t} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Získali jsme pohybové rovnice pro pohyb elektronu v elektromagnetickém poli. Je to soustava tří lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu. Pohyb v ose z je jednoduše přímočarý a jelikož elektron dle zadání vylétá kolmo k ose symetrie, je jeho rychlost v_z nulová. Souřadnice z elektronu je tedy také nulová po celou dobu jeho pohybu.

Problém je s řešení zbylých dvou rovnic, které jsou spolu provázány. Při obecném řešení bychom mohli použít nějaké triky z lineární algebry a rovnice by se nám podařilo separovat (tj. aby v každé rovnici vystupovala jen jedna souřadnice a její časové derivace). Naštěstí se pro vyřešení této úlohy bez tohoto náročného postupu obejdeme. Nakonec není potřeba ani numerická simulace, ale samozřejmě i ta je validním řešením pro takto náročné analytické formule. Do našeho řešení proto přikládáme také jednoduchý kód v Pythonu.

Jeden trik ale přeci jen použijeme. Kvůli tomu, že se v rovnicích vyskytuje součin Ω a souřadnice, není jasné, jestli lze něco zanedbat, aby se rovnice zjednodušily. Použijeme proto substituci $\Omega t = T$, kde T bude bezrozměrný čas, pro který platí, že v čase $T = 1$ bude intenzita magnetického pole ekrát menší než na začátku. Rovnice pak budou mít tvar

$$
\begin{aligned}
\Omega^2 \frac{1}{\Omega^2} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}} \Omega \mathrm{e}^{-\Omega t} \left(-\frac{1}{2} y + \frac{1}{\Omega} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}T^2} = \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}} \Omega} \mathrm{e}^{-T} \left(-\frac{1}{2} y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}T} \right) ,\\
\Omega^2 \frac{1}{\Omega^2} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}} \Omega \mathrm{e}^{-\Omega t} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{\Omega} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}T^2} = \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}} \Omega} \mathrm{e}^{-T} \left(\frac{1}{2} x - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T} \right) ,
\end{aligned}
$$

Všimněme si bezrozměrného faktoru $\alpha = B_0 e / (m_{\mathrm{Xe}} \Omega) \doteq 0{,}13$, který je docela malý. Zrychlení v ose x je na začátku nulové, protože y i $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}T}$ můžeme volit jako nulové (to odpovídá tomu, že si souřadnicový systém orientujeme tak, že elektron vylétá ve směru osy x). Pak je zrychlení v ose x úměrné rychlosti a poloze v y, ale přes faktor α. Ty jsou zase přes stejný faktor α úměrné rychlosti a poloze v x. Takže aspoň pro začátek pohybu můžeme odhadnout, že zrychlení v x je potlačené přes faktor α^2 vůči rychlosti a poloze ve stejné ose. S časovým vývojem je navíc exponenciálně rychle potlačeno.

To nás přivádí na myšlenku, jak zjednodušit obě rovnice. Napadlo nás, že zrychlení v ose x je malé, takže můžeme položit rychlost $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}T} = V_{x0}$ jako konstantní. Tím se rovnice pro zrychlení v ose y podstatně zjednoduší

$$
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}T^2} = \frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}} \Omega} \mathrm{e}^{-T} \left(\frac{V_{x0} T}{2} - V_{x0} \right) .
$$

Integrací pomocí per partes podle T dostaneme rychlost jako

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}T} = -\frac{eB_0}{m_{\mathrm{Xe}}\Omega}\frac{V_{x0}}{2}\mathrm{e}^{-T}\left(T-1\right) + C\,,$$

kde C je integrační konstanta, kterou určíme z podmínky, že v čase $T = 0$ je rychlost nulová. Pak tedy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}T} = -\alpha\frac{V_{x0}}{2}\mathrm{e}^{-T}\left(T-1\right) - \alpha\frac{V_{x0}}{2}\,,$$

kvůli exponenciálnímu tlumení zrychlení se po čase pohyb ustálí na rovnoměrný přímočarý. Jeho směr můžeme určit ze směru vektoru rychlosti. Ten je jednoduše

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{V_y(T=\infty)}{V_x(T=\infty)} = \frac{-\alpha\frac{V_{x0}}{2}}{V_{x0}} = \frac{-Be}{2m_{\mathrm{Xe}}\Omega} \doteq -0{,}067\,.$$

Protože na začátku byl úhel β roven nule, odchýlí se atom od původního směru o $\beta = \mathrm{arctg}(-Be/ /(2m_{\mathrm{Xe}}\Omega)) = -3{,}8\,^\circ$, tedy o skoro čtyři stupně v záporném směru osy y.

