

## Úvodem

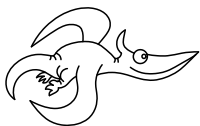
Milé řešitelky, milí řešitelé,

přichází k vám nová brožurka FYKOSu spolu se zadáním třetí série. Těšit se můžete na tematické zimní úlohy o topení nebo bobování či na elektrickou experimentálku. A kdyby se vám z toho všeho chtělo utéct, můžete zkusit třeba Tau Ceti. Třetí díl seriálu se týká výpočtů lineárních kombinací orbitalů a tvorby molekul. Tato série je zároveň poslední, kterou si můžete zlepšit své bodové skóre pro účast na **jarním soustředění**, které se bude konat **22. – 30. dubna** a jistě bude stát za to.

Co se týká dalších akcí, ve středu 23. listopadu proběhlo Fyziklání Online, kterého se zúčastnilo rekordních 904 týmů z 59 států. To mohlo posloužit jako trénink na **Fyziklání 2023**, které se bude konat **10. února v Praze**. Kromě soutěže se tradičně můžete těšit i na bohatý doprovodný program se spoustou přednášek a exkurzí. Přihlašování již běží, tak neváhejte a registrujte svůj tým.

To je od nás pro letošek vše, přejeme vám krásné a pohodové Vánoce a těšíme se na vás v novém roce.

*Organizátoři*



## Zadání III. série

Termín uploadu: 3. 1. 2023 23.59

Termín odeslání: 2. 1. 2023

### Úloha III.1 ... kreativní řešení problémů

3 body

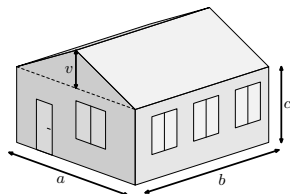
Danka připojila zahradní hadici s vnitřním průměrem 1,5 cm na vodovodní kohoutek na koleji a druhý konec položila na okraj okna na 8. poschodí ve výšce 23 m nad zemí. Jaký objemový průtok vody by musel kohoutek mít, aby se Dance podařilo postříkat proudem vody lidi stojící pod kolejí ve vodorovné vzdálenosti 9 m od budovy, kteří ruší noční klid? Může se to Dance podařit, pokud voda stříká vodorovně a nefouká vítr?

*Bonus* Kde nejdále mohou stát tito lidé, aby na ně Danka hadicí dostříkla, pokud je objemový průtok kohoutku  $0,41 \cdot \text{s}^{-1}$ ? Danka teď může konec hadice natočit tak, aby voda stříkala pod libovolným úhlem vůči vodorovné rovině.

### Úloha III.2 ... topení na chalupě

3 body

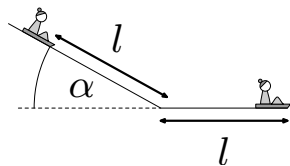
Danka přišla uprostřed zimy na svou chalupu, kde bylo uvnitř jen  $T_1 = 12^\circ\text{C}$ . Zapálila proto v krbu oheň, kde topila dřevem s výhřevností  $H = 14,23 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Kolik ho musí spálit, aby ohřála vzduch vevnitř na  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ ? Chalupa má tvar kvádra s rozměry  $a = 6 \text{ m}$ ,  $b = 8 \text{ m}$  a  $c = 3 \text{ m}$ , kde  $c$  je výška stěn, a střechou ve tvaru nepravidelného ležatého trojbokého hranolu s výškou  $v = 1,5 \text{ m}$ , jehož horní hrana je osou půdorysu chalupy. Vzduch zabírá 87% objemu chalupy, jeho hustota je  $\rho_v = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a měrná tepelná kapacita je  $c_v = 1007 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Odpovídá výsledek očekávání? Diskutujte nad použitým jednoduchým modelem.



**Úloha III.3 ... bobování**

5 bodů

Matěj s Davidem se kloužou na bobech z kopce se sklonem  $\alpha = 29^\circ$ , který v jeho patě přechází ve vodorovnou zem. Oba vyrazili z klidu ze stejné výšky. Matějovy boby ujedou vždy stejnou vzdálenost  $l$  po nakloněné rovině i ve vodorovné části. Protože se při vyšší zátěži boby proboří hlouběji do sněhu, uvažujte, že třecí koeficient je úměrný normálové síle jako  $f(F) = kF$ , kde  $k$  je kladná konstanta. Určete, kolikrát dále dojde Matěj od paty kopce než David, je-li Davidova hmotnost (i s boby) o 12 % vyšší než Matějova. V patě kopce bobaři neztrácejí žádnou energii.

**Úloha III.4 ... útěk na Tau Ceti**

7 bodů

Protože naše Slunce jednou exploduje, bude potřeba zorganizovat stavbu evakuační lodi, v níž alespoň 0,000 001 % lidstva získá možnost uniknout. Pro únik si vyberou hvězdu Tau Ceti vzdálenou 12 ly. Podaří se jim sestrojít motory, které za velmi krátký čas zrychlí loď na cestovní rychlost  $v = 0,75c$ . Bohužel, právě v polovině vzdálenosti k cíli zpozorují jak explozi Slunce, tak explozi Tau Ceti. Jak dlouho před touto strašlivou scénou exploze nastaly v soustavě spojené s lodí? A kdy v soustavě, ve které jsou Slunce i Tau Ceti nehybné? Předpokládejte, že se vzdálenost mezi oběma hvězdami nemění.

**Úloha III.5 ... kytarová**

10 bodů

Mějme kytaru naladěnou při pokojové teplotě. O kolik púltónů (při temperovaném ladění) se přeladí jednotlivé struny, pokud se přesuneme k táboráku, kde bude o  $10^\circ\text{C}$  chladněji? Bude kytara stále znít naladěně? Vzdálenost mezi body upevnění strun je  $d = 65\text{ cm}$ . Struny mají hustotu  $\rho = 8900\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , Youngův modul pružnosti  $E = 210\text{ GPa}$  a teplotní roztažnost  $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ .

**Úloha III.P ... absurdní kyvadlo**

9 bodů

Jaké jevy mohou ovlivnit měření tíhového zrychlení pomocí kyvadla? Odhadněte, kolik platných cifer by musel obsahovat váš výsledek, abyste je naměřili. Uvažujte i jevy, které běžně zanedbáváte.

**Úloha III.E ... vybíjená**

13 bodů

Třením nabijte předmět a poté proměřte závislost jeho samovolného vybíjení na čase. Určete elektrickou vodivost vzduchu. Uvažujte, že velikost náboje se mění jako

$$Q = Q_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t},$$

kde  $Q_0$  je počáteční náboj,  $\epsilon$  je permitivita vzduchu a  $\sigma$  je hledaná vodivost.

*Nápověda:* Zavěste na tenké dlouhé vlákno malý kovový předmět (např. maticku). Třením nabijte brčko a přeneste část náboje na předmět. Měl by se od brčka začít odpuzovat. Z jejich vzájemné vzdálenosti pak určíte součin nábojů a poté vodivost.

## Úloha III.S ... kvanta orbitalů

10 bodů

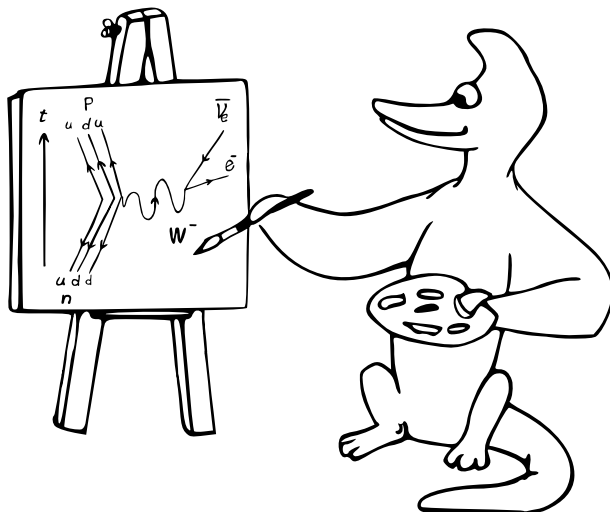
1. Podobně jako v seriálu vytvořte pomocí Hückelovy metody matici hamiltoniánu pro molekulu cyklobutadienu a ověřte, že její vlastní čísla jsou  $\alpha + 2\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha - 2\beta$ . Napište do diagramu, jaké jsou energie vzniklých orbitalů a jak by je obsadily elektrony. (4b)

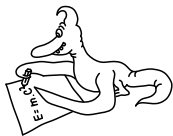
*Bonus* Jaký je zásadní rozdíl v charakteru těchto orbitalů a jejich obsazení oproti molekule benzenu, kterou jsme si ukázali v seriálu? Jaké to má pro molekulu cyklobutadienu důsledky? (2b)

2. Zkuste se vrátit k molekule betakarotenu a znovu spočítat, na jaké vlnové délce by měla absorbovat, tentokrát pomocí Hückelovy metody. Kolik by musel být parametr  $\beta$ , aby vyšla experimentální hodnota?

*Alternativa* Pokud narazíte na problém s diagonalizací hamiltoniánu, proveďte úlohu s molekulou hexa-1,3,5-trienu. Experimentální hodnota absorpce je v tomto případě na vlnové délce 250 nm. (4b)

3. Co se stane s molekulou (stačí taková, která má jen jednoduché vazby), pokud pomocí UV světla excitujeme elektron ze  $\sigma$  do  $\sigma^*$  orbitalu? (2b)





## Řešení II. série

## Úloha II.1 ... žlab na vodu

3 body; průměr 2,78; řešilo 166 studentů

Žlabem na vodu obdélníkového průřezu o šířce  $d = 10$  cm teče voda. Na její hladinu spadne malý list, který se začne pohybovat rychlostí  $60 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ . Výška vody ve žlabu je  $h = 1,3$  cm. Odhadněte, jak dlouho bude trvat nabrat 50 l vody do připraveného vědra. Komentujte použité předpoklady proudění v porovnání s reálnou situací. *Dodo si chladil štípanec od ováda.*

Na začiatok považujeme vodu za ideálnu kvapalinu. V takom prípade by prúdila v celom objeme žlabu rovnakou rýchlosťou, a to rýchlosťou  $v_0$  určenou zadaním. V úlohe vychádzame zo vzťahu pre objemový tok

$$Q_V = Sv = \frac{V}{t}.$$

Po úprave dostávame výraz

$$t = \frac{V}{dhv_0}, \quad (1)$$

z ktorého po dosadení hodnôt získavame  $t = 64$  s. Vedro s objemom 50 litrov by sme teda museli naplňať 64 s.

Ak vodu nechceme považovať za ideálnu kvapalinu, ale práve naopak za kvapalinu s vnútorným trením, viskozitou a podobne, tak sa musíme zamyslieť nad tým, akým modelom chceme zjednodušiť pohyb reálnej kvapaliny.

Pri prúdení reálnej kvapaliny dochádza k tomu, že na molekuly najbližšie pri stene žlabu pôsobí najväčšia trecia sila a tieto molekuly takpovediac prilnú ku stene, čím vytvoria nehybnú medznú vrstvu. Každá ďalšia vrstva sa potom pohybuje rýchlejšie. Najrýchlejšie sa voda pohybuje práve pri hladine, na ktorú dopadol list, ktorého rýchlosť pohybu sme odmerali.

Uvažujme model, kedy sa rýchlosť pohybu molekúl vody mení s ich výškou od dna lineárne. V takom prípade potrebujeme vypočítať strednú rýchlosť pohybu molekúl vody, ktorou keď nahradíme rýchlosť všetkých vrstiev pohybujúcich sa rôznymi rýchlosťami, tak sa objemový prietok nezmení. Túto strednú rýchlosť  $v_s$  vypočítame ako priemer rýchlosti medznej ( $v_m = 0 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ ) a povrchovej vrstvy

$$v_s = \frac{v_m + v_0}{2} = \frac{v_0}{2}.$$

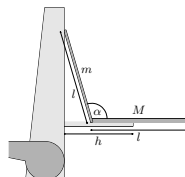
Keď túto strednú rýchlosť dosadíme namiesto pôvodnej rýchlosti  $v_0$  do rovnice (1), tak dostávame  $t_1 = 2t = 128$  s. Vedro by sme podľa tohto modelu naberali až 128 sekúnd. Vidíme, že na zvolení správneho modelu teda veľmi záleží.

**Dávid Brodňanský**  
david.brodnansky@fykos.cz

## Úloha II.2 ... nepohodlný autobus

3 body; průměr 2,22; řešilo 151 studentů

Jarda chtěl v autobuse sledovat na svém notebooku přednášku, a proto ho položil na výklopnou policičku sedadla před ním. Ta má hloubku  $h = 18$  cm a je kolmá ke svislému sedadlu. Jardův notebook, široký  $l = 25$  cm, se skládá ze spodní části o hmotnosti  $M = 1\,200$  g a z obrazovky o hmotnosti  $m = 650$  g. Obě části považujeme za homogenní. Na jaký největší úhel může notebook rozevřít, aby nespadl z policičky? *Jarda je workoholik.*



Aby se Jardovi jeho notebook nepřevážil, musí být jeho těžiště nad prostorem policičky. Nejzazší situace nastává tehdy, když těžiště leží přesně nad koncem policičky, tedy ve vzdálenosti  $h = 18$  cm od sedadla.

Chceme při tom, aby byl notebook co nejbližše sedačce. Obrazovka by se jí tak svou zadní částí měla dotýkat. Uvažujeme, že rovina obrazovky svírá s rovinou policičky tupý úhel  $\alpha$  (uvědomme si, že platí  $\cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha)$ , tedy že kosinus doplňkového úhlu má opačné znaménko). Pak vodorovná vzdálenost těžiště obrazovky od sedačky je  $x_m = -(l \cos \alpha)/2$ , kde  $l = 25$  cm je rozměr notebooku. Těžiště spodní části je ve vzdálenosti  $x_M = -l \cos \alpha + l/2$ . Celkové těžiště tak leží

$$x = \frac{x_m m + x_M M}{m + M} = \frac{-ml \cos \alpha - 2Ml \cos \alpha + Ml}{2(M + m)} = h$$

od sedačky, kde poslední rovnost jsme získali z úvahy výše.

Nyní již můžeme vyjádřit  $\alpha$  jako

$$\alpha = \arccos\left(\frac{Ml - 2(M + m)h}{ml + 2Ml}\right) = 120^\circ.$$

Maximální úhel otevření notebooku je po zaokrouhlení pouze  $120^\circ$ . Koukání se na přednášky v autobuse tak není příliš pohodlné, protože policička je poměrně nízko a pro Jardu tak není možné dosáhnout kolmého pohledu na obrazovku.

**Jaroslav Herman**  
jardah@fykos.cz

## Úloha II.3 ... jeřáb na voru

6 bodů; průměr 3,65; řešilo 65 studentů

Uprostřed řeky stojí na voru o zanedbatelné hmotnosti jeřáb a přemísťuje krabice stavebního materiálu o hmotnosti  $m$  z jednoho břehu na druhý. V jednom kroku jeřáb naloží materiál na jedné straně řeky, otočí se na druhou stranu, tam materiál vyloží a otočí se zpět. Určete nejmenší hodnotu úhlu, o který se může během jednoho kroku vor vychýlit oproti původní pozici. Jeřáb aproximujeme homogenním válcem o hmotnosti  $M_j$  a poloměru  $r$  a otáčecím ramenem tvaru tenké tyče o délce  $kr$ . Rychlost řeky i „tření“ mezi vorem a vodou zanedbejte.

