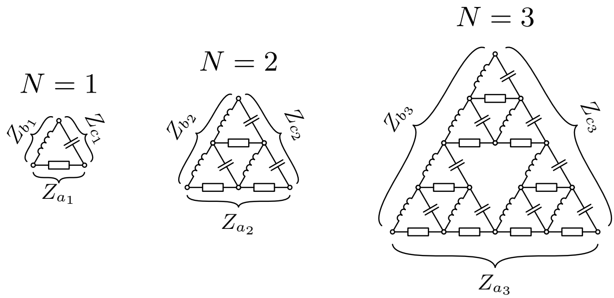
Úloha V.5 ... střídavý trojúhelník
8 bodů; (chybí statistiky)

Postavíme si konečný Sierpińského trojúhelník stupně N (tedy pro $N = 1$ to bude jen trojúhelník, pro $N = 2$ to budou už čtyři trojúhelníky atd.). Na spodních stranách budou vždy rezistory o odporu $R = 150\,\Omega$, na levých stranách cívky o indukčnosti $L = 0{,}4\,\mathrm{H}$ a na zbylých stranách kondenzátory s kapacitou $C = 20\,\mathrm{\mu F}$. Mezi levým a pravým dolním rohem trojúhelníku měříme impedanci. Úhlová frekvence zdroje je $\omega = 50\,\mathrm{s^{-1}}$. Najděte rekurentní vztahy, které tuto impedanci vyčíslí, a určete její hodnotu pro $N = 7$. Nalezněnte rekurentní vztah pro situaci, kdybychom cívky a kondenzátory nahradili odpory R a vyčíslete ji pro $N = 15$.

Honza má rád fraktály.



Obr. 1: Schéma obvodu.

Tuto úlohu bychom mohli řešit standardním středoškolským způsobem, ale množství aritmetiky, které bychom museli provést, by bylo zbytečně veliké. Místo toho použijeme pokročilejší, ale velmi užitečnou metodu, která nám problém výrazně zjednoduší.

Metoda komplexní impedance

Jak název napovídá, budeme používat komplexní čísla. Nejprve se zaměříme na reprezentaci střídavého napětí. Jeho průběh můžeme popsat následujícím vztahem.

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \delta) \ .$$

Užitím Eulerova vzorce pro komplexní exponenciálu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)$ můžeme tento vzorec přepsat na

$$u(t) = \mathrm{Re}\,\bar{u}(t) = \mathrm{Re}\,\bar{U}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \,,$$

kde $\mathrm{Re}\,z$ je reálná část komplexního čísla, $\bar{u}(t)$ je komplexní napětí a $\bar{U}_0$ je komplexní amplituda napětí.

Pokud mezi sebou násobíme dvě komplexní čísla z_1 a z_2, absolutní hodnota výsledku bude součinem absolutních hodnot z_1 a z_2. Argument výsledku[1] bude součtem argumentů z_1 a z_2. Maximální hodnota napětí tedy bude $U_{\max} = \left|\bar{U}_0\right|$ a počáteční fázový posun bude $\delta = \arg\left(\bar{U}_0\right)$.

Pokud připustíme i komplexní impedanci, dostaneme podobné chování – absolutní hodnota komplexní impedance nám dá poměr maximální hodnoty napětí a maximální hodnoty proudu

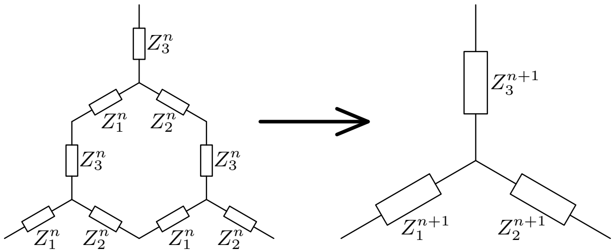
[1] Argumentem komplexního čísla nazýváme orientovaný úhel α mezi reálnou osou a vektorem komplexního čísla. Argument spočítáme jako $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\,z}{\mathrm{Re}\,z}\right)$.

a argument nám dá fázový posuv proudu vůči napětí. Zbývá pouze najít způsob, jak komplexní impedanci spočítat.

To provedeme tak, že cívky a kondenzátory nahradíme odpory s imaginární impedancí. Cívky budou mít impedanci $Z_L = \mathrm{i}\omega L$ a kondezátory $Z_C = -\frac{\mathrm{i}}{\omega C}$. Hodnotu odporu měnit nebudeme – bude mít reálnou impedanci $Z_R = R$.