Ověřme ještě nyní oprávněnost naší aproximace. Zintegrujme polohu v ose y v závislosti na T

$$y = \alpha\frac{V_{x0}}{2}\mathrm{e}^{-T}T - \alpha\frac{V_{x0}T}{2}\,,$$

Dosazením do rovnice pro $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}T^2}$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}T^2} = \frac{\alpha^2V_{x0}}{4}\mathrm{e}^{-T}\left(-3\mathrm{e}^{-T}T + T + 2\mathrm{e}^{-T} - 2\right)\,.$$

Integrováním od nuly do nekonečna dostaneme změnu rychlosti v ose x jako

$$\Delta V_x = \frac{\alpha^2V_{x0}}{4}\left(-\frac{3}{4} + 1 + 1 - 2\right) = -\alpha^2V_{x0}\frac{3}{16}\,.$$

Rychlost v ose x se změní o

$$\frac{\Delta V_x}{V_{x0}} = -\frac{3\alpha^2}{16} \doteq -0{,}34\,\%\,.$$

Je tedy zřejmé, že náš předpoklad o konstantní rychlosti lze považovat za správný a provedená aproximace je možná.

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Pořadí řešitelů po V. sérii

Kompletní výsledky najdete na `http://fykos.cz`.

Kategorie prvních ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	6	6	6	8	8	10	12	10	**66**	*100*	*110*	**330**
1.	*Kosma Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	6	–	6	9	6	6	11	10	**54**	*80*	*87*	**260**
2.	*Damian Šatánek*	G Teplice	6	–	6	9	6	–	10	10	**47**	*86*	*82*	**246**
3.	*Jiří Preč*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	2	–	6	8	4	7	8	–	**35**	*70*	*71*	**214**
4.	*Vojtěch Jan Schreib*	G Jírovcova, České Budějovice	2	–	5	4	2	6	11	6	**36**	*65*	*65*	**195**
5.	*Ludmila Šírová*	Mensa G, Praha 6	2	–	3	3	–	7	11	3	**29**	*62*	*56*	**168**
6.	*Adam Pustka*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	14	–	**14**	*85*	*54*	**163**
7.	*Vojtěch Kubrycht*	G, Budějovická, Praha	–	–	3	–	–	–	–	7	**10**	*83*	*45*	**136**
8.	*Lukáš Franta*	G Christiana Dopplera, Praha	4	–	7	9	–	–	–	8	**28**	*91*	*42*	**125**
9.	*Gala Dědková*	G, Roudnice nad Labem	4	–	3	3	0	7	9	2	**28**	*34*	*37*	**110**
10.	*Jakub Hlavenka*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	–	3	5	–	6	–	5	**23**	*50*	*35*	**105**
11.	*Michal Stroff*	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	12	**12**	*97*	*35*	**104**
12.	*Anežka Skupinová*	G, Hodonín	–	–	3	8	–	–	–	–	**11**	*77*	*30*	**89**
13.	*Patrik Pöschl*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	6	–	–	–	–	–	**6**	*77*	*28*	**85**
14.	*Ondřej Skála*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*55*	*26*	**79**
15.	*Barbora Blínová*	Podkrušnohorské G, Most	–	–	5	2	–	6	–	–	**13**	*38*	*21*	**62**
16.	*Md Faiyaz Siddiquee*	DPS STS School Dhaka	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*58*	*20*	**59**
17.–18.	*Matej Karpáč*	ZŠ Jána Švermu	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*69*	*18*	**54**
17.–18.	*Mikuláš Vlčan*	SPŠ, Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*18*	**54**
19.	*Dominik Kaňka*	Lepařovo G, Jičín	–	–	3	–	–	6	–	–	**9**	*58*	*17*	**51**
20.	*Monika Nováková*	Reálné G a ZŠ, Prostějov	4	–	3	–	–	2	–	–	**9**	*25*	*15*	**46**
21.	*Tomáš Řehák*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	2	–	–	–	–	–	**2**	*86*	*13*	**38**
22.	*Arkadip De Jaydip De*	Salt Lake School, India	6	–	2	8	–	6	10	5	**37**	*71*	*12*	**37**
23.	*Ján Lakota*	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*83*	*11*	**34**
24.	*Samuel Šandor*	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*107*	*10*	**31**
25.	*Vojtěch Janáček*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*78*	*9*	**28**
26.	*Vojtěch Novosád*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*84*	*9*	**27**
27.–29.	*Roberto Franchin*	Liceo Sci. Augusto Righi, Roma	–	–	–	–	–	7	–	–	**7**	*89*	*8*	**25**
27.–29.	*Daniel Švaňa*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*81*	*8*	**25**
27.–29.	*Nina Vážna*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*76*	*8*	**25**
30.	*Teo Višňovský*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*8*	**24**
31.–32.	*Filip Krafčík*	G T. Vansovej, Stará Ľubovňa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*44*	*7*	**21**
31.–32.	*Petr Němec*	Wichterlovo G, Ostrava	6	–	7	8	–	–	–	–	**21**	*105*	*7*	**21**
33.	*Erik Ježek*	Smíchovská SPŠ Praha 5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*7*	**20**
34.	*Vit Vycudilik*	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*36*	*6*	**18**