*Vojta se vyučil inženýrem na YouTube.*

Při řešení úlohy vyjdeme ze zákona zachování momentu hybnosti. Pro moment hybnosti vzhledem k ose otáčení platí  $L = J\omega$ , kde  $J$  představuje moment setrvačnosti a  $\omega$  úhlovou rychlost otáčejícího se tělesa. Protože celkový moment hybnosti jeřábu na voru musí zůstat nulový, bude platit

$$J_j \omega_v - J_r \omega_r - m(kr)^2 \omega_r = 0$$

v první fázi pohybu a

$$J_j \omega_v - J_r \omega_r = 0$$

ve druhé fázi. V rovnicích výše představuje  $J_j = M_j r^2 / 2$  moment setrvačnosti vertikální válcové části jeřábu,  $J_r = M_r (kr)^2 / 3$  moment setrvačnosti ramena jeřábu o hmotnosti  $M_r$ ,  $\omega_v$  úhlovou rychlost otáčení voru a  $\omega_r$  úhlovou rychlost otáčení ramena jeřábu. Obě rovnice nyní přenásobíme časem potřebným k otočení ramene o  $180^\circ$ , dosadíme za momenty setrvačnosti a upravíme.

$$\varphi_{v1} = 2k^2 \varphi_r \frac{m + \frac{1}{3}M_r}{M_j},$$

$$\varphi_{v2} = 2k^2 \varphi_r \frac{\frac{1}{3}M_r}{M_j},$$

kde  $\varphi_r = \pi$  rad je úhel pootočení ramene jeřábu a  $\varphi_{v1}$ ,  $\varphi_{v2}$  jsou úhly, o které se v jednotlivých fázích pohybu pootočí vor. Menší úhel, o který se může vor pootočit, pak dostaneme odečtením těchto dvou hodnot – to nastane ve chvíli, kdy se bude jeřáb otáčet v jednotlivých fázích pohybu opačným směrem. Dostáváme tak

$$\Delta\varphi_v = 2k^2 \pi \frac{m}{M_j} \text{ rad.}$$

Všimněme si, že se ve výsledném vztahu nevyskytuje hmotnost ramene jeřábu. To si můžeme intuitivně vysvětlit tak, že se při otočení tam i zpět vychýlení způsobené jeho pohybem navzájem vyruší a vliv na výsledek budou mít jenom hmotnost nákladu a základny jeřábu.

*Vojtěch David*

vojtech.david@fykos.cz

## Úloha II.4 ... rovnoběžná srážka

6 bodů; průměr 2,59; řešilo 99 studentů

*Pták Fykosák sleduje, jak se kolem něj v jeho inerciální vztažné soustavě po rovnoběžných trajektoriích pohybují konstantními nerelativistickými rychlostmi dva hmotné body. Stejně jako on najdete odpověď na otázku, jestli se pro nějakého jiného inerciálního pozorovatele můžou tyto trajektorie protnout. Pokud ano, je možné, aby se dané hmotné body při správných počátečních podmínkách srazily v tomto průsečíku? Je to konzistentní s tím, že podle Fykosáka se pohybují paralelně?*

*Marek J. se rád sráží.*

Pohyb dvou hmotných bodů vieme popísať pomocou vektorov. Keďže sa jedná o rovnomerný priamočiary pohyb, tak celú informáciu nám dávajú ich rýchlosti, ktoré označme  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$ . Vo Fykosákovskej vzťažnej sústave sú rovnobežné a teda ich vektorový súčin je **nulový**. Transformovanie rýchlostí do iného inerciálneho systému sa redukuje na odčítanie rýchlosti tohto nového systému ( $\mathbf{v}_n$ ) od daných rýchlostí

$$\mathbf{v}_{1n} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_n,$$

$$\mathbf{v}_{2n} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_n.$$

A aby sa mohli pretnúť, musí platiť podmienka  $\mathbf{v}_{1n} \times \mathbf{v}_{2n} \neq \mathbf{0}$ , a teda

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_n) \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_n) \neq \mathbf{0},$$

čo vieme s využitím vlastností vektorového súčinu, podmienky  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$  a identity  $\mathbf{v}_n \times \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$  napísať ako

$$(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}. \quad (2)$$

Vzťah (2) platí pre všetky  $\mathbf{v}_n$ , ktoré nie sú paralelné s dráhami  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}_2$  za predpokladu, že  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ . V prípade rovnosti budú trajektórie rovnobežné vždy. Avšak pozor, podmienka daná rovnicou (2) je nutná, ale nie postačujúca (uvažujte pohyb hmotných bodov paralelne s osou  $x$  kartézského systému a transformáciu danú rýchlosťou len so zložkou  $z$ . V 3D totiž môžu byť trajektórie mimobežné). Stále však vidíme, že existuje nekonečne veľa pozorovateľov, pre ktorých sa dané trajektórie pretnú! (Na ukážku transformujme príklad spomenutý skôr, ale teraz s nulovou zložkou  $z$ . Potom ľubovoľná rýchlosť s nenulovými zložkami v  $x$ -ovom a  $y$ -ovom smere transformuje trajektórie na pretínajúce sa.)

Môžu sa však dané dva hmotné body aj reálne zraziť? To by vyžadovalo, aby ich vzájomná vzdialenosť bola v nejakom čase nulová. Popíšme trajektórie hmotných bodov matematicky. Ako počiatok súradnicovej sústavy zvolme polohu prvého hmotného bodu v (nejakom) čase  $t_0$ . Jeho trajektória ja potom daná ako  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{v}_1 t$ . Povedzme, že pták Fykosák ich videl v čase  $t_0$  vo vzájomnej vzdialenosti  $s$ . To znamená, že dráha druhého bodu je popísaná výrazom  $\mathbf{d}_2 = \mathbf{v}_2 t + s$ . Transformáciu do inej inerciálnej sústavy uskutočníme dosadením transformovaných rýchlostí  $\mathbf{v}_{1n}$  a  $\mathbf{v}_{2n}$ , ktoré sú vyjadrené vyššie. Pre zrážku musí teda platiť

$$\mathbf{d}_{1n} - \mathbf{d}_{2n} = \mathbf{0},$$

čím dostaneme

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) t = s,$$

čo platí iba ak je  $s$  rovnobežný s rýchlosťami vo Fykosákovej sústave. Inými slovami dané body idú po tej istej trajektórii a možné je len obehnutie (pre nejaké veľkosti ich rýchlostí). Pre rozdielne trajektórie zrážka hmotných bodov nie je možná ani v rôznych inerciálnych systémoch.

**Marek Jankola**  
marek@fykos.cz

**Úloha II.5 ... kouzelná magnetická tyčka** 10 bodů; průměr 2,62; řešilo 47 studentů

*Mějme tenký magnet uzavřený uprostřed tenké duté tyče o délce  $l$ . Materiál tyče je schopný magnetické pole odstiňovat. Těsně za konci tyče je tok magnetického pole roven  $\Phi$ . Vypočítejte velikost a směr magnetické indukce v rovině kolmé na tyč procházející jejím středem v závislosti na vzdálenosti  $r$  od tyče.*

*Adam vyrobil foukačku, aby mohl na přednáškách flusat magnety po spolužácích.*

Úloha vypadá na první pohled velmi komplikovaně. Ve skutečnosti si však problém můžeme přeformulovat tak, že výpočet nebude nijak náročný. Předně si uvědomíme, že problém je osově souměrný vzhledem k ose, která je zároveň podélnou osou symetrie tyče. Navíc skrz stěny tyče neteče žádný magnetický tok, protože materiál tyče magnetické pole odstiňuje a tyč je velmi tenká. Podíváme-li se tak na situaci vně tyče, bude se magnetické pole chovat tak, jako by v bodech na koncích tyče do prostoru „vstupoval“ magnetický tok  $\Phi$ , resp.  $-\Phi$  (znaménko odlišuje jednotlivé konce tyče). Tyč, a dokonce i magnet, nyní již nemusíme řešit. Protože tyč byla velmi tenká, můžeme magnetické toky  $\pm\Phi$  považovat za homogenní. Pro odlišení konců tyče budeme znaménko  $\pm$  používat i nadále.

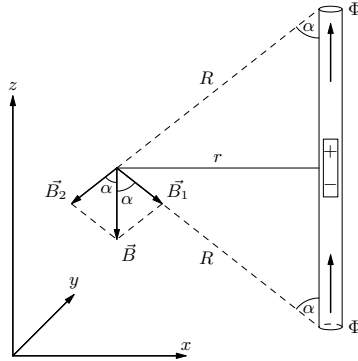
Na takto upravený problém pustíme velmi mocné nástroje nazvané Gaussova věta a princip superpozice. Pro magnetické pole nabývá Gaussův zákon v integrální podobě tvaru  $0 = \int_S B dS$ . Díky principu superpozice budeme počítat magnetické pole pro oba konce tyče zvlášť. Vezmeme velmi malou kulovou Gaussovskou plochu okolo jednoho konce tyče. Celkový tok touto plochou musí být nulový. Platí tedy

$$\Phi_{\pm} \mp \Phi = 0,$$

kde opačné znaménko u druhého členu je dáno tím, že magnetický tok  $\pm\Phi$  do Gaussovské plochy vstupuje. Protože je pole pro každý konec tyče středově souměrné, obsah, kterým protéká magnetický tok  $\pm\Phi$ , je velmi malý a magnetický tok se musí zachovávat, získáme vzorec

$$|B_1| = |B_2| = B_{\pm} = \frac{\Phi_{\pm}}{4\pi R^2} = \frac{\pm\Phi}{4\pi R^2}$$

určující magnetické pole v závislosti na poloměru Gaussovské plochy  $R$ . Magnetická indukce je na tuto Gaussovskou plochu v každém bodě kolmá.



Obr. 1: Nákres situace. Zde znaménko + na magnetu uvnitř tyče značí jeho severní pól, naopak – reprezentuje pól jižní.

Nyní se již jedná pouze o geometrii. S pomocí obrázku 1 vyjádříme  $R = (\sqrt{4r^2 + l^2})/2$  a  $\cos \alpha = l/\sqrt{4r^2 + l^2}$ . Magnetické intenzity ve směru os  $x$  a  $y$  se odečtou a zůstane pouze  $z$ -tová složka. Její velikost bude

$$B = (|B_1| + |B_2|) \cos \alpha = 2B_{\pm} \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\Phi l}{\pi (4r^2 + l^2)^{3/2}}.$$

Směr intenzity závisí na orientaci magnetu v tyči. Při natočení magnetu dle obrázku 1 bude intenzita mířit ve směru  $-z$ , při opačné orientaci magnetu by mířila ve směru  $+z$ .

K řešení ještě několik poznámek:

1. Trik, kdy celou úlohu spočítáme, aniž bychom řešili magnet nebo tyč, se může zdát docela random, na druhou stranu jedinou známou veličinou charakterizující magnetické pole je tok na koncích tyče. O magnetu nic nevíme.
2. Není možné, aby oba magnetické toky  $\pm\Phi$  do tyče vstupovaly nebo z ní vystupovaly. Nebyl by poté splněn třetí Maxwellův zákon.



3. Problém si můžeme představit jako dva magnetické monopóly, položit  $Q = \Phi\epsilon$  a řešit vše pomocí rovnic pro elektrostatické pole. Matematicky je to ekvivalentní řešení výše, fyzikálně to ale není správné, protože magnetické monopóly neexistují.

*Adam Mendl*

adam.mendl@fykos.cz

## Úloha II.P ... planetární atmosféra

10 bodů; průměr 3,78; řešilo 89 studentů

*Jaké parametry musí mít planeta, aby si udržela atmosféru srovnatelnou se Zemí? Jaké podmínky jsou nutné, aby takovou atmosféru získala?*

*Karel si vzpomněl na úlohu.*

Za existenciu zemskej atmosféry vďačíme rôznym fyzikálnym procesom. Ďalšie sú zodpovedné za jej ochranu. Ako však vidíme, okrem fyzikálnych procesov sú dôležité aj tie chemické a biologické. Pred začiatkom diskusie o týchto procesoch si však musíme ujasniť náš pohľad na interpretáciu otázky zo zadania – čo znamená, že atmosféra planéty je porovnateľná s atmosférou Zeme? Uvažujme, že nás zaujíma možnosť obývateľnosti takéhoto telesa, teda chceme planétu s atmosférou s nasledovnými vlastnosťami:

- atmosférický tlak okolo  $p_a \approx 100$  kPa,
- rovnovážna povrchová teplota  $T \approx 300$  K,
- chemické zloženie s obsahom dusíka a kyslíka – v prvom priblížení dané strednou molekulovou hmotnosťou okolo  $M_m \approx 15$  g·mol<sup>-1</sup>.

Tieto podmienky zaručia, že aj navonok bude mať atmosféra podobnú hrúbku.

## Tepelná evaporácia

Prvým procesom, na ktorý sa pozrieme je tepelný pohyb častíc. Rýchlosť častíc hmotnosti  $m$  v termodynamickej rovnováhe pri teplote  $T$  je daná Maxwelowym rozdelením rýchlostí

$$f(v) = \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{kT}},$$

ktoré vyjadruje, aký zlomok častíc sa pohybuje rýchlosťou  $v$ , presnejšie pre malý interval rýchlostí šírky  $dv$  máme časť  $dn = f(v) dv$  častíc. Charakteristickým znakom tohto rozdelenia je, že aj pre ľubovoľne veľké rýchlosti nájdeme nejaké častice, ktoré ich dosahujú. Ak má častica rýchlosť väčšiu ako únikovú rýchlosť z povrchu a na jej ceste sa s nijakou inou nezrazí, z atmosféry nenávratne unikne. Pre únikovú rýchlosť platí

$$v_u = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

kde  $M$  je hmotnosť planéty,  $R$  je jej polomer a  $G$  je gravitačná konštanta. Majme atmosféru hmotnosti  $M_{\text{atm}}$ , ktorá má pri povrchu tlak  $p$  a teplotu  $T$ , ktorá je v nej pomerne nemená s výškou. Charakteristickú výšku  $H$  takejto atmosféry môžeme odhadnúť zo vzťahu pre hydrostatický tlak a stavovej rovnice pre ideálny plyn

$$p = \rho H g = H \frac{p M_m}{R_g T} \frac{GM}{R^2}, \quad H = \frac{R^2}{GM} \frac{R_g T}{M_m},$$

kde  $R_g$  je molárna plynová konštanta a  $M_m$  stredná molárna hmotnosť plynu. Ak sa teda pozerať na vrstvu atmosféry, kde začínajú byť častice dostatočne riedke, máme pre hmotnostný odtok častíc

$$\frac{\Delta M_{\text{atm}}}{\Delta t} \approx M_{\text{atm}} n(v > v_u) \frac{v}{H} \approx M_{\text{atm}} \frac{v}{H} \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_{v_u}^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{kT}},$$

Nás zaujímajú hlavne veľmi rýchle častice, pre Zem je totiž bežná rýchlosť častice atmosféry niekoľko stoviek  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , zatiaľ čo úniková rýchlosť je okolo desať  $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ , t.j.  $mv_u^2 \gg kT$ . Navyše v tomto prípade dominuje exponenciálny útlm, môžeme teda odhadnúť  $v^2$  pred exponenciálou ako  $vv_u$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta M_{\text{atm}}}{\Delta t} &\approx M_{\text{atm}} n(v > v_u) \frac{v}{H} \approx \\ &\approx \frac{M_{\text{atm}} v_u}{H} \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_{v_u}^{\infty} v v_u e^{-\frac{mv^2}{kT}} \approx \\ &\approx \frac{M_{\text{atm}} v_u}{H} \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{\frac{3}{2}} 2\pi v_u \frac{k T}{m} e^{-\frac{mv_u^2}{kT}}. \end{aligned}$$