	jméno *Student Pilný*	**škola** MFF UK	**1** 6	**2** 6	**3** 6	**4** 8	**5** 8	**P** 10	**E** 12	**S** 10	**V** **66**	„%“ *100*	% *110*	Σ **330**
35.–36.	*Bára Kopačková*	G a SOŠ Podbořany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*24*	*6*	**17**
35.–36.	*Barbora Salajová*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*65*	*6*	**17**
37.–39.	*Petr Barták*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*89*	*5*	**16**
37.–39.	*Pavlina Kuthanová*	G a SOŠ Podbořany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*28*	*5*	**16**
37.–39.	*Linda Mičicová*	Bilingválne G, Sučany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*59*	*5*	**16**
40.–41.	*Tomáš Ferbas*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*79*	*5*	**15**
40.–41.	*Nela Šlešková*	G, Na Zatlance, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*39*	*5*	**15**
42.	*Helena Muchová*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*78*	*5*	**14**
43.	*Jindřich Anderle*	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*4*	**12**
44.	*Jakub Učík*	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*55*	*4*	**11**
45.	*Alberto Quondam*	Liceo Sci. Augusto Righi, Roma	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*41*	*3*	**9**
46.	*Vojtěch Zielina*	G, Třinec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*30*	*3*	**8**
47.	*Michal Ševčík*	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*2*	**6**
48.	*Jakub Busínský*	SPŠ strojní a stavební, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*42*	*2*	**5**
49.	*Patricie Labuťová*	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*38*	*1*	**3**
50.	*Tadeáš Těhan*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*33*	*1*	**2**

Kategorie druhých ročníků

	jméno *Student Pilný*	**škola** MFF UK	**1** 6	**2** 6	**3** 6	**4** 8	**5** 8	**P** 10	**E** 12	**S** 10	**V** **66**	„%“ *100*	% *110*	Σ **330**
1.	*David Něnička*	G, Rožnov pod Radhoštěm	6	–	5	9	4	5	12	–	**41**	*85*	*80*	**240**
2.	*Vladimír Slanina*	G Poštová, Košice	6	–	6	9	4	–	13	5	**43**	*96*	*74*	**221**
3.	*Lukáš Hrdý*	G, Lesní čtvrť, Zlín	6	–	2	9	4	6	12	4	**43**	*71*	*72*	**217**
4.	*Filip Cihlář*	G J. Š. Baara, Domažlice	6	–	2	9	–	8	–	7	**32**	*71*	*63*	**189**
5.	*Linda Tománková*	G, Boskovice	2	–	6	2	–	5	11	10	**36**	*65*	*63*	**188**
6.	*Jakub Kubica*	G F. Hajdy, Ostrava	2	–	6	9	3	7	9	9	**45**	*71*	*53*	**160**
7.	*Tomáš Otrubčák*	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	6	–	6	–	2	–	–	10	**24**	*87*	*52*	**156**
8.	*Tomáš Kubrický*	G Poštová, Košice	6	–	7	9	4	–	13	–	**39**	*94*	*51*	**153**
9.	*Anna Škrdletová*	G, Lovosice	2	–	4	3	0	6	1	–	**16**	*48*	*51*	**152**
10.	*Hana Žitňanská*	Slovanské G, Olomouc	2	–	3	–	–	3	–	–	**8**	*48*	*46*	**138**
11.	*Zuzana Grycová*	G Botičská, Praha	–	–	3	–	–	–	–	–	**3**	*55*	*46*	**137**
12.	*Pavla Šimová*	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*76*	*45*	**135**
13.	*Lujza Lea Lavriková*	G, P. Horova, Michalovce	–	–	6	2	–	–	–	–	**8**	*68*	*43*	**128**
14.	*Petr Brettschneider*	G, Dukelská, Bruntál	2	–	1	–	–	7	11	–	**21**	*54*	*42*	**127**
15.	*Tomáš Bourek*	G J. Heyrovského, Praha	6	–	6	9	–	–	–	–	**21**	*79*	*42*	**126**
16.	*Ivan Žemlička*	G Ústavní, Praha	6	–	3	3	–	–	–	4	**16**	*75*	*42*	**125**
17.–18.	*Jakub Buzalka*	G, Považská Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*65*	*40*	**120**
17.–18.	*Daniel Švec*	G, Pelhřimov	–	–	–	8	–	7	3	–	**18**	*63*	*40*	**120**
19.	*Radim Švec*	G, Pelhřimov	–	–	4	8	–	7	–	–	**19**	*63*	*39*	**116**
20.	*Martin Zuzek*	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	10	–	**10**	*70*	*36*	**108**
21.	*Matouš Mišta*	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*85*	*35*	**104**
22.	*Matyáš Beran*	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	2	–	6	–	–	6	–	–	**14**	*61*	*32*	**97**
23.	*Giulio Vertucci*	Liceo Sci. Augusto Righi, Roma	6	–	1	7	–	6	–	–	**20**	*70*	*27*	**82**
24.	*Soňa Vasiľová*	G, Kukučínova, Poprad	6	–	–	–	–	–	–	–	**6**	*95*	*25*	**75**
25.	*Gabriela Kotúčová*	G PdC, Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*69*	*25*	**74**
26.	*Petr Kozák*	G, Písek	6	–	–	–	–	–	10	–	**16**	*55*	*24*	**72**