Z tohto vzťahu vidíme, že ľahké častice z atmosféry unikajú ako prvé. Predstavme si, že uvažujeme stav atmosféry po uplynutí času na škále niekoľko miliárd rokov  $\Delta t = 10^{17}$  s. Za tento čas chceme udržať atmosféru z dusíka, ale chceme sa zbaviť celej atmosféry z vodíku a hélia. Preto dosadíme do predošlého vzťahu  $\Delta M_{\text{atm}} = M_{\text{atm}}$  a  $m \approx 10m_u$ , kde  $m_u$  je atómová hmotnostná jednotka

$$\frac{v_u^2}{H} \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_u^2}{kT}} = \frac{1}{\Delta t} \approx 10^{-17} \text{ s}^{-1}.$$

Výrazu opäť dominuje člen s exponenciálou, preto dosadíme do členov pred ňou hodnoty pre Zem ako vhodný rádivý odhad. Takto dostaneme hodnotu asi  $3\text{s}^{-1}$ . Potrebujeme teda, aby exponenciála dosahovala  $10^{-17}$  a argument exponenciály asi  $-18 \cdot \ln 10 \approx -39$ . Ak chceme rozumnú povrchovú teplotu (300 K) dostaneme hodnotu pre únikovú rýchlosť  $v_u = \sqrt{40kT/m} \approx 3,1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ , pričom ide o odhad minimálnej hodnoty únikovej rýchlosti potrebnej na zachovanie atmosféry s obsahom ťažších prvkov. Vidíme, že Zem, Mars a Venuša toto spĺňajú, ale Mesiac už nie. Ak za hmotnosť dosadíme zo vzťahu pre hustotu (pre  $\rho = 5 \text{ g}/\text{cm}^3$ ) dostaneme podmienku pre minimálny polomer

$$R > \frac{v_u}{\sqrt{\frac{8G\rho\pi}{3}}} \approx 1900 \text{ km}.$$

Dodajme ďalej, že na udržateľnosť atmosféry môže mať vplyv aj rýchla rotácia telesa – pri rotačnej perióde 1 hodina by Zem na rovníku rotovala únikovou rýchlosťou. Ďalším možným vplyvom je gravitačné pôsobenie ďalšieho telesa, či už pri náhodnom blízkom priblížení, kedy sa atmosféra môže „preliať“ medzi telesami a aj do okolitého priestoru, či slapovým pôsobením v prípade satelitu, resp. naopak pre satelit pôsobenie materskej planéty.

## Vplyv hviezd

Pre zachovanie príjemnej teploty na povrchu je nutné nachádzať sa v správnej vzdialenosti od materskej hviezd v tzv. obývateľnej zóne. Tejto otázke sa nebudeme úplne venovať, odkazujeme však na<sup>1</sup>. Zamerajme sa však na nepriaznivé vplyvy, ktorými na atmosféru hviezda pôsobí. Jedným z nich je fotodisociácia molekúl. V atmosfére dokážu dosť energetické (spravidla ultrafialové) fotóny rozštiepiť molekuly na atómy, z ktorých sú zložené. Toto zníži hmotnosť častíc a uvoľní množstvo energie, a teda spôsobí, že ich rýchlosti v rovnováhe budú vyššie a jednoduchšie uniknú z gravitačného poľa Zeme.

Oveľa nebezpečnejšie sú však najenergetickejšie častice, ktoré na planétu od hviezd prúdia – častice hviezdneho vetra. Tieto častice, prevažne protóny, prúdia k Zemi bežne rýchlosťami okolo  $300 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . Ak by sa tieto častice dostali k časticiam v atmosfére, zrážkami by ich urýchlili na nadúnikové rýchlosti. Toto je proces, pomocou ktorého prišiel o atmosféru napríklad Mars. Zabrániť tejto erózii musí prítomnosť magnetického poľa planéty. Odhad potrebnej veľkosti magnetického poľa môžeme dostať zo vzťahu pre pohyb nabitých častíc v magnetickom poli. Protóny sa v zemskom magnetickom poli budú pohybovať po špirálových trajektóriách (šrubovniciach) navinutých na siločiar magnetického poľa, pričom polomer špirál je daný známym vzťahom pre Larmorov polomer. Upravíme ho do tvaru pre veľkosť magnetickej indukcie

$$B = \frac{mv}{qR_L} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ T},$$

kde sme za  $R_L$  dosadili pomerne arbitrárnu hodnotu desať polomerov Zeme – rozsah zemkej magnetosféry v smere k Slnku, v ktorom chceme, aby sa častica stihla „otočiť“. Jedná sa teda len o veľmi hrubý odhad minimálnej potrebnej hodnoty. Pre presnejší popis by sme museli uvažovať vplyv tlaku nabitých častíc na magnetické pole, čo je nad rámec tejto úlohy. Výsledkom takého pohľadu, keď porovnáme hustotu energie častíc a hustotu energie magnetického poľa je tzv. Chapmanova–Ferrarova vzdialenosť<sup>2</sup>

$$R_{C-F} = R \left( \frac{B^2}{\mu_0 \rho v^2} \right)^{\frac{1}{6}},$$

kde požadujeme, aby  $R_{C-F} > R$  aj pri zásahoch výronmi hmoty z hviezd.<sup>3</sup> Dostávame teda podmienku  $B > \sqrt{(\mu_0 \rho v^2)} \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ T}$ , čo je o štyri rády silnejšie pole ako v prvom prípade (v predchádzajúcom prípade sme uvažovali pole homogénne, to však smerom od povrchu klesá s tretou mocninou vzdialenosti), no stále o vyše dva rády slabšie ako zemské pole. Silná magnetosféra však dokáže zabrániť aj „odfúknutiu“ atmosféry po erupcii hmoty z povrchu hviezd. Vysokoenergetické častice sa následne zachytia na špirálových trajektóriách pozdĺž magnetických siločiar. Niektoré z týchto častíc sa dokážu dostať do atmosféry, kde spôsobujú napr. polárnu žiaru alebo vo väčších vzdialenostiach od Zeme tzv. Van Allenove radiačné pásy. Z polárnych oblastí však môžu častice predať len uniknúť, keďže tu sú siločiar najmä smerom k Zemi otvorené. Tento jav sa nazýva polárny vietor alebo plazmová fontána.

<sup>1</sup><https://www.astro.princeton.edu/~strauss/FRS113/writeup3/>, [https://en.wikipedia.org/wiki/Circumstellar\\_habitable\\_zone](https://en.wikipedia.org/wiki/Circumstellar_habitable_zone)

<sup>2</sup>[http://sun.stanford.edu/~sasha/PHYS780/SOLAR\\_PHYSICS/L23/Lecture\\_23\\_PHYS780.pdf](http://sun.stanford.edu/~sasha/PHYS780/SOLAR_PHYSICS/L23/Lecture_23_PHYS780.pdf)

<sup>3</sup> $\rho$ ,  $v$  sú parametre plazmy nalietajúcej na magnetické pole, pre Zem dosahujú maximálne asi  $1000 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$  a  $m_p \cdot 100 \text{ cm}^{-3}$ . Aktuálne hodnoty si môžete pozrieť napríklad na <https://www.swpc.noaa.gov/products/real-time-solar-wind>

## Magnetické dynamo

Naša planéta teda potrebuje toto pole nejak vygenerovať. Pri vzniku veľkých telies dochádza k pretaveniu pri zárodočných zrážkach a následnom nabalovaní hmoty pri bombardovaní menšími telesami. Magnetické pole planéty teda nemôže byť polom trvalých magnetov – materiál sa určite nachádzal nad jeho Curieho teplotou – ale musí vzniknúť procesom magnetického dynamo v tekutom vodivom jadre planéty. Pre planéty podobné Zemi jadro tvoria roztavené kovy ako nikel a železo. Planéta si toto jadro musí udržať tekuté po dostatočne dlhý čas (po stuhnutí jadra dôjde k strate atmosféry už pomerne rýchlo, tak ako v prípade Marsu), čo opäť kladie podmienky na veľkosť planéty. Tepelná kapacita totiž rastie ako tretia mocnina polomeru, zatiaľ čo energia vedená k povrchu a vyžarovaná povrchom rastú s druhou mocninou. Ak využijeme rovnicu vedenia tepla dostaneme

$$Mc \frac{\Delta T}{\Delta t} \approx -k \frac{T}{R} 4\pi R^2,$$

kde  $c$  je merná tepelná kapacita,  $k$  tepelná vodivosť a  $T$  teplota planéty. Ak predpokladáme exponenciálne chladnutie podľa  $T = T_0 \exp(-t/\tau)$  máme

$$\tau = \frac{Mc}{k4\pi R} \approx \frac{c\rho R^2}{3k}.$$

Ak by sme dosadili hodnoty pre železo, dostaneme pre  $\tau = 10^9$  rokov polomer  $R = 1\,500$  km. Jedná sa, samozrejme, o hrubý odhad, keďže sa toto teplo musí ešte dostať k povrchu cez menej vodivé silikátové vrstvy (zemská kôra) a vyžiariť z povrchu, na ktorý navyše teplo dodáva Slnko. Ďalším procesom, ktorý dokáže udržať vnútro planéty tekuté je slapové pôsobenie, ako v prípade Merkúru (pôsobenie Slnka), či Io (mesiac Jupitera).

## Vznik atmosféry

Pre pochopenie vzniku atmosfér planét, ako aj tej zemskej, si musíme najprv priblížiť vznik planét samotných. Planéty vznikajú z plynoprachového akréčneho disku, ktorý tvorí pozostatok po vzniku centrálnej hviezdy. V závislosti od vzdialenosti od hviezdy z plynu postupne kondenzujú čiastočky – v smere od hviezdy najprv kovy, neskôr silikáty, vodný ľad a vo veľkej vzdialenosti aj ľad metánu, či amoniaku. Tieto častice sa následne zrážkami naakumulovali do tzv. planetizimál veľkosti asteroidov. Tieto sa ďalej zrážali a aj s pomocou vlastnej gravitácie tvorili protoplanéty. Tu nastáva pre nás dôležitý okamih – ak takáto planetezimála získala hmotnosť väčšiu ako asi desať hmotností Zeme, získala schopnosť na seba nabalovať plyn z okolitej hmloviny vlastnou gravitáciou, čo jej hmotnosť ďalej zvýšilo. Týmto procesom vznikli atmosféry plyných planét, ktoré tvoria väčšinu ich hmotnosti.<sup>4</sup> Ak chceme získať Zemi podobnú atmosféru, musí mať teda naša protoplanéta polomer asi do

$$R < R_z \left( \frac{10M_z}{M_z} \right)^{1/3} \approx 14\,000 \text{ km},$$

ak predpokladáme, že hustoty oboch telies sú rovnaké. Pre vývoj (proto)planét je dôležitá aj ich migrácia v sústave po ich vzniku. Vzájomným gravitačným pôsobením viacerých planét sa

<sup>4</sup>Pre záujemcov je tento proces popísaný vo vedeckých článkoch <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0019103586901223>, či <https://academic.oup.com/mnras/article/405/2/1227/1184435>.

môžu výsledné orbity výrazne líšiť od tých, na ktorých planéty vznikli, niektoré planéty môžu dokonca spadnúť na materskú hviezdu alebo úplne uniknúť zo sústavy.

Vývoj atmosféry zemského typu tak obvykle začína na telese roztavenom zrážkami, ktorého prvotnú atmosféru tvoria roztavené minerály a sopečné plyny ako metán. Neskoršími zrážkami s menšími telesami, však na Zem zo vzdialenejších končín prišla voda, ktorá ako vodná para prispela do zloženia atmosféry. Postupným chladnutím povrch stuhne a neskôr sa z atmosféry môže vyzrážať vodný oceán. Aj vplyvom vulkanickej činnosti je táto „druhá“ atmosféra zložená z oxidu uhličitého a dusíku, ako napríklad na Venuši. Časť oxidu uhličitého sa dokáže rozpustiť v oceánoch a následne uložiť v uhličitanoch, a teda sa eliminovať z atmosféry. Pre zemskú atmosféru však bol významný iný jav, ktorý má od astronómie, či geofyziky pomerne ďaleko – vznik života. Prvé fotosyntetizujúce organizmy – cyanobaktérie – dokázali z oxidu uhličitého vyrobiť kyslík, ktorým obohatili atmosféru. Kyslík môže vzniknúť aj vysoko v atmosfére fotodisociáciou vodnej pary, no tento proces je príliš pomalý v porovnaní s kyslíkom potrebným na oxidáciu minerálov na povrchu. Týmto prvým organizmom teda vďačíme za dnešnú podobu zemskej atmosféry, v ktorej dokážeme žiť aj my – ľudia.

## Zhrnutie

Planéta musí byť dost veľká na to, aby si atmosféru udržala. V dôsledku tepelného pohybu molekúl telesá s polomerom menším ako niekoľko málo tisíc kilometrov o atmosféru na škálach miliárd rokov prídu. Ďalej je potrebné, aby takáto planéta disponovala magnetickým poľom tieniacim tok častíc od materskej hviezdy. Nakoniec planéta nemôže byť príliš veľká, inak by počas vzniku začala nabaľovať plyn z okolitej hmloviny a premenila sa na plynného obra. Pre polomer planéty tak máme odhad  $1\,500\text{ km} < R < 14\,000\text{ km}$ . Ak sa zaujímate o atmosféru s obsahom kyslíka, na planéte by sa navyše musel vyvinúť život.

**Jozef Lipták**  
liptak.j@fykos.cz

## Úloha II.E ... reproduktor

12 bodů; průměr 9,05; řešilo 73 studentů

*Naměřte závislost hladiny intenzity zvuku vydávaného vašim reproduktorem/mobilem/počítačem na vzdálenosti od zdroje. Určete také závislost hladiny intenzity na nastavení výstupní hlasitosti (tzv. volume). Nezapomeňte data fitovat. Jarda toho v zadní lavici už moc neslyší.*

### Úvod a teoretický základ

Hladina intenzity zvuku je zřejmě nejznámější akustická veličina. Její jednotkou je decibel dB. Už její dlouhý název nám napovídá, že tato veličina není na pochopení tak jednoduchá jako například hmotnost nebo délka (aspoň v klasické fyzice). Je definována jako

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0},$$

kde  $I$  je intenzita zvuku v měřeném místě,  $I_0 = 10^{-12}\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$  je intenzita prahu slyšení a číslo 10 se zde objevuje proto, že základní jednotkou je decibel, a ne jenom bel. Intenzita zvuku  $I$  je zase podíl akustického výkonu  $P$  a plochy  $S$ , kterou prochází. Intenzita a hladina intenzity tak jdou pomocí tohoto vztahu určit jedna ze druhé.

Hladina intenzity zvuku je tedy bezrozměrná veličina. Navíc se chová logaritmicky - zvětšíme-li intenzitu zvuku na dvojnásobek (například přidáním stejně hlučného zdroje), zvýší se  $L$  přibližně o 3 dB. Logaritmické měřítko je zvoleno kvůli tomu, že lidské ucho vnímá intenzitu logaritmicky a navíc dokáže fungovat v rozmezí asi 12 řádů, takže je to vhodné třeba i kvůli zakreslování hluku do grafu.