	jméno *Student Pilný*	**škola** MFF UK	**1** 6	**2** 6	**3** 6	**4** 8	**5** 8	**P** 10	**E** 12	**S** 10	**V** **66**	„%“ *100*	% *110*	Σ **330**
27.	*Sabina Mihulová*	G, Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*23*	**69**
28.	*Jakub Radim Zbončák*	G, Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*93*	*22*	**65**
29.–31.	*Kate Timofeeve*	Physics and Mathematics S, SFU	2	–	3	4	2	5	4	1	**21**	*46*	*19*	**58**
29.–31.	*Petr Toman*	G, Velké Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*88*	*19*	**58**
29.–31.	*Martin Uhrin*	G Hubeného, Bratislava	–	–	7	–	–	–	–	–	**7**	*85*	*19*	**58**
32.	*Eva Žilková*	G Fr. Švantnera	–	–	1	–	–	–	–	–	**1**	*67*	*19*	**56**
33.	*Zuzana Harbutová*	G Ľ. Štúra, Zvolen	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*18*	**55**
34.	*Lucia Kleščová*	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*78*	*17*	**52**
35.	*Veronika Pavlíková*	G, Křenová, Brno	–	–	6	–	–	–	–	–	**6**	*91*	*17*	**51**
36.	*Matěj Pěnička*	G, Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*82*	*17*	**50**
37.	*Jana Bartoňová*	G, Broumov	2	–	3	–	–	–	–	–	**5**	*72*	*15*	**46**
38.	*Petra Ivanišová*	G, Ohradní, Praha-Michle	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*40*	*15*	**44**
39.–40.	*Ondřej Hejsek*	G a SOŠ, Jilemnice	–	–	–	–	–	3	–	–	**3**	*34*	*14*	**42**
39.–40.	*Tudor Popescu*	Inter. Computer HS, Bucharest,RO	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*95*	*14*	**42**
41.–42.	*Michal Friml*	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*77*	*14*	**41**
41.–42.	*Pavel Kučera*	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*55*	*14*	**41**
43.–45.	*Adam Filip*	G, Česká Lípa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*60*	*13*	**39**
43.–45.	*Klaudia Ľaľová*	G L. Svobodu, Humenné	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*76*	*13*	**39**
43.–45.	*Mária Mederlyová*	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*91*	*13*	**39**
46.	*Terézia Dadajová*	Gymnázium Federica Garcíu Lorcu	2	–	1	–	–	–	–	–	**3**	*50*	*13*	**38**
47.	*Tereza Kendrová*	Gymnázium Ladislava Novomeského	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*45*	*12*	**35**
48.	*Jozef Smolár*	G Antona Bernoláka, SK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*72*	*11*	**34**
49.	*Miroslav Pajger*	Bilingválne G, Sučany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*103*	*11*	**33**
50.	*Matěj Hušek*	G, Turnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*78*	*10*	**31**
51.–52.	*Sebastian Jakub Machel*	G M. Štefánika N. Mesto n. V.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*53*	*10*	**30**
51.–52.	*Matyáš Matta*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*91*	*10*	**30**
53.	*Šimon Zemčák*	G Kežmarok	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*52*	*9*	**27**
54.–55.	*Lorenzo Borri*	Liceo Sci. Augusto Righi, Roma	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*86*	*8*	**24**
54.–55.	*Daniel Križan*	Gymnázium Ladislava Novomeského	–	–	–	–	1	–	–	–	**1**	*46*	*8*	**24**
56.	*Daniel Linda*	SPŠ, Ječná, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*43*	*8*	**23**
57.–58.	*Mária Popovičová*	G, Park mládeže, Košice	–	–	–	–	–	5	–	–	**5**	*63*	*7*	**22**
57.–58.	*Ondřej Sedláček*	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*7*	**22**
59.–61.	*Tereza Lomecká*	G, U Libeňského zámku, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*57*	*7*	**21**
59.–61.	*Lenka Prokešová*	G, Třeboň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*41*	*7*	**21**
59.–61.	*Václav Verner*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*70*	*7*	**21**
62.	*Yahor Herashchanka*	G, Turnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*76*	*6*	**19**
63.	*Daniel Ondryáš*	Jazykové G P. Tigrida, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*6*	**18**
64.–65.	*Šimon Borovský*	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*47*	*6*	**17**
64.–65.	*Sebastian Laskowski*	G, U Libeňského zámku, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*55*	*6*	**17**
66.–67.	*Adam Bretšnajder*	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*89*	*5*	**16**
66.–67.	*Eliška Vokáčová*	G B. Hrabala	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*67*	*5*	**16**
68.–70.	*Tomáš Hořejší*	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*28*	*5*	**14**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	6	6	6	8	8	10	12	10	**66**	*100*	*110*	**330**
68.–70.	*Eduard Plic*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*70*	*5*	**14**
68.–70.	*Kristóf Szőcs*	Gymnázium Zoltána Kodálya	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*25*	*5*	**14**
71.–72.	*Michal Martínek*	G Ústavní, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*4*	**12**
71.–72.	*Vít Stružka*	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*4*	**12**
73.	*Jindřich Urban*	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*92*	*4*	**11**
74.–76.	*Róbert Front*	G Stropkov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*19*	*3*	**10**
74.–76.	*Ondřej Šmíd*	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*83*	*3*	**10**
74.–76.	*Arsen Zhaxybekov*	G, Mostecká, Chomutov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*24*	*3*	**10**
77.–80.	*Jonatán Gaus*	G, U Libeňského zámku, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*67*	*3*	**8**
77.–80.	*Katarína Gersová*	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*67*	*3*	**8**