Promyslíme si rovnou, jak se bude chovat závislost hladiny intenzity zvuku na vzdálenosti od bodového zdroje. Bodový zdroj je takový zdroj, že můžeme zanedbat jeho rozměry vůči vzdálenosti od něj. Předpokládejme, že z něj vychází nějaký výkon  $\Delta P$  do prostorového úhlu  $\Delta\Omega$ . Plocha, kterou tento prostorový úhel vytíná na kouli o poloměru  $r$  se středem ve zdroji, je  $\Delta S = \Delta\Omega r^2$ . Intenzita ve vzdálenosti  $r$  tak je

$$I = \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{\Delta P}{\Delta\Omega} \frac{1}{r^2}.$$

Intenzita tedy ne příliš překvapivě klesá se druhou mocninou vzdálenosti. Hladina intenzity zvuku se pak bude měnit jako

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{\Delta P}{I_0 \Delta\Omega} \frac{1}{r^2} = 10 \cdot \left( \log \frac{\Delta P}{I_0 \Delta\Omega} - 2 \log r \right),$$

z toho vyplývá, že klesá jako konstanta minus logaritmus vzdálenosti. Pokud si ale na osu  $x$  vyneseme vzdálenost v logaritmické škále (tedy místo  $r$  budeme vynášet  $\log r$ ), měli bychom dostat lineární závislost s koeficientem  $-20$ . Musíme ovšem poznamenat, že zápis ve tvaru  $\log r$  není fyzikálně zcela správně a logaritmus v předchozí rovnici bychom neměli rozdělovat na rozdíl dvou logaritmů. Pro grafickou názornost je ovšem lepší poslední zápis, díky kterému budeme moci vynést datové body do přímky a určit její sklon.

Měření budeme provádět pomocí hlukoměru. Pokud nemáme k dispozici nějaký profesionálnější přístroj, stáhneme si na mobil aplikaci, která toto měření umožňuje.

### Naměřené hodnoty a zpracování výsledků

Pro měření závislosti hladiny intenzity zvuku na vzdálenosti použijeme malý reproduktor, který by mohl reprezentovat bodový zdroj zvuku. Měření provádíme v běžné místnosti, nedokážeme proto zcela zamezit odrazům zvuku od stěn a nábytku. Generujeme zvuk o stálé frekvenci 440 Hz. Pro samotné měření používáme aplikaci *Zvukoměr* instalovanou na mobilní telefon.<sup>6</sup>

Naměřenou závislosti zobrazíme v grafu 2.

Jak jsme zmínili v teoretickém úvodu, vyneseme ještě vodorovnou osu v logaritmické škále v grafu 3.

Datové body v grafu jsme rovnou proložili přímkou.<sup>7</sup> Program sám určí takovou přímku, která nejlépe odpovídá zobrazeným bodům. V našem případě je to po zaokrouhlení koeficientů na počet platných cifer určených odchylkou

$$y = -(17 \pm 1)x + (101 \pm 3).$$

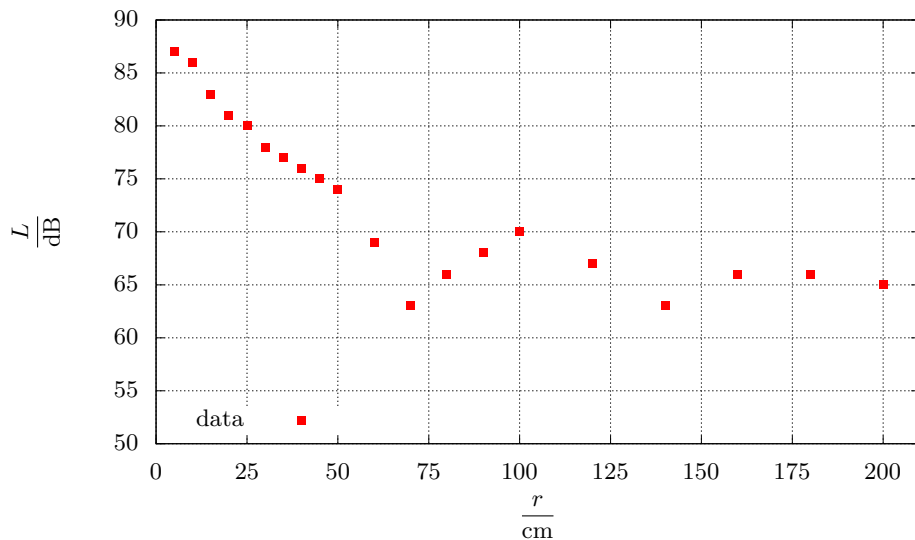
<sup>5</sup>Pokud by byl prostorový úhel roven  $4\pi$ , tak dostáváme plochu povrchu celé koule

<sup>6</sup>Lze samozřejmě použít i jiné aplikace, např. známou aplikaci *Phyphox*

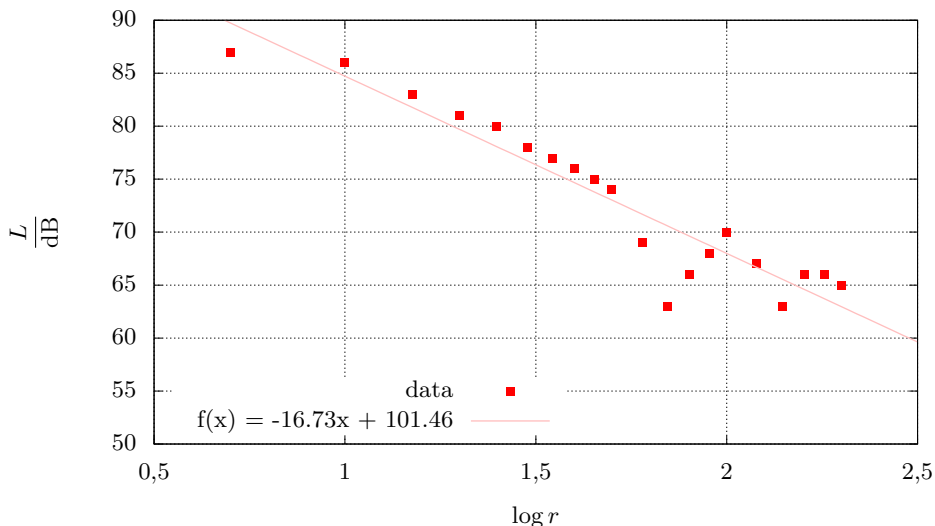
<sup>7</sup>Například v programu *Excel* funkce *spojnice trendu - lineární*. Přesnou rovnici proloženou přímkou získáme, pokud zaklikneme její zobrazení do grafu.

Tab. 1: Závislost hladiny intenzity zvuku na vzdálenosti od zdroje.

$\frac{r}{\text{cm}}$	$\frac{L}{\text{dB}}$	$\frac{r}{\text{cm}}$	$\frac{L}{\text{dB}}$
5	87	60	69
10	86	70	63
15	83	80	66
20	81	90	68
25	80	100	70
30	78	120	67
35	77	140	62
40	76	160	66
45	75	180	66
50	74	200	65



Obr. 2: Závislost hladiny intenzity zvuku na vzdálenosti od zdroje.



Obr. 3: Závislost hladiny intenzity zvuku na logaritmu vzdálenosti od zdroje.

Chybu určení koeficientů nám ukáže program, ve kterém jsme koeficienty hledali<sup>8</sup>. Zde však hodnoty chyb uvádíme zejména proto, abychom mohli diskutovat přesnost určení koeficientů. Podle předchozí rovnice určuje koeficient před  $x$  rychlost klesání intenzity zvuku. Pro bodový zdroj zvuku klesá intenzita jako  $r^{-2}$ , pro lineární jako  $r^{-1}$ . V našem případě dostáváme  $r^{-1,7}$ , tedy blíže k bodovému zdroji, jak bychom předpokládali.

Dále jsme naměřili závislost hladiny intenzity zvuku na nastavení výstupní hlasitosti, tedy na tzv. volume. Tento parametr budeme v našem řešení značit  $v$ . Měřili jsme ve dvou vzdálenostech v rozmezí 0 až 100 jednotek (označíme  $j$ ). Jako zdroj zvuku jsme použili laptop.

Naměřené hodnoty zobrazíme v grafu 4. Rovnou do něj přidáme i polynomy, kterými dané funkce aproximujeme. Proč budeme body prokládat právě "náhodnými" polynomy? Naměřili jsme jen několik datových bodů. Kdyby nás ale zpětně zajímalo, jaká by byla hladina intenzity zvuku například při volume  $v = 50$   $j$ , stačí dosadit do našeho polynomu a dostáváme poměrně přesnou hodnotu. Navíc nemáme žádný teoretický základ pro proložení závislosti něčím jiným.

Závislost jsme proložili polynomem pátého stupně, protože máme poměrně hodně dat a nižší stupně polynomů by nebyly dostatečně přesné pro malé nebo velké hodnoty  $v$ . Pro závislost v  $D = 15$  cm je rovnice polynomu

$$y = 1,2 \cdot 10^{-8} x^5 - 3,8 \cdot 10^{-6} x^4 + 4,6 \cdot 10^{-4} x^3 + 3,1 \cdot 10^{-2} x^2 + 1,5x + 36,$$

zatímco pro  $D = 50$  cm pak

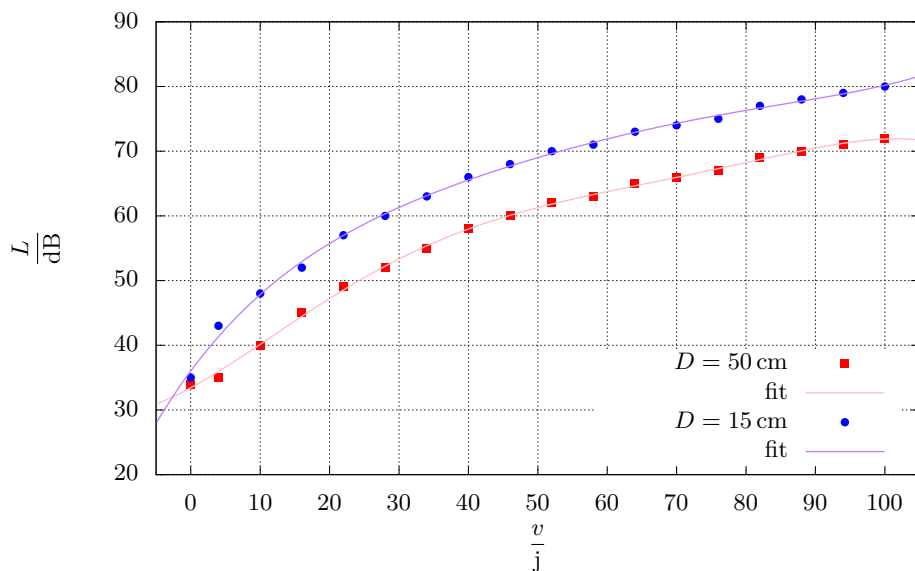
$$y = -2,3 \cdot 10^{-8} x^5 + 5,9 \cdot 10^{-6} x^4 - 5,3 \cdot 10^{-4} x^3 + 1,4 \cdot 10^{-2} x^2 + 5,8 \cdot 10^{-1} x + 33.$$

<sup>8</sup>V našem případě *Gnuplot*. V Excelu bohužel není snadné tento údaj dohledat.



Tab. 2: Závislost hladiny intenzity zvuku na volume. Index u  $L$  určuje vzdálenost  $D$  od zdroje v centimetrech.

$\frac{v}{j}$	$L_{15}$ dB	$L_{50}$ dB
0	35	34
4	40	35
10	48	40
16	52	45
22	57	49
28	60	52
34	63	55
40	66	58
46	68	60
52	70	62
58	71	63
64	73	65
70	74	66
76	75	67
82	77	69
88	78	70
94	79	71
100	80	72



Obr. 4: Závislost hladiny intenzity zvuku na volume.

*Diskuze*

V teoretickém úvodu jsme se zamýšleli nad chováním hladiny intenzity zvuku v různých vzdálenostech od bodového zdroje. Odvodili jsme, že intenzita klesá s druhou mocninou vzdálenosti. Pokud tedy vyneseme hladinu intenzity v decibelech na svislou osu, a na vodorovnou vzdálenost v logaritmu, dostaneme přímkou se sklonem  $10 \cdot (-2) = -20$  (10 kvůli tomu, že pracujeme v desetinných belu, a  $-2$  je mocnina vzdálenosti). V našem případě jsme naměřili sklon  $-17 \pm 1$ , intenzita zvuku tedy klesá se vzdáleností jako  $r^{-(1,7 \pm 0,1)}$ . Protože je toto číslo menší než u bodového zdroje, je zřejmé, že nemůžeme zanedbat rozměry reproduktoru. Relativní chyba určení tohoto exponentu je přibližně 6 procent, můžeme tedy tvrdit, že data odpovídají lineární závislosti a určení koeficientu je poměrně přesné.

Výsledek může být nepřesný z několika důvodů. Měření jsme prováděli pouze pomocí aplikace na mobilním telefonu, u které nemáme jistotu, že naměří stejné hodnoty jako profesionální zkalibrovaný přístroj. Lepších výsledků bychom mohli dosáhnout po kalibraci aplikace, jak je to u aplikace *Phyphox*. Zároveň použitá aplikace neuvádí nepřesnost měření, nemůžeme tak stanovit chybu měření.

Měření probíhalo v běžné místnosti. V důsledku přítomnosti stěn a podlahy mohlo docházet k odrazům zvuku, a tedy k ovlivnění výsledku.<sup>9</sup> Na druhou stranu byla místnost vybavená klasickým nábytkem a kobercem, část zvuku tak byla pohlcena a ne odražena směrem k měřicímu telefonu.

Co je ale z pohledu na graf naprosto zřejmé, jsou dvě místa, kde dochází k výraznému snížení intenzity oproti zbytku závislosti. Jejich poloha (přibližně 70 cm a 140 cm) není náhodná, podezřele se blíží k násobkům vlnové délky měřeného zvuku, která je

$$\lambda = n \frac{c}{f}, \quad (3)$$

kde  $c \doteq 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  je rychlost šíření zvuku a  $f = 440 \text{ Hz}$  je použitá frekvence. Pro tyto hodnoty vychází 77 cm a 154 cm, což přibližně odpovídá zmíněným bodům. V důsledku experimentálního uspořádání tak dochází k destruktivní interferenci. O správnosti této teorie bychom se mohli přesvědčit, kdybychom polohy bodů, kde se intenzita výrazně snižuje, naměřili i pro jiné frekvence. Ukázalo by se, že tato závislost se řídí přibližně rovnicí (3).

Při měření hladiny intenzity v závislosti na volume si můžeme všimnout, že graf neroste lineárně. Při nižších hodnotách je nárůst strmější, při vyšších pomalejší. Jestliže si tedy zvyšujeme hlasitost, čím výše jsme, tím méně je to efektivní. Naměřená závislost však patrně závisí na konkrétním přístroji a softwaru.

*Závěr*

Naměřili jsme závislost hladiny intenzity zvuku na vzdálenosti od zdroje a vynesli ji do grafu. Zjistili jsme, že intenzita zvuku klesá se vzdáleností přibližně jako  $r^{-(1,7 \pm 0,1)}$ . Reprodukter se tak chová přibližně jako bodový zdroj.

Závislost hladiny intenzity zvuku jsme naměřili ve dvou vzdálenostech. V každé z obou vzdáleností od zdroje (laptopu) jsme určili polynom pátého stupně, který danou vzdálenost

<sup>9</sup>Můžeme si to představit, jako když vedle zrcadla postavíme lampičku - taky ji vidíme dvakrát a jde k nám více světla

dobře popisoval. Je zřejmé, že hladina intenzity zvuku neroste s volume lineárně, ale pro jeho větší hodnoty roste pomaleji než pro menší.

**Jaroslav Herman**  
jardah@fykos.cz

## Úloha II.S ... počítáme kvanta

10 bodů; průměr 7,44; řešilo 61 studentů

1. Najděte si molekulu betakarotenu a zkuste spočítat, jakou by měla mít barvu, respektive na jaké vlnové délce absorbuje. Použijte jednoduchý model nekonečné potenciálové jámy, ve které jsou „uvězněny“  $\pi$  elektrony z dvojných vazeb, tedy za každou dvojnou vazbu dva elektrony. Absorpce pak odpovídá takovému přechodu, že elektron přeskočí z nejvyšší obsazené hladiny na první neobsazenou. Srovnajte s experimentální hodnotou. Proč hodnota z našeho modelu nevychází tak, jak bychom chtěli? (5b)
2. Zkusme zlepšit náš model. Při studiu některých látek, především kovů či polovodičů, zavádíme efektivní hmotnost elektronu. Místo toho, abychom složitě popisovali prostředí, ve kterém se elektrony pohybují, se tváříme, že elektrony jsou lehčí nebo těžší než ve skutečnosti. Jakou by musely mít hmotnost, aby nám vyšla správná experimentální hodnota? Uvedte ji v násobcích hmotnosti elektronu. (2b)
3. Pokud vyrobíme mikroskopické kuličky (nanočástice) selenidu kadmnatého (CdSe) o velikosti 2,34 nm. Rozzáří se po ozáření UV světlem jasně zelenou barvou na vlnové délce 536 nm. Když je zvětšíme na velikost 2,52 nm, posune se vlnová délka vyzařovaného světla do žluté oblasti s vlnovou délkou 570 nm. Jakou velikost kuliček bychom potřebovali, aby vyzařovaly oranžově na vlnové délce 590 nm? (3b)  
*Nápověda* CdSe je polovodič, má tedy plně obsazený elektronový pás, pak (úzký!) zakázaný pás a nakonec prázdný vodivostní pás. Tedy musíme uvažovat, že vyzařovaný foton odpovídá přeskoku z vodivostního pásu, kde jsou zase stavy známé z nekonečné potenciálové jámy, do obsazeného pásu. Všechny energie vyzařovaných fotonů tedy budou posunuty o neznámou konstantní hodnotu odpovídající šířce zakázaného pásu.

*Bonus* Nakonec pro ty, které by mrzelo, kdyby si nezaintegrovali – 1s orbital atomu vodíku má sféricky symetrickou vlnovou funkci s radiálním průběhem  $\psi(r) = \frac{e^{-r/a_0}}{\sqrt{\pi a_0^3}}$ , kde  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$  je

Bohrův poloměr. Protože orbitály jakožto funkce tří prostorových proměnných by se nám špatně vykreslovaly, raději zobrazujeme oblast, ve které se bude elektron s velkou pravděpodobností vyskytovat. Jaký je poloměr sféry centrované na jádře, ve které se elektron bude vyskytovat s pravděpodobností 95 %? (+2b) *Předčasná Mikulášská nadílka.*

Pokud se podíváme na vzorec pro energii hladin v nekonečné potenciálové jámě, jediné parametry, které nejsou fundamentální konstanty, jsou hmotnost částice a šířka jámy. Protože pracujeme s elektrony, máme hmotnost částice danou a stačí určit velikost jámy. Vzhledem k tomu, že v uhlovodících nejsou vazby v jedné linii, ale „cickak“, nabízí se otázka, jak máme vzdálenost vlastně počítat a jestli i elektrony běhají rovně nebo cickak. Protože ale máme už tak hrubou aproximaci, nemusíme si tolik lámat hlavu s přesností. (Napadla mě formulace „přesnost na milimetry“, ale ta v tomto kontextu není ideální.) Proto jako první nástřel vezmeme průměrnou délku vazby v betakarotenu, tedy 140 pm, a vynásobíme jí počtem vazeb. Těch je 21, 11 dvojných a 10 jednoduchých mezi nimi. (Kvůli konjugaci ale takto rozdělit úplně nejdou, což tu právě počítáme!) Tím nám vyjde délka jámy 2,94 nm. Pokud tedy dosadíme tyto hodnoty do vzorce pro energii hladin, dostaneme  $E_n = n^2 \cdot (6,97 \cdot 10^{-20} \text{ J})$ . Máme 11 dvojných vazeb, což

odpovídá 22 elektronům. Tím pádem v základním stavu budou hladiny až po  $n = 11$  obsazené 2 elektrony. Nejnižší excitovaný stav dostaneme, když excitujeme jeden elektron z hladiny  $n = 11$  na hladinu  $n = 12$ . Absorbovaná energie pak je  $\Delta E = (12^2 - 11^2) \cdot (6,97 \cdot 10^{-21} \text{ J}) = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , což je energie fotonu o vlnové délce přibližně 1240 nm. Tato vlnová délka leží v blízké infračervené oblasti a je na hony vzdálená skutečné vlnové délce okolo 450 nm. (To to je hodnota maxima absorpce, ale jinak betakaroten absorbuje na celém intervalu od ca. 500 nm (zelená) až po fialovou oblast. Proto nám „nechá“ jen žluté a červené světlo, čímž pádem se nám betakaroten zdá oranžový.) Pokud bychom uvažovali variantu, že elektrony běhají „rovně“, můžeme ji aproximovat využitím toho, že úhel mezi sousedními vazbami je  $120^\circ$ , pak délku karotenu vynásobíme  $\sqrt{3}/2$ , což je poměr délky dvou stran šestiúhelníku a odpovídající „tětivy“. Vyjde nám, že vlnová délka je  $3/4$  té původní, tedy přibližně 930 nm, což je sice o něco lepší, ale stále to není ani ve viditelném spektru.

Proč tomu tak je? Přeci jen je naše aproximace dosti hrubá. Jednak elektrony v betakarotenu nejsou úplně volné, ale působí na ně elektrostatický potenciál jader, byť je stíněn ostatními elektrony v nižších slupkách. Jednak pak úplně ignorujeme elektrostatické odpuzování mezi jednotlivými elektrony, které má podobný, ne-li větší vliv na konečný výsledek. Důkazem toho je, že stav, který odpovídá absorpci na 450 nm, je až druhý excitovaný, protože přechod na první excitovaný stav je takzvaně zakázaný a téměř neprobíhá. (Mluvíme také o temném stavu.) Podíváme-li se pak na charakter vlnové funkce těchto stavů, zjišťujeme, že stav, který odpovídá absorpci, opravdu vypadá tak, že jeden elektron se excituje o jednu hladinu (orbital) výš, ale zároveň má změněný stav komplikovanou elektronickou strukturu s vlnovou funkcí, jež je součtem mnoha různých excitovaných stavů. V realitě tedy sice je absorpce fotony spojená s excitací až do druhého excitovaného stavu, ovšem charakter této excitace odpovídá tomu, co jsme počítali – tedy nejnižší excitaci v našem modelu potenciálové jámy. Ukazuje nám to, že reálné molekuly jsou často mnohem komplikovanější než naše modely.

Pokud tedy chceme vylepšit svůj model, musíme „sáhnout“ na hmotnost elektronu. Pohledem na vzorec pro energii nekonečné potenciálové jámy zjistíme, že energie přechodu je nepřímo úměrná hmotnosti, díky čemuž platí přímá úměra mezi vlnovou délkou přechodu a hmotností částice. Jednoduchou trojčlenkou tedy můžeme najít vztah pro efektivní hmotnost  $m^*$  elektronu

$$\frac{m^*}{m_e} = \frac{\lambda_{\text{Experiment}}}{\lambda_{\text{Výpočet}}}.$$

Dosazením zjistíme, že hledaná efektivní hmotnost  $m^*$  je rovna asi  $0,5m_e$ . Může se zdát absurdní, že by elektron interakcemi „ztratil“ přes půlku svojí hmotnosti, ale v pevných látkách (kovech a polovodičích) se efektivní hmotnosti vodivostních elektronů skutečně pohybují od zlomku až po několiknásobek původní hmotnosti.

Z předchozího výpočtu vidíme, že zkoušet z jednoduchého modelu počítat přesné hodnoty spektrálních čar je trochu pošetilé, ale zde pro kvantové tečky můžeme využít toho, že máme zadané hodnoty pro 2 různé velikosti. Když se znovu podíváme na vzorec pro energie hladin, vidíme, že energie je nepřímo úměrná druhé mocnině délky jámy. Toto škálování s velikostí se nám přeneso i do 3D jámy, přestože řešení vypadá trochu jinak. Když budeme předpokládat, že délka jámy odpovídá průměru nanočástice, můžeme rovnou napsat závislost energie přechodu na průměru  $d$  nanočástice

$$E = \frac{hc}{\lambda} = a + \frac{b}{d^2}, \quad (4)$$

kde jsme si zavedli dva neznámé parametry  $a$  a  $b$ . Tento tvar má fyzikální smysl. Parametr  $a$  odpovídá velikosti zakázaného pásu, který je dán materiálem nanočástice, a do  $b$  jsme schovali

všechny parametry svého modelu nekonečné potenciálové jámy (kromě závislosti na velikosti nanočástice).

Pokud nyní do této rovnice dosadíme průměry a vlnové délky obou zadaných nanočástic, dostaneme soustavu dvou rovnic pro neznámé koeficienty  $a$  a  $b$

$$\begin{aligned}\frac{hc}{\lambda_1} &= a + \frac{b}{d_1^2} \\ \frac{hc}{\lambda_2} &= a + \frac{b}{d_2^2}.\end{aligned}$$

Odečtením těchto rovnic od sebe, můžeme vyjádřit  $b$

$$b = \frac{\frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2}}{\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2}}.$$

To pak můžeme dosadit do první rovnice a získat  $a$

$$a = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{\frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2}}{1 - \frac{d_1^2}{d_2^2}} = \frac{\frac{hc}{\lambda_2} - \frac{d_1^2}{d_2^2} \frac{hc}{\lambda_1}}{1 - \frac{d_1^2}{d_2^2}}.$$

Dosažením hodnot ze zadání získáme hodnoty parametrů  $a = 1,31 \text{ eV}$ ,  $b = 5,48 \text{ eV/nm}^2$ . Pokud nyní vyjádříme průměr kuličky ze svého původního vztahu (4)

$$d_3 = \sqrt{\frac{b}{\frac{hc}{\lambda_3}} - a},$$

dosazením najdeme hledaný průměr  $d_3 = 2,63 \text{ nm}$ . Za povšimnutí také stojí, že hodnota  $a$  skutečně zhruba odpovídá velikosti zakázaného pásu CdSe, která je  $1,74 \text{ eV}$ .

### Bonus

Řešení bonusu je vlastně velice přímočaré, ačkoliv vyžaduje velmi pokročilou matematiku. Budeme integrovat hustotu pravděpodobnosti přes poloměr koule ve sférických souřadnicích. Protože máme sférickou symetrii, stačí nám integrovat přes radiální souřadnici, pokud přidáme faktor odpovídající povrchu koule o daném poloměru. Pravděpodobnost výskytu elektronu v kouli o poloměru  $R$  bude tedy

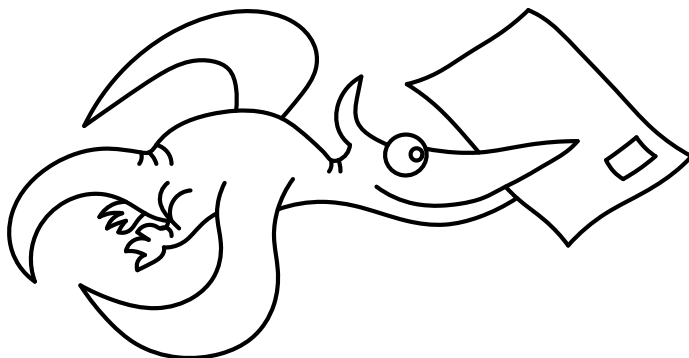
$$\begin{aligned}P &= \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_0^R |\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr = \\ &= \int_0^R \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} dr = \\ &= 1 - \left( \frac{2R^2}{a_0^2} + \frac{2R}{a_0} + 1 \right) e^{-2R/a_0},\end{aligned}$$

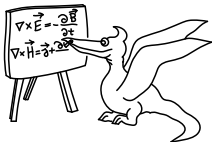
kde jsme k vyčíslení integrálu využili dvakrát integraci per partes. Pokud nyní tuto pravděpodobnost postavíme rovnou  $0,95$ , jak vyžaduje zadání, dostaneme rovnici pro neznámý poloměr  $x = R/a_0$

$$1 - (2x^2 + 2x + 1)e^{-2x} = 0,95.$$

Tuto rovnici musíme řešit numericky a zjistíme, že hledaný poloměr je přibližně  $3,15a_0$ , tedy 167 pm. To je o něco větší vzdálenost, než je běžná délka kovalentních vazeb, ve kterých figurují atomy vodíku, ale menší, než je délka vodíkových můstků, což je docela očekávatelné (kovalentní vazby jsou založené na překryvu orbitalů, kdežto vodíkové můstky ne).

*Mikuláš Matoušek*  
mikulas@fykos.cz





## Seriál: Kvanta orbitalů

Dnes se podíváme na to, že pracovat v kvantové mechanice s funkcemi je vlastně nepraktické, a jak se dá tato formulace zjednodušit. Tento díl sice bude trochu náročnější na pochopení, ale pokud byste se v něm třeba i ztratili, nezoufejte, další díly už budou jednodušší a na dnešní seriál nebudou úplně navazovat.

### Kvantově oscilujeme

Vše si ukážeme na lineárním harmonickém oscilátoru. Tento systém má potenciál ve tvaru paraboly

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

kde  $\omega$  je frekvence oscilátoru a  $m$  hmotnost částice. Pokud dosadíte vztah pro frekvenci oscilací pružiny  $\omega = \sqrt{k/m}$ , dostanete místo toho známější výraz s tuhostí  $k$ , který je  $V = 1/2kx^2$ . Tento systém je jedním z nejdůležitějších ze všech, které umíme analyticky řešit. (Další zásadní jsou volná částice a atom vodíku.) Jedním z důvodů, proč je pro nás tak důležitý, je předpoklad, že v libovolném potenciálu se bude částice nacházet v okolí jeho minima. Potenciál okolí minima lze téměř vždy dobře aproximovat parabolou.

Pokud tento parabolický potenciál dosadíme do Schrödingerovy rovnice  $H\psi = E\psi$  z minulého dílu, získáme rovnici

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x).$$

Tu je sice možné řešit napřímo, ale my si s ní ukážeme úplně jinou myšlenku. Pro zjednodušení můžeme položit  $m = 1, \omega = 1$ , čímž se zbavíme nutnosti opisovat je do dalších rovnic.

Představte si, že vám někdo prozradí, že vlnová funkce základního stavu je Gaussova funkce. Můžeme ověřit, že funkce

$$\varphi_1(x) = e^{-x^2/2\hbar}$$

je řešením Schrödingerovy rovnice

$$\hat{H}\varphi_1(x) = \frac{\hbar}{2}e^{-x^2/2\hbar} = \frac{\hbar}{2}\varphi_1(x)$$

s energií  $\hbar/2$ . Normalizací se můžeme zabývat až později, pro výpočet energie není podstatná.