Kategorie třetích ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	6	8	8	10	12	10	**60**	*100*	*100*	**300**
1.	*Radovan Lev*	G F. Palackého, Val. Mez.	1	–	7	9	6	9	13	11	**56**	*98*	*97*	**291**
2.	*Jan Klír*	G B. Hrabala	2	–	7	9	8	10	14	–	**50**	*98*	*94*	**281**
3.	*Patrik Stercz*	G Poštová, Košice	4	–	7	9	–	–	10	10	**40**	*98*	*85*	**255**
4.	*Jan Strnad*	G, Postupická, Praha	3	–	3	8	2	7	12	11	**46**	*82*	*81*	**244**
5.–6.	*Matej Kundrík*	G Poštová, Košice	3	–	6	8	–	7	9	4	**37**	*82*	*77*	**232**
5.–6.	*Martin Mičuch*	G Šrobárova, Košice	3	–	5	9	4	7	11	11	**50**	*81*	*77*	**232**
7.	*Adam Harmanský*	G Poštová, Košice	1	–	5	9	4	6	10	5	**40**	*86*	*76*	**227**
8.	*Jiří Sýkora*	G, Trhové Sviny	3	–	1	8	2	6	9	10	**39**	*77*	*74*	**221**
9.	*Monika Drexlerová*	G, Rožnov pod Radhoštěm	3	–	6	8	2	7	13	8	**47**	*72*	*72*	**215**
10.	*Jana Mária Žeňuchová*	G, P. Horova, Michalovce	1	–	7	8	6	7	–	–	**29**	*74*	*68*	**204**
11.	*David Ševčík*	G, Uherské Hradiště	3	–	6	9	4	6	8	8	**44**	*69*	*63*	**188**
12.	*Lukáš Jarábek*	G Grösslingová, Bratislava	1	–	2	8	1	7	9	5	**33**	*60*	*59*	**177**
13.	*Veronika Plevná*	G, Cheb	1	–	7	9	4	6	11	–	**38**	*78*	*56*	**169**
14.	*Filip Hošek*	Masarykovo klasické G, Říčany	1	–	6	9	2	7	12	–	**37**	*77*	*45*	**136**
15.	*Michael Ruman*	G V. P. Tótha, Martin	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*83*	*41*	**123**
16.	*Maroš Jankovič*	G V. Nedožerského, SR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*69*	*39*	**118**
17.	*Vladimíra Jiříčková*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*87*	*32*	**96**
18.	*Cristina Mihaela Rău*	CNI Tudor Vianu, Romania	–	–	2	7	–	5	9	–	**23**	*55*	*30*	**90**
19.	*Tadija Jelesijević*	Gimnazija Kruševac	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*81*	*27*	**80**
20.	*Maxmilian Ladislav Skuda*	G, Boskovice	1	–	0	1	–	5	12	3	**22**	*53*	*26*	**79**
21.–22.	*Anežka Čechová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	–	–	8	0	7	11	–	**29**	*63*	*25*	**75**
21.–22.	*Richard Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	–	–	8	–	7	10	–	**28**	*68*	*25*	**75**
23.	*Terézia Hanáková*	Gymnázium Janka Matúšku Galanta	–	–	2	6	2	6	–	–	**16**	*39*	*24*	**72**
24.–25.	*Veronika Bartáková*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*84*	*23*	**68**
24.–25.	*Barbora Klusáková*	BG B. Balbína, Hradec Králové	1	–	–	–	–	–	–	–	**1**	*91*	*23*	**68**
26.	*Tomáš Vysoký*	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*65*	*22*	**67**
27.–28.	*Lukáš Linhart*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*67*	*22*	**66**
27.–28.	*Martin Marcinčák*	G Šrobárova, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*86*	*22*	**66**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**V**	„%“	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	6	8	8	10	12	10	**60**	*100*	*100*	**300**
29.	*Daniel Čtvrtečka*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*85*	*20*	**61**
30.	*Nikola Beňáková*	G, P. Horova, Michalovce	2	–	6	2	–	6	9	–	**25**	*61*	*20*	**60**
31.	*Kamila Cidlinská*	G Botičská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*62*	*20*	**59**
32.	*Jakub Savula*	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*97*	*19*	**58**
33.	*Lachyn Hydyrova*	86th specialized school, TM	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*36*	*19*	**56**
34.	*Ondřej Kopeček*	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*68*	*18*	**54**
35.–36.	*Štěpán Fröde*	G Dobruška	3	–	7	9	–	–	–	–	**19**	*86*	*16*	**48**
35.–36.	*Jan Šimáček*	Gymnázium Brno-Bystrc	–	–	3	–	4	–	–	–	**7**	*83*	*16*	**48**
37.	*Matej Bryja*	G D. Tatarku, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*15*	**45**
38.	*Ondřej Kadlec*	G, Moravský Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*84*	*14*	**42**
39.	*Martin Kubánek*	G, Roudnice nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*84*	*12*	**36**
40.	*Kateřina Šmídová*	Gymnázium Brno-Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*51*	*12*	**35**