Zkusíme-li teď vzít druhou funkci

$$\varphi_2(x) = x^2 e^{-x^2/2\hbar},$$

zjistíme, že tato funkce není řešením Schrödingerovy rovnice

$$\hat{H}\varphi_2(x) = -\hbar^2 e^{-x^2/2\hbar} + 2\hbar x^2 e^{-x^2/2\hbar} = -\hbar^2 \varphi_1(x) + 5/2\hbar \varphi_2(x) \neq E\varphi_2(x).$$

Místo toho nám aplikací hamiltoniánu přibyl ve funkci nějaký příspěvek od vlnové funkce základního stavu. Ale není nic jednoduššího, než zkusit tuto funkci opravit, aby již Schrödingerovu rovnici splňovala. To se dá udělat jednoduše tak, že vezmeme součet těchto 2 funkcí s neznámými koeficienty

$$\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x).$$

Když tuto formu vlnové funkce dosadíme do Schrödingerovy rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi(x) &= c_1\hat{H}\varphi_1(x) + c_2\hat{H}\varphi_2(x) = \\ &= c_1\frac{\hbar}{2}\varphi_1(x) - c_2\hbar^2\varphi_1(x) + 5/2c_2\hbar\varphi_2(x) = \\ &= E(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)).\end{aligned}\tag{5}$$

Protože nám nezáleží na normalizaci, můžeme položit  $c_2 = 1$  a stačí nám pak najít odpovídající hodnotu  $c_1$ . Z původní diferenciální rovnice nám zbyla rovnice pro dvě neznámé, koeficient  $c_1$  a energii  $E$ .

$$c_1\frac{\hbar}{2}\varphi_1(x) - \hbar^2\varphi_1(x) + 5/2\hbar\varphi_2(x) = E(c_1\varphi_1(x) + \varphi_2(x))$$

Pohledem na koeficienty u  $\varphi_2$  vidíme, že energie se musí rovnat  $5/2\hbar$ . Nyní již hravě dopočítáme i koeficient  $c_1$  z rovnice

$$c_1\frac{\hbar}{2}\varphi_1(x) - \hbar^2\varphi_1(x) = 5/2\hbar c_1\varphi_1(x).$$

Dostáváme  $c_1 = \hbar/2$ . To nám dá vlnovou funkci

$$\psi(x) = \hbar/2\varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

což je až na normalizaci přesně výsledek, který můžeme najít v učebnicích. Je to až druhý excitovaný stav, protože první excitovaný stav je lichá funkce  $x$ , zatímco naše dva stavy jsou sudé. Protože máme symetrický potenciál, tak nám hamiltonián sudé a liché stavy nemíchá. To je jeden z mnoha případů, kdy se nám v kvantové mechanice projeví symetrie.

Zkusme se ještě jednou zamyslet nad tím, co jsme teď vlastně udělali. Místo toho, abychom řešili komplikovanou diferenciální rovnici pro neznámou funkci, jsme si vzali nějakou (vhodnou!) sadu pevně daných funkcí a hledali jen koeficienty u jejich váženého součtu (nazývaného lineární kombinace). Tím jsme vlastně převedli celou ošklivou diferenciální rovnici na rovnici algebraickou, která je mnohem příjemnější na řešení. Musíme si ale dát pozor, abychom zvolili takové funkce, které dobře popisují daný problém. Díky tomu nám jich stačí vzít relativně malé množství, abychom měli správný (nebo dostatečně přesný přibližný) výsledek. Například, pokud bychom chtěli stavy lineárního harmonického oscilátoru popsat pomocí obyčejných polynomů, určitě tušíte, že kdybychom jich vzali libovolně konečné množství, nikdy bychom vlnovou funkci lineárního harmonického oscilátoru nezískali úplně přesně. Hodnota přesné vlnové funkce jde totiž do nuly pro  $x$  jdoucí do nekonečna, naopak libovolný polynom jde do (kladného nebo záporného) nekonečna.



Zatím ale jsme hodnoty koeficientů určili trochu nesystematicky, což teď napravíme. Vraťme se trochu zpět, k rovnici (5). Když jí celou vynásobíme funkcí  $\varphi_1(x)$  a uděláme integrál podle  $x$  přes celou reálnou osu, dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (c_1\varphi_1(x)\hat{H}\varphi_1(x) + c_2\varphi_1(x)\hat{H}\varphi_2(x)) dx = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} E(c_1\varphi_1(x)^2 + c_2\varphi_1(x)\varphi_2(x)) dx, \end{aligned} \quad (6)$$

což můžeme snadno upravit na

$$\begin{aligned} & c_1 \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1(x)\hat{H}\varphi_1(x)) dx + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1(x)\hat{H}\varphi_2(x)) dx = \\ & = E \left( c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)^2 dx + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(x) dx \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Protože  $\varphi_1(x)$  a  $\varphi_2(x)$  jsou pevně dané funkce, můžeme si všimnout, že máme všechny „ingredience“ k vypočítání integrálů a mohli bychom tím pádem všechny integrály rovnou přesně vyčíslit a dosadit jejich konkrétní hodnotu. My to nebudeme dělat, místo toho se je jen pro obecnost označíme písmenky

$$\begin{aligned} S_{11} &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)^2 dx, \\ S_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(x) dx, \\ H_{11} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1(x)\hat{H}\varphi_1(x)) dx, \\ H_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1(x)\hat{H}\varphi_2(x)) dx. \end{aligned}$$

Předchozí rovnice (7) pak vypadá mnohem pěkněji

$$H_{11}c_1 + H_{12}c_2 = E(S_{11}c_1 + S_{12}c_2).$$

Když zopakujeme tento postup, ale rovnici (6) vynásobíme  $\varphi_2(x)$  a přeintegrujeme ji, dostaneme s použitím podobného značení

$$H_{21}c_1 + H_{22}c_2 = E(S_{21}c_1 + S_{22}c_2).$$

## Vektory a matice

Nyní musíme udělat trochu odbočku, abychom si zavedli nové, šikovnější značení. Pokud již máte zkušenosti s maticemi, nebojte se tuto část přeskočit. Bohužel tento díl není natahovací, takže seznámení bude velice zrychlené, ale pokud se chcete o maticích dozvědět víc, věnoval se jim například celý 5. díl seriálu 16. ročníku, který můžete dohledat na FYKOSím webu.

Jistě jste se ve škole již seznámili s vektory. Pokud máme nějaký souřadnicový systém, můžeme v něm vektor zapsat jako sloupeček čísel. Zobecněním tohoto konceptu pro operace na

vektorech v prostoru (například zobrazení rotace nebo natahování) dostaneme tabulku čísel, kterou nazýváme matice. My si vystačíme s čtvercovými maticemi, ale mohou mít i tvar obdélníku. Působení operace na vektory v těchto „tabulkách čísel“ se přeneso do operace maticového násobení. Jeho výsledkem je vektor, který na každé pozici má skalární součin starého vektoru s odpovídajícím řádkem dané matice. Tedy nový vektor má na první pozici skalární součin prvního řádku s původním vektorem a tak dále.

To, že po působení matice  $\mathbb{A}$  na vektor  $\vec{x}$  nám vyjde  $\vec{y}$ , značíme

$$\mathbb{A}\vec{x} = \vec{y}.$$

Podobně můžeme vynásobit i dvě matice mezi sebou – matici v součinu napravo rozebereme na jednotlivé vektory, na ty zapůsobíme levou maticí, a pak tyto nové vektory zase po sloupcích poskládáme do výsledné matice. Násobení dvou matic je ekvivalentní složení dvou operací reprezentovaných těmito maticemi. Dejte si pozor, násobení matic obecně není komutativní,  $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$ . Ono totiž není komutativní ani skládání dvou zobrazení, můžete si sami vyzkoušet, že pokud obrázek přezrcadlíte podle osy  $x$  a pak otočíte o  $90^\circ$ , dostanete něco jiného, než když to provedete v opačném pořadí. Trochu názornější, proč jsme si toto zavedli, bude, pokud si zavedeme indexovou notaci. Pokud  $i$ -tý prvek vektoru  $\vec{x}$  označíme  $x_i$  a prvek matice  $\mathbb{A}$  na  $i$ -tém řádku a v  $j$ -tém sloupci jako  $A_{ij}$ , působení matice na vektor nám přejde na

$$\vec{y} = \mathbb{A}\vec{x} \rightarrow y_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}x_j.$$

Ale to je přesně to, co máme v naší rovnici! Tedy jednotlivé koeficienty  $c_i$  můžeme prohlásit za (abstraktní!) vektor, a tím pádem můžeme přepsat celou rovnici pomocí matic

$$\mathbb{H}\vec{c} = E\vec{S}\vec{c}.$$

Matice hamiltoniánu  $\mathbb{H}$  nám říká, jak působí hamiltonián mezi jednotlivými bázovými funkcemi. Matice  $\mathbb{S}$  má ještě jednodušší interpretaci. Ta nám jen říká jak moc se jednotlivé bázové funkce překrývají (říkáme jí překryvová matice). Té se navíc můžeme jednoduše zbavit. Stačí si vybrat bázové funkce tak, aby překryv každé funkce se sebou samou byl roven 1 a překryv mezi libovolnými různými bázovými funkcemi byl 0. V analogii s vektory v 3D prostoru pak říkáme, že máme ortogonální bázi funkcí. Překryvová matice pak má hezký tvar, jedničky na diagonále a na všech ostatních pozicích nuly. Taková matice při působení na jakýkoliv vektor vrátí přesně ten samý vektor, takže ji můžeme z rovnice úplně vypustit. Pro ortogonální bázi funkcí pak máme mnohem hezčí tvar rovnice

$$\mathbb{H}\vec{c} = E\vec{c}.$$

Tato rovnice má vlastně úplně stejný tvar jako bezčasové Schrödingerova rovnice, jen s maticemi a vektory místo funkcí a operátorů. Výhodou je, že pro matice je tento typ rovnic standardní problém, nazývaný diagonalizace nebo také hledání vlastních čísel a vlastních vektorů.

Vlastní vektor, který hledáme, je takový, který působením matice nezmění orientaci, ale jen velikost. Tedy po působení matice na vlastní vektor dostaneme ten samý vektor, jen př násobený nějakým číslem. To nazýváme vlastní číslo k danému vektoru. Vlastních vektorů je v principu nekonečně mnoho, protože vynásobením vlastního vektoru libovolným nenulovým číslem dostaneme vlastní vektor se stejným vlastním číslem. Omezujeme se tedy na to, že najdeme jeden od každého „typu“. Matice mívají většinou tolik různých vlastních vektorů, kolik

je sloupců čtvercové matice. Ač pro malé matice se takové vlastní vektory dají najít analyticky, přesahuje to rámec tohoto textu a my se spokojíme s tím, že tento problém budeme řešit numericky v počítači.

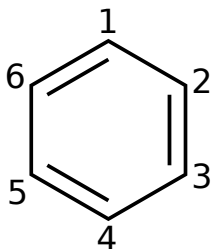
### Počítáme molekuly

Nyní si ukážeme, jak pomocí jednoduchého přiblížení můžeme počítat stavy uhlovodíků s konjugovanými dvojnými vazbami. Toto přiblížení se nazývá Hückelova metoda, podle Ericha Hückela, který ji v roce 1930 zavedl.

Podobně jako u úlohy v minulém díle seriálu se omezíme jen na  $p$  orbitaly, které se účastní dvojných vazeb, tedy jeden za každý atom uhlíku s dvojnou vazbou. Bázové funkce jsou pak právě jednotlivé  $p$  orbitaly. Protože překryv mezi  $p$  orbitaly na různých atomech je obecně hodně malý, můžeme jej zanedbat, a tím považovat celou bázi za ortogonální. Pak nám stačí jen zkonstruovat matici hamiltoniánu, který je v tomto přiblížení úplně jednoduchý.

Hodnota hamiltoniánu pro interakci orbitalu se sebou samým je jen energie elektronu v  $p$  orbitalu uhlíku, tedy  $-11,4\text{ eV}$ . Ten se značí  $\alpha$ . Mnohem zajímavější jsou elementy hamiltoniánu, které jsou mezi orbitaly na různých atomech. Pokud se jedná o atomy, které spolu nesousedí (tedy nejsou spojené vazbou), interakci mezi nimi zanedbáváme. Prvek matice hamiltoniánu bude tedy 0. Pokud spolu sousedí, má nenulovou hodnotu  $\beta$ , která je určována empiricky z experimentálních hodnot pro různé vlastnosti molekul. Hodnota  $\beta$  se různí podle toho, jaké molekuly a experimentální hodnoty se použijí k jejímu získání, ale obecně můžeme uvažovat hodnotu mezi  $-1\text{ eV}$  a  $-3\text{ eV}$ . Každopádně Hückelova metoda se používá spíš pro kvalitativní pochopení, takže energie jednotlivých orbitalů se většinou vyjadřují jako násobky  $\beta$ .

Rovnou si ukážeme příklad, jak by vypadal výpočet pro molekulu benzen. Očíslujeme si atomy uhlíku a rovnou uděláme tabulku, jak vypadají jednotlivé prvky hamiltoniánu. Na diagonále této tabulky z levého horního do pravého spodního rohu jsou  $\alpha$ , protože to je prvek hamiltoniánu pro orbital interagující sám se sebou. Na sousedních diagonálách jsou  $\beta$ , protože řádek a sloupec mají hodnotu lišící se o jedna, tedy (v našem očíslování) se jedná o sousední atomy. Nakonec, protože naše molekula je cyklická a sousedí i atomy 1 a 6, dostaneme  $\beta$  také v pravém horním a levém dolním rohu. Všude jinde zůstanou nuly.



	1	2	3	4	5	6
1	$\alpha$	$\beta$	0	0	0	$\beta$
2	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	0	0	0
3	0	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	0	0
4	0	0	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	0
5	0	0	0	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
6	$\beta$	0	0	0	$\beta$	$\alpha$

Tato tabulka je přímo matice hamiltoniánu a můžeme rovnou najít její vlastní čísla. Ještě

si trochu zjednodušíme práci, pokud ji přepíšeme jako

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že první matice s prefaktorem  $\alpha$  je jednotková, tedy působí na všechny vektory stejně. Tím pádem její efekt je jen posun energie všech stavů o hodnotu  $\alpha$ . Stačí nám tedy diagonalizovat jen druhou matici (bez  $\beta$ ) a dostaneme jednotlivé energetické hladiny právě v násobcích  $\beta$ . V tomto textu se nebudeme snažit o analytické řešení, přestože díky hezkému tvaru této matice je možné, ale spokojíme se s numerickým řešením. K diagonalizaci matice můžeme použít některý online nástroj, známý je například [www.wolphramalpha.com](http://www.wolphramalpha.com), kde bychom použili příkaz `eigenvalues`  $\{0,1,0,0,0,1\}$ ,  $\{1,0,1,0,0,0\}$ ,  $\{0,1,0,1,0,0\}$ ,  $\{0,0,1,0,1,0\}$ ,  $\{0,0,0,1,0,1\}$ ,  $\{1,0,0,0,1,0\}$ . My jsme k diagonalizaci použili krátký skript v Pythonu.

```
#!/usr/bin/python
```

```
import numpy as np
```

```
N = 6
```

```
H = np.zeros((N, N)) #inicializujeme matici nul NxN
```

```
for i in range(N-1): #proběhneme celou matici a nastavíme 1 vedle diagonaly
```

```
    H[i, i+1]=1
```

```
    H[i+1, i]=1
```

```
H[N-1,0]=1 #nastavíme 2 prvky v-rozích, index (N-1), protože cislujeme od-0!
```

```
H[0,N-1]=1
```

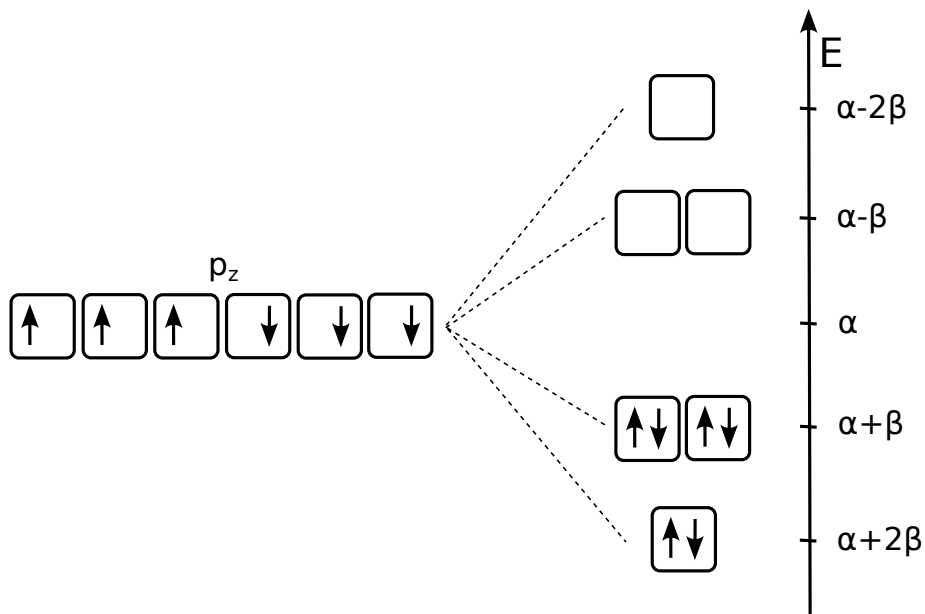
```
vl_cisla, vl_vekt = np.linalg.eig(H) #vlastni diagonalizace
```

```
print(vl_cisla) #vytiskneme vysledek
```

Po spuštění tohoto skriptu dostaneme vlastní čísla  $-2, -1, -1, 1, 1, 2$ . To že jsou tam některá vlastní čísla dvakrát znamená jen to, že máme dva různé vlastní vektory se stejným vlastním číslem. Nazýváme je také degenerované vlastní stavy.

Tím ale naše práce nekončí. Protože jsme při diagonalizaci hamiltoniánu „zapomněli“ jednotkovou matici a prefaktory  $\alpha$  a  $\beta$ , musíme je tam teď vrátit. To je ale jednoduché a dostaneme vlastní stavy s energiemi  $\alpha - 2\beta, \alpha - \beta, \alpha - \beta, \alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta$ . Tím pádem máme 6 stavů (orbitalů), do kterých musíme rozmístit 6 elektronů, přirozeně tak, abychom minimalizovali energii. To znamená, že dvakrát obsadíme 3 stavy s nejnižší energií. Výsledná energie pak je  $6\alpha + 8\beta$ . Nezapomeňte, že  $\alpha$  i  $\beta$  jsou záporné!

Ale celková energie není něco, co by nás reálně zajímalo, už jenom proto, že v naší aproximaci v ní vůbec nejsou zahrnuty ostatní elektrony, které se neúčastní dvojných vazeb. Zkusme tedy vyextrahovat nějaké další vlastnosti, které lze experimentálně zjišťovat.



Obr. 5: Orbitály v molekule benzenu. Vlevo je hypotetický stav, kdy by  $p_z$  orbitály v benzenu vůbec neinteragovaly. Působením interakce dostaneme orbitály vpravo, kde elektrony přirozeně obsadí ty, které mají nejnižší energii. Energie orbitalů roste odspoda nahoru.

Excitační energie, tedy energie potřebná k excitaci z nejvyšší obsazené na nejnižší virtuální hladinu, je  $-2\beta$ . Po dosazení konkrétní hodnoty  $\beta = -3$  eV dostáváme velikost excitační energie 6 eV. Protože nejvyšší obsazený i nejnižší neobsazený orbital je dvakrát degenerovaný, máme ve skutečnosti 4 různé možné excitace. Přestože Hückelův model jim přiřazuje stejnou energii, ve skutečnosti (z experimentu) mají 3 různé hodnoty, konkrétně 4,90 eV, 6,20 eV a 6,94 eV (jedna z energií odpovídá 2 excitacím). Ale vidíme, že naše hrubá aproximace s vhodnou empirickou hodnotou  $\beta$  dává vlastně docela dobré výsledky.

Když spočítáme ionizační energii, tedy energii, kterou potřebujeme na vytržení elektronu z nejvyššího obsazeného orbitalu, dostaneme vlastně záporně vzatou energii tohoto orbitalu, tedy  $-\alpha - \beta$ . Po dosazení by nám vyšlo více než 14 eV. Je vidět, že se začínáme vzdalovat od experimentální hodnoty 9,24 eV. Když totéž zkusíme pro elektronovou afinitu, tedy energii, která se uvolní při přidání elektronu, máme  $-\alpha + \beta$ , tedy něco přes 8 eV, což už je úplně mimo skutečnou hodnotu 1,15 eV. Vidíme tedy, že opravdu se jedná o metodu pro kvalitativní pochopení než kvantitativní výsledky.

Na závěr si ještě ukážeme, jak si docela snadno pomocí Hückelova modelu demonstrovat podstatu chemické vazby. Pokud vezmeme molekulu ethylenu (ethen), tak pro ni pomocí Hückelovy metody vytvoříme docela jednoduchý hamiltonián. Jeho matice má tvar

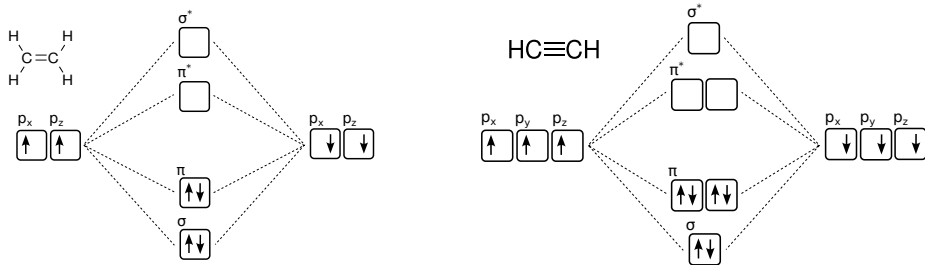
$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Pokud tento hamiltonián diagonalizujeme, dostaneme dva stavy, jeden s energií  $\alpha + \beta$  a druhý s energií  $\alpha - \beta$ . Přirozeně dva elektrony umístíme do prvního z nich, protože má nižší energii. Tedy ve výsledku máme celkovou energii  $2\alpha + 2\beta$ . Pokud bychom dva atomy uhlíku odtáhli na takovou vzdálenost, že interakce mezi nimi by byla zanedbatelná, parametr  $\beta$  popisující interakci je nulový, zatímco parametr  $\alpha$  se nezmění. V tomto případě tedy oba stavy mají stejnou energii  $\alpha$ .

Interakce molekul tak „vyrobí“ stav, který má o  $\beta$  nižší energii. Tedy obsazením tohoto stavu (orbitalu) dostaneme energii, která je nižší, než kdyby oba účastníci se atomy byly daleko od sebe. Tedy tento orbital drží tyto atomy blízko sebe – vytváří chemickou vazbu. Nazývá se proto vazebný orbital. Naopak druhý orbital má při obsazení vyšší energii než izolované atomy, ten chemickou vazbu naopak „sabotuje“. Označuje se tedy jako protivazebný orbital. V našem modelu je energie vazebného orbitalu nižší o přesně stejnou hodnotu, o kterou je protivazebný vyšší, ale ve skutečnosti, pokud bychom nezanedbávali překryv mezi jednotlivými orbitaly, byl by protivazebný výš o něco víc, než o kolik je vazebný níž.

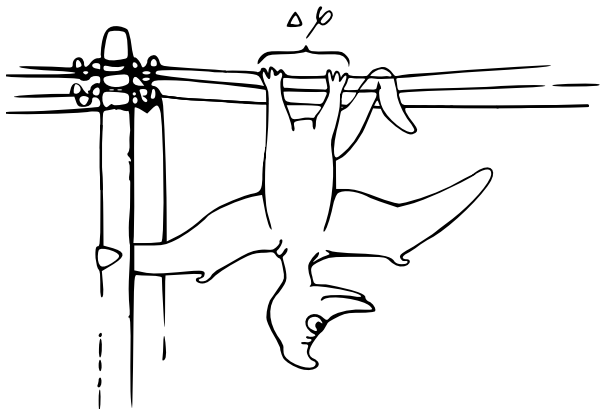
Zatím jsme ale popsali jen vazbu mezi  $p$  orbitaly mířící kolmo ke spojnici jader, která tvoří jen jednu z dvojice vazeb ve dvojně vazbě. Druhá z nich je tvořená  $p$  orbitaly ve směru vazby, a najdeme ji i například v molekule v etanu. Pro tu bychom ale mohli vytvořit úplně stejný (avšak stále pouze přibližný) hamiltonián, jen s jiným parametrem  $\beta$ . Parametr  $\alpha$  by v tomto případě dokonce mohl zůstat stejný, protože v ethylenu tuto vazbu také tvoří  $p$  orbitaly, jen jinak natočené. Díky tomu pro tuto vazbu dostaneme také vazebný a protivazebný orbital.

Pro vazebné a protivazebné orbitaly je navíc zavedené standardní značení. Pro vazebný orbital, který je v ose vazby, se používá označení  $\sigma$ . Protivazebný k němu se pak značí  $\sigma^*$ . Podobně orbitaly tvořící další vazby v násobných vazbách se značí  $\pi$  a  $\pi^*$ . Ve většině molekul  $\sigma$  orbital leží níže než  $\pi$ , a naopak  $\sigma^*$  orbital leží nad  $\pi^*$ . Pokud máme trojnou vazbu, jaká je například v molekule acetylenu, máme obsazený jeden  $\sigma$  a dva degenerované  $\pi$  vazebné orbitaly.



Obr. 6: Vazebné a protivazebné orbitály v molekule ethylenu (vlevo) a acetylenu (vpravo)

Těmito třemi díly seriálu jsme si trochu zacvičili s počítáním a od příště již za sebe necháme plně počítat počítač.





## Pořadí řešitelů po II. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno Student	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
Student	Pilný	6	6	6	6	10	10	12	10	66	100	110	132
1.–2. Jiří Preč	G J. A. Komenského, Uh. Brod	6	6	4	2	1	3	11	4	37	72	72	86
1.–2. Damian Šatánek	ZŠ a MŠ Telecí	4	–	6	1	2	6	9	14	42	76	72	86
3.–4. Michal Stroff	G, Budějovická, Praha	8	6	–	–	–	–	–	14	28	109	68	82
3.–4. Kosma Šatánek	ZŠ a MŠ Telecí	6	4	6	1	2	7	9	13	48	69	68	82
5. Vojtěch Jan Schreib	G Jírovcova, České Budějovice	6	6	–	1	–	4	12	7	36	75	59	71
6. Ludmila Šírová	Mensa G, Praha 6	6	6	2	3	7	5	10	–	39	63	54	65
7. Adam Pustka	G F. X. Šaldy, Liberec	6	6	–	2	–	3	11	–	28	82	53	64
8. Vojtěch Kubrycht	G, Budějovická, Praha	8	4	–	–	–	–	–	8	20	77	48	58
9. Matej Karpáč	ZŠ Jána Švermu	6	6	–	–	–	–	–	–	12	71	38	46
10. Patrik Pöschl	G F. X. Šaldy, Liberec	6	6	–	2	–	–	–	–	14	68	36	43
11. Anežka Skupínová	G, Hodonín	6	6	–	3	–	2	–	–	17	77	31	37
12. Jakub Hlavenka	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	0	1	2	0	–	6	–	15	47	26	31
13.–14. Md Faiyaz Siddiquee	DPS STS School Dhaka	6	6	6	1	–	3	8	–	30	65	25	30
13.–14. Ondřej Skála	G Volgogradská 6a, Ostrava	6	2	–	1	–	3	6	–	18	48	25	30
15. Mikuláš Vlčan	SPŠ, Třebíč	6	2	–	–	–	–	5	–	13	69	24	29
16. Vojtěch Novosád	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	4	4	–	–	–	–	–	–	8	84	22	27
17.–18. Barbora Blínová	Podkrušnohorské G, Most	6	2	–	1	–	2	–	–	11	40	22	26
17.–18. Lukáš Franta	G Christiana Dopplera, Praha	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	22	26
19.–20. Gala Dědková	G, Roudnice nad Labem	6	2	0	2	0	1	1	1	13	19	19	23
19.–20. Monika Nováková	Reálné G a ZŠ, Prostějov	4	2	1	2	0	1	–	–	10	26	19	23
21. Klaudia Laľová	G L. Svobodu, Humenné	6	2	–	–	–	–	–	–	8	85	18	22
22.–23. Erik Ježek	Smíchovská SPŠ Praha 5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	17	20
22.–23. Dominik Kaňka	Lepařovo G, Jičín	4	2	–	–	–	2	5	–	13	37	17	20
24.–26. Tomáš Řehák	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	–	–	–	–	–	–	–	4	90	15	18
24.–26. Nina Vážna	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	90	15	18
24.–26. Teo Višňovský	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	90	15	18
27.–28. Barbora Salajová	G, Litoměřická, Praha	6	2	–	–	–	–	–	–	8	65	14	17
27.–28. Vit Vycudilík	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	46	14	17
29. Filip Krafčík	G T. Vansovej, Stará Lubovňa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	12	15
30. Helena Muchová	G Jana Keplera, Praha	6	2	–	–	–	–	–	–	8	78	12	14
31. Pavlína Kuthanová	G a SOŠ Podbořany	4	0	1	–	–	2	–	–	7	28	11	13
32.–35. Petr Barták	Slovanské G, Olomouc	6	–	–	–	–	–	–	–	6	100	10	12
32.–35. Roberto Franchin	Liceo Sci. Augusto Righi, Roma	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	10	12



## Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
		6	6	6	6	10	10	12	10	66	100	110	132
1. <i>Matouš Mišta</i>	G, Olomouc-Hejčín	6	4	6	6	–	9	7	2	40	83	76	91
2. <i>David Něníčka</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	6	4	6	6	–	3	8	–	33	81	67	80
3.–4. <i>Vladimír Slanina</i>	G Poštová, Košice	6	6	–	6	–	–	12	11	41	101	64	77
3.–4. <i>Pavla Šimová</i>	G, Šumperk	6	6	6	5	–	4	11	8	46	76	64	77
5. <i>Linda Tománková</i>	G, Boskovice	6	6	–	1	1	5	11	5	35	63	59	71
6. <i>Zuzana Grycová</i>	G Botičská, Praha	6	2	2	3	0	3	10	8	34	59	58	70
7. <i>Filip Cihlář</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	6	6	2	3	0	3	–	8	28	61	54	65
8. <i>Anna Škrdletová</i>	G, Lovosice	6	6	2	1	1	4	7	2	29	54	53	64
9. <i>Sabina Mihalová</i>	G, Nad Alejí, Praha	6	6	1	3	–	2	–	1	19	64	52	62
10. <i>Hana Žitňanská</i>	Slovanské G, Olomouc	6	2	1	1	1	4	10	6	31	50	50	60
11.–12. <i>Jakub Buzalka</i>	G, Považská Bystrica	6	4	1	3	–	1	9	–	24	64	48	58
11.–12. <i>Lukáš Hrdý</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	6	2	2	1	–	4	12	8	35	57	48	58
13. <i>Tomáš Otrubčák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	6	6	–	–	–	7	–	–	19	85	47	56
14. <i>Tomáš Kubrický</i>	G Poštová, Košice	6	6	–	2	–	–	12	–	26	96	45	54
15. <i>Petr Brettschneider</i>	G, Dukelská, Bruntál	4	4	–	2	0	2	9	–	21	50	43	52
16. <i>Lujza Lea Lavriková</i>	G, P. Horova, Michalovce	4	2	–	6	0	1	–	–	13	62	42	51
17. <i>Ivan Zemlička</i>	G Ústavní, Praha	6	6	–	6	–	–	–	5	23	86	40	48
18.–20. <i>Matěj Pěnička</i>	G, Nad Alejí, Praha	6	6	–	3	–	–	–	–	15	94	37	45
18.–20. <i>Radim Švec</i>	G, Pelhřimov	6	4	2	3	–	4	9	–	28	60	37	45
18.–20. <i>Jakub Radim Zbončák</i>	G, Křenová, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	37	45
21. <i>Martin Zuzek</i>	G Dobruška	6	2	–	–	–	–	11	–	19	64	37	44
22. <i>Tomáš Bourek</i>	G J. Heyrovského, Praha	4	6	6	1	7	–	12	7	43	77	36	43
23. <i>Tudor Popescu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest,RO	4	6	6	6	–	–	–	–	22	95	35	42
24. <i>Michal Friml</i>	G Dobruška	6	2	–	–	–	–	8	–	16	77	34	41
25. <i>Petr Toman</i>	G, Velké Meziříčí	6	6	–	–	–	2	–	–	14	83	33	40
26.–27. <i>Petra Ivanišová</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	4	2	–	1	0	3	5	2	17	41	32	39
26.–27. <i>Daniël Švec</i>	G, Pelhřimov	6	6	1	2	–	5	10	–	30	59	32	39
28. <i>Soňa Vasilová</i>	G, Kukučínova, Poprad	6	4	–	–	–	–	–	–	10	95	30	36
29.–30. <i>Zuzana Harbutová</i>	G L. Štúra, Zvolen	8	6	–	–	–	4	5	3	26	60	29	35
29.–30. <i>Martin Uhrin</i>	G Hubeného, Bratislava	6	4	–	–	–	–	–	–	10	92	29	35
31. <i>Matyáš Beran</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpo- lec	6	2	–	–	–	4	6	–	18	56	28	34
32. <i>Lucia Kleščová</i>	G Poštová, Košice	4	6	–	–	–	4	–	–	14	76	27	32
33. <i>Mária Mederlyová</i>	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	97	24	29
34.–35. <i>Jana Bartoňová</i>	G, Broumov	6	6	–	3	–	–	–	–	15	90	22	27
34.–35. <i>Miroslav Pajger</i>	Bilingválne G, Sučany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	104	22	27
36. <i>Gabriela Kotůčová</i>	G PdC, Piešťany	6	2	–	–	–	–	–	5	13	57	21	25
37.–38. <i>Adam Filip</i>	G, Česká Lípa	6	6	0	1	–	–	–	–	13	64	19	23
37.–38. <i>Petr Kozák</i>	G, Písek	6	2	–	–	0	–	11	–	19	41	19	23
39. <i>Šimon Zemčák</i>	G Kežmarok	6	2	–	1	–	–	–	–	9	56	18	22
40.–42. <i>Veronika Pavlíková</i>	G, Křenová, Brno	6	6	–	–	–	–	–	–	12	81	17	21
40.–42. <i>Václav Verner</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	17	21
40.–42. <i>Eva Žilková</i>	G Fr. Švantnera	6	6	–	–	–	–	–	–	12	75	17	21
43.–45. <i>Terézia Dadažová</i>	Gymnázium Federica Gar- cíu Lorcu	6	–	–	–	–	1	4	–	11	48	17	20
43.–45. <i>Tereza Kendrová</i>	Gymnázium Ladislava No- vomeského	6	2	–	–	–	3	–	–	11	56	17	20

## Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
		3	3	6	6	10	10	12	10	60	100	100	120
1. <i>Jan Klír</i>	G B. Hrabala	3	3	6	6	8	9	12	13	60	97	87	104
2.–3. <i>Adam Harmanský</i>	G Poštová, Košice	3	3	6	3	10	–	10	12	47	99	80	96
2.–3. <i>Radovan Lev</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	3	3	6	6	4	7	11	12	52	90	80	96
4. <i>Patrik Stercz</i>	G Poštová, Košice	3	3	6	3	4	–	12	14	45	95	77	92
5. <i>Martin Mičuch</i>	G Šrobárova, Košice	4	3	6	5	2	8	12	8	48	85	76	91
6. <i>Vladimíra Jiříčková</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	3	3	6	2	–	8	10	9	41	90	72	87
7. <i>Matej Kundřík</i>	G Poštová, Košice	3	3	–	1	5	4	11	10	37	80	67	81
8. <i>Jan Strnad</i>	G, Postupická, Praha	3	3	6	6	3	5	11	13	50	74	66	79
9. <i>Jiří Sýkora</i>	G, Trhové Sviny	3	3	4	4	7	5	10	9	45	77	62	75
10. <i>Maroš Jankovič</i>	G V. Nedožerského, SR	3	3	2	6	–	4	7	9	34	75	61	73
11. <i>Jana Mária Žeňuchová</i>	G, P. Horova, Michalovce	2	2	3	0	1	3	10	10	31	64	57	69
12. <i>Lukáš Jarábek</i>	G Grösslingová, Bratislava	3	3	2	1	4	4	9	5	31	63	56	67
13. <i>Monika Drezlerová</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	3	2	4	3	1	3	10	7	33	60	53	64
14. <i>Tomáš Vysoký</i>	G Poštová, Košice	3	3	1	2	3	5	9	7	33	64	48	58
15.–16. <i>Veronika Plevná</i>	G, Cheb	3	3	6	4	–	3	12	–	31	83	47	57
15.–16. <i>Michael Ruman</i>	G V. P. Tótha, Martin	3	2	6	3	–	–	–	9	23	85	47	57
17. <i>Martin Marciničák</i>	G Šrobárova, Košice	–	3	7	6	–	–	6	–	22	86	46	55
18. <i>Kamila Čidlínská</i>	G Botičská, Praha	3	2	–	–	–	5	12	6	28	63	43	52
19. <i>Veronika Bartáková</i>	Slovanské G, Olomouc	3	3	–	–	–	–	11	–	17	88	42	50
20. <i>David Ševčík</i>	G, Uherské Hradiště	3	3	1	3	4	–	10	–	27	59	40	48
21. <i>Jakub Savula</i>	G Jírovцова, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	98	38	46
22.–23. <i>Tadija Jelesijević</i>	Gimnazija Kruševac	3	3	6	0	–	8	–	–	20	79	37	44
22.–23. <i>Ondřej Kopeček</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	3	3	–	1	–	5	11	9	32	67	37	44
24.–25. <i>Filip Hošek</i>	Masarykovo klasické G, Říčany	3	3	–	–	–	8	11	–	25	79	35	42
24.–25. <i>Ondřej Kadlec</i>	G, Moravský Krumlov	3	3	–	4	–	–	–	–	10	84	35	42
26.–27. <i>Barbora Klusáková</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	3	3	–	3	–	–	–	8	17	93	32	39
26.–27. <i>Lukáš Linhart</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	3	2	–	0	0	4	–	–	9	56	32	39
28. <i>Lachyn Hydyrova</i>	86th specialized school, TM	2	3	2	3	3	2	3	1	19	36	32	38
29. <i>Matej Bryja</i>	G D. Tatarku, Poprad	3	2	–	–	–	–	–	–	5	64	28	34
30.–31. <i>Daniél Čtvrtečka</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	97	26	31
30.–31. <i>Klaudia Sýkorová</i>	G Poštová, Košice	3	1	–	–	2	–	–	–	6	61	26	31
32. <i>Anežka Čechová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	2	–	–	–	2	11	–	17	61	23	28
33. <i>Martin Kubánek</i>	G, Roudnice nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	90	22	27
34.–35. <i>Richard Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	2	–	–	–	3	9	–	16	68	21	25
34.–35. <i>Cristina Mihaela Rău</i>	CNI Tudor Vianu, Romania	3	3	–	2	–	–	–	–	8	63	21	25
36. <i>Julie Křížková</i>	Wichterlovo G, Ostrava	3	3	–	0	–	–	–	–	6	62	17	21
37. <i>Timotej Vida</i>	G V. Nedožerského, SR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	17	20
38.–39. <i>Iren Kishinevskaya</i>	Slovanské gymnázium Praha 5 - Ko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	15	18
38.–39. <i>Kateřina Šmídová</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	3	3	–	2	–	–	–	–	8	44	15	18

## Kategorie čtvrtých ročníků

<b>jméno</b> <i>Student</i>	<b>škola</b> MFF UK	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>S</b>	<b>II</b>	<b>„%“</b>	<b>%</b>	<b>Σ</b>
<i>Pilný</i>		3	3	6	6	10	10	12	10	60	100	100	120
<b>1.</b> <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	4	3	6	0	8	6	12	12	<b>51</b>	87	77	<b>93</b>
<b>2.</b> <i>Jiří Vestfál</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	4	3	3	6	7	–	11	13	<b>47</b>	95	70	<b>84</b>
<b>3.</b> <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	3	3	2	4	7	6	12	10	<b>47</b>	77	62	<b>75</b>
<b>4.</b> <i>Tereza Voltrová</i>	G Mikuláské n. 23, Plzeň	3	3	3	2	0	5	9	6	<b>31</b>	67	60	<b>72</b>
<b>5.</b> <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	3	3	6	6	–	–	–	9	<b>27</b>	100	55	<b>66</b>
<b>6.</b> <i>Lukáš Létal</i>	G J. Škody, Přerov	3	3	3	3	0	6	11	5	<b>34</b>	62	51	<b>61</b>
<b>7.</b> <i>Katarína Horská</i>	G Jana Keplera, Praha	3	3	–	–	–	7	11	7	<b>34</b>	71	50	<b>60</b>
<b>8.–9.</b> <i>Tereza Hochmanová</i>	G Chotěboř	3	1	–	–	–	6	11	–	<b>24</b>	67	45	<b>54</b>
<b>8.–9.</b> <i>Dzenan Midzic</i>	JU Gimnazija Bihać, BiH	3	3	6	4	–	–	10	9	<b>35</b>	87	45	<b>54</b>
<b>10.</b> <i>Daniela Karpíšková</i>	Masarykovo G, Plzeň	3	2	6	3	0	4	9	–	<b>27</b>	55	44	<b>53</b>
<b>11.</b> <i>Radek Košinár</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	3	6	1	10	3	–	9	<b>34</b>	68	43	<b>52</b>
<b>12.</b> <i>Nikola Kadlečková</i>	G, nám. TGM, Zlín	3	1	2	2	–	–	4	12	<b>9</b>	62	40	<b>48</b>
<b>13.</b> <i>Jakub Ježek</i>	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	96	37	<b>45</b>
<b>14.</b> <i>Pavel Horský</i>	G, Brno-Řečkovice	3	3	6	1	–	3	–	–	<b>16</b>	75	36	<b>43</b>
<b>15.</b> <i>Rudolf Žizka</i>	G, Brno-Řečkovice	3	3	6	2	0	2	–	–	<b>16</b>	55	35	<b>42</b>
<b>16.</b> <i>Vladimíra Brabcová</i>	SPŠ Ostrov n. Ohří	3	3	–	–	–	3	–	–	<b>12</b>	80	33	<b>40</b>
<b>17.</b> <i>Barbora Růžicková</i>	G, Moravská Třebová	–	2	–	2	–	–	–	8	<b>12</b>	80	32	<b>39</b>
<b>18.</b> <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	3	3	–	4	–	–	–	–	<b>10</b>	92	27	<b>33</b>
<b>19.</b> <i>David Škrob</i>	SPŠ a VOŠT Brno	–	–	–	–	–	3	7	2	<b>12</b>	51	27	<b>32</b>
<b>20.–21.</b> <i>Jonáš Dej</i>	Wichterlovo G, Ostrava	4	2	6	–	–	7	–	12	<b>31</b>	97	26	<b>31</b>
<b>20.–21.</b> <i>Jan Lepič</i>	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	26	<b>31</b>
<b>22.</b> <i>Jaromír Potůček</i>	G Jana Keplera, Praha	3	3	3	–	3	–	–	7	<b>19</b>	52	25	<b>30</b>
<b>23.</b> <i>Filip Líška</i>	I. súkromné G v Bratislave	3	1	1	1	–	2	–	–	<b>8</b>	36	22	<b>27</b>
<b>24.–25.</b> <i>Jakub Kopcil</i>	G Mikuláské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	21	<b>25</b>
<b>24.–25.</b> <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	2	1	–	1	–	–	–	6	<b>10</b>	57	21	<b>25</b>
<b>26.</b> <i>Jakub Vyskočil</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	20	<b>24</b>
<b>27.</b> <i>Adam Juttner</i>	G, Nový Jičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	18	<b>22</b>
<b>28.</b> <i>Jakub Gerža</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	105	17	<b>21</b>
<b>29.</b> <i>Josef Lezna</i>	G dr. K. Polesného., Znojmo	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	17	<b>20</b>
<b>30.–32.</b> <i>Maxim Arkhipov</i>	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	16	<b>19</b>
<b>30.–32.</b> <i>Jan Engler</i>	G, Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	16	<b>19</b>
<b>30.–32.</b> <i>Eduard Mrug</i>	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	112	16	<b>19</b>
<b>33.</b> <i>Jakub Vyskočil</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	3	3	–	1	3	5	–	1	<b>16</b>	38	13	<b>16</b>
<b>34.–35.</b> <i>Martin Hraba</i>	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	12	<b>15</b>
<b>34.–35.</b> <i>Emilija Zdravković</i>	Gimnazija Kruševac	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	12	<b>15</b>
<b>36.</b> <i>Dovletgeldi Merdanov</i>	86th specialized school, TM	1	3	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	46	11	<b>13</b>
<b>37.–38.</b> <i>Martin Bánský</i>	G Fr. Švantnera	2	3	–	–	–	–	–	–	<b>5</b>	60	10	<b>12</b>
<b>37.–38.</b> <i>Robin Rádek</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	10	<b>12</b>
<b>39.</b> <i>Johana Kačurová</i>	Evanjelické G JAK, Košice	3	1	2	2	3	–	–	–	<b>11</b>	39	9	<b>11</b>
<b>40.</b> <i>Michal Almáši</i>	G, Park mládeže, Košice	3	–	–	–	–	–	–	–	<b>3</b>	91	8	<b>10</b>
<b>41.</b> <i>Yashwinder Rajput</i>	Bhupindra Int. PS, India	3	3	–	1	–	–	–	–	<b>7</b>	58	6	<b>7</b>
<b>42.</b> <i>Natalia Čigašová</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	3	<b>4</b>
<b>43.–47.</b> <i>Fatma Amin</i>	G, Uherské Hradiště	3	–	–	–	–	–	–	–	<b>3</b>	100	2	<b>3</b>
<b>43.–47.</b> <i>Vojtěch Marek</i>	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	2	<b>3</b>
<b>43.–47.</b> <i>Pragun Pudukoli</i>	NC for Excellence, India	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	2	<b>3</b>
<b>43.–47.</b> <i>Vojtěch Štěpán</i>	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	2	<b>3</b>



**FYKOS**  
*UK, Matematicko-fyzikální fakulta*  
*Ústav teoretické fyziky*  
*V Holešovičkách 2*  
*18000 Praha 8*

www: <https://fykos.cz>

e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

 /FYKOS  @fykosak

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.