41.	*Klaudia Sýkorová*	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*61*	*10*	**31**
42.	*Magdalena Tyrmerová*	G a SOŠE, Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*45*	*9*	**27**
43.–44.	*Šimon Kirňak*	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*90*	*9*	**26**
43.–44.	*Jan Strmiska*	Mensa G, Praha 6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*49*	*9*	**26**
45.	*Julie Křížková*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*60*	*8*	**25**
46.–48.	*Nicolas Matej*	G J. Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*71*	*8*	**24**
46.–48.	*Timotej Vida*	G V. Nedožerského, SR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*8*	**24**
46.–48.	*Jan Zrůst*	G Botičská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*59*	*8*	**24**
49.–50.	*Šimon Kala*	G, Roudnice nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*70*	*8*	**23**
49.–50.	*Iren Kishinevskaya*	Slovanské gymnázium Praha 5 - Ko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*38*	*8*	**23**
51.	*Stanislav Barčák*	G Veľká okružná, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*44*	*7*	**22**
52.	*Tereza Lichtenbergová*	G Botičská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*51*	*7*	**20**
53.	*Vít Říha*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*42*	*6*	**19**
54.–55.	*Anna Kopecká*	G a SOŠ, Jilemnice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*55*	*6*	**18**
54.–55.	*Jakub Svobodník*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*75*	*6*	**18**
56.	*Petr Dymanus*	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*39*	*6*	**17**
57.–58.	*Filippo Massi Benedetti*	Liceo Sci. Augusto Righi, Roma	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*40*	*5*	**16**
57.–58.	*Maurizio Polverari*	Liceo Sci. Augusto Righi, Roma	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*47*	*5*	**16**
59.	*Filip Rásó*	Leaf Academy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*75*	*5*	**15**
60.	*Aneta Vašíčková*	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*56*	*5*	**14**
61.	*Lukáš Müller*	Podkrušnohorské G, Most	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*60*	*4*	**12**
62.–66.	*Ramazan Amanzhol*	Nazarbayev Int. (KZ)	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*48*	*4*	**11**
62.–66.	*Eduard Fedorčuk*	Evanjelické G JAK, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*92*	*4*	**11**
62.–66.	*Johana Kačurová*	Evanjelické G JAK, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*39*	*4*	**11**
62.–66.	*Pavol Alexander Komloš*	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*4*	**11**
62.–66.	*Adam Kuny*	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*92*	*4*	**11**
67.–71.	*Kristýna Bělušová*	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*3*	**10**
67.–71.	*Emir Garajayev*	86th specialized school, TM	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*59*	*3*	**10**
67.–71.	*Daniela Macková*	Katolícke gymnázium Š. Moysesa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*32*	*3*	**10**
67.–71.	*Tomáš Scholz*	G Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*50*	*3*	**10**
67.–71.	*Jan Vojta*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*3*	**10**
72.–74.	*Sára Herianová*	G a SOŠP, Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*43*	*3*	**9**
72.–74.	*Klára Plchová*	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*41*	*3*	**9**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	6	8	8	10	12	10	**60**	*100*	*100*	**300**
72.–74.	*Vojtěch Tyleček*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*3*	**9**
75.	*Julie Matulová*	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*40*	*3*	**8**
76.	*Filip Neubauer*	Akademické G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*55*	*2*	**6**
77.	*Matyáš Pokorný*	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*36*	*2*	**5**
78.–79.	*Soňa Hanáková*	G sv. Jána Pavla II., Poprad	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*50*	*1*	**3**

Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	„%“	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	6	8	8	10	12	10	**60**	*100*	*100*	**300**
1.	*Jakub Hadač*	G V. Hlavatého, Louny	1	–	6	9	3	9	13	10	**51**	*82*	*78*	**234**
2.	*Martin Švanda*	Arcibiskupské G, Praha	–	–	6	8	4	6	–	–	**24**	*83*	*76*	**227**
3.–4.	*Nikola Kadlečková*	G, nám. TGM, Zlín	3	–	2	8	2	6	9	6	**36**	*72*	*65*	**194**
3.–4.	*Tereza Voltrová*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	–	5	5	–	7	9	–	**29**	*70*	*65*	**194**
5.	*Daniela Karpíšková*	Masarykovo G, Plzeň	3	–	4	1	–	5	13	–	**26**	*59*	*49*	**146**
6.	*Jiří Vestfál*	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*93*	*47*	**141**
7.	*Tereza Hochmanová*	G Chotěboř	–	–	–	–	–	–	12	–	**12**	*78*	*46*	**138**
8.–9.	*Katarína Horská*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*40*	**120**
8.–9.	*Dzenan Midzic*	JU Gimnazija Bihać, BiH	3	–	4	–	–	–	7	11	**25**	*86*	*40*	**120**
10.	*Lukáš Létal*	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*65*	*33*	**99**
11.	*David Bálek*	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*97*	*30*	**91**
12.	*Pavel Horský*	G, Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*67*	*29*	**88**
13.	*Jaromír Potůček*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*59*	*28*	**85**
14.	*David Škrob*	SPŠ a VOŠT Brno	–	–	–	–	–	4	9	6	**19**	*52*	*26*	**78**
15.	*Vladimíra Brabcová*	SPŠ Ostrov n. Ohří	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*81*	*23*	**70**
16.	*Jakub Vyskočil*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*56*	*22*	**65**
17.	*Juraj Pavolko*	G, P. Horova, Michalovce	1	–	1	–	2	–	10	–	**14**	*51*	*21*	**62**
18.	*Jakub Ježek*	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*95*	*19*	**57**
19.	*Filip Liška*	1. súkromné G v Bratislave	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*37*	*19*	**56**
20.–21.	*Radek Košinár*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*68*	*17*	**52**
20.–21.	*Rudolf Žižka*	G, Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*58*	*17*	**52**
22.	*Patrik Jendele*	SPŠ stavební Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*83*	*16*	**49**
23.	*Jonáš Dej*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*110*	*15*	**46**
24.	*Jan Lepič*	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*79*	*14*	**41**
25.	*Barbora Růžičková*	G, Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*80*	*13*	**39**
26.	*Adam Juttner*	G, Nový Jičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*52*	*10*	**31**
27.	*Emilija Zdravković*	Gimnazija Kruševac	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*50*	*9*	**28**
28.	*Maxim Arkhipov*	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*59*	*9*	**27**
29.	*Jakub Kopcil*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*86*	*8*	**25**
30.	*Martin Bánský*	G Fr. Švantnera	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*59*	*8*	**23**
31.	*Jakub Gerža*	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*105*	*7*	**21**
32.–33.	*Maxim Archipov*	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*7*	**20**
32.–33.	*Josef Lezna*	G dr. K. Polesného., Znojmo	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*7*	**20**
34.–35.	*Jan Engler*	G, Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*86*	*6*	**19**
34.–35.	*Eduard Mrug*	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*112*	*6*	**19**
36.	*Dovletgeldi Merdanov*	86th specialized school, TM	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*39*	*5*	**16**
37.	*Martin Hraba*	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*75*	*5*	**15**
38.	*Robin Řádek*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*4*	**12**
39.	*Yashwinder Rajput*	Bhupindra Int. PS, India	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*61*	*4*	**11**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**V**	*„%“*	*%*	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	3	3	6	8	8	10	12	10	**60**	*100*	*100*	**300**
40.	*Michal Almáši*	G, Park mládeže, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*91*	*3*	**10**
41.	*Vojtěch Marek*	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*56*	*3*	**9**
42.	*Anna Vodáková*	G, Litovel	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*42*	*2*	**5**
43.	*Natália Čigašová*	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*67*	*1*	**4**
44.–46.	*Fatma Amin*	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*1*	**3**
44.–46.	*Pragun Pudukoli*	NC for Excellence, India	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*1*	**3**
44.–46.	*Vojtěch Štěpán*	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*1*	**3**
47.	*Tomaš Názler*	SPŠ a VOŠT Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*15*	*1*	**2**

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

/FYKOS ***@fykosak***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.