Řešení obvodu

Klíčovou úvahou je fakt, že libovolnou iteraci obvodu můžeme zjednodušit na konfiguraci hvězda. Předpokládejme, že se nacházíme v n-té iteraci a že známe impedance Z_1^n, Z_2^n, Z_3^n, kde horní index neznačí mocninu, ale číslo iterace. Vezmeme tři kopie tohoto obvodu a postavíme z nich iteraci $n{+}1$, kterou převedeme do tvaru hvězdy s rezistory o impedancích $Z_1^{n+1}, Z_2^{n+1}, Z_3^{n+1}$, viz obrázek 2.



Obr. 2: Zjednodušení n-té iterace obvodu.

Dostaneme soustavu rovnic

$$Z_1^{n+1} + Z_3^{n+1} = Z_1^n + Z_3^n + \frac{1}{\frac{1}{Z_1^n+Z_3^n} + \frac{1}{Z_1^n+2Z_2^n+Z_3^n}},$$
$$Z_2^{n+1} + Z_3^{n+1} = Z_2^n + Z_3^n + \frac{1}{\frac{1}{Z_2^n+Z_3^n} + \frac{1}{Z_2^n+2Z_1^n+Z_3^n}},$$
$$Z_1^{n+1} + Z_2^{n+1} = Z_1^n + Z_2^n + \frac{1}{\frac{1}{Z_1^n+Z_2^n} + \frac{1}{Z_1^n+2Z_3^n+Z_2^n}}.$$

Pravou stranu soustavy můžeme upravit do tvaru

$$Z_1^{n+1} + Z_3^{n+1} = Z_1^n + Z_3^n + \frac{\left(Z_1^n\right)^2 + 2\left(Z_1^n Z_3^n + Z_1^n Z_2^n + Z_2^n Z_3^n\right) + \left(Z_3^n\right)^2}{2\left(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n\right)},$$
$$Z_2^{n+1} + Z_3^{n+1} = Z_2^n + Z_3^n + \frac{\left(Z_2^n\right)^2 + 2\left(Z_1^n Z_3^n + Z_1^n Z_2^n + Z_2^n Z_3^n\right) + \left(Z_3^n\right)^2}{2\left(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n\right)},$$
$$Z_1^{n+1} + Z_2^{n+1} = Z_1^n + Z_2^n + \frac{\left(Z_1^n\right)^2 + 2\left(Z_1^n Z_3^n + Z_1^n Z_2^n + Z_2^n Z_3^n\right) + \left(Z_2^n\right)^2}{2\left(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n\right)}.$$

Po vyřešení soustavy a několika úpravách dostaneme rekurzivní vztah

$$
\begin{aligned}
Z_1^{n+1} &= \frac{3Z_1^n}{2} + \frac{Z_2^n Z_3^n}{2\left(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n\right)}\,,\\
Z_2^{n+1} &= \frac{3Z_2^n}{2} + \frac{Z_1^n Z_3^n}{2\left(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n\right)}\,,\\
Z_3^{n+1} &= \frac{3Z_3^n}{2} + \frac{Z_2^n Z_3^n}{2\left(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n\right)}\,.
\end{aligned}
$$

V dalším kroku dopočítáme počáteční podmínky pro náš rekurzivní vztah. V první iteraci máme konfiguraci trojúhelník. Použijeme tedy transfigurační vzorec, abychom dostali hodnoty impedancí rezistorů v konfiguraci hvězda. Tyto vzorce se pro komplexní impedanci nebudou nijak lišit, protože „předstíráme“, že cívky a kondenzátory jsou pouze rezistory, jenom za jejich odpory na konci výpočtu dosadíme příslušné imaginární hodnoty. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
Z_1^1 &= \frac{\mathrm{i}\omega RL}{R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \doteq (-2{,}991\,15 + 0{,}457\,83\mathrm{i})\ \Omega\,,\\
Z_2^1 &= \frac{-\mathrm{i}\frac{R}{\omega C}}{R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \doteq (149{,}557 - 22{,}891\mathrm{i})\ \Omega\,,\\
Z_3^1 &= \frac{\frac{L}{C}}{R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \doteq (3{,}052\,2 + 19{,}941\,0\mathrm{i})\ \Omega\,.
\end{aligned}
$$

Nyní už máme vše potřebné pro vyčíslení libovolné iterace obvodu. Pokud bychom však měli ručně spočítat impedanci sedmé iterace, byl by to dlouhý a nepříjemný výpočet. Doporučujeme si na to napsat skript, např. v Pythonu, který podporuje aritmetiku komplexních čísel. Po chvilce počítání dostaneme výsledek

$$
\begin{aligned}
Z_1^7 &\doteq (230 + 510\mathrm{i})\ \Omega\,,\\
Z_2^7 &\doteq (1\,640 - 210\mathrm{i})\ \Omega\,,\\
Z_3^7 &\doteq (220 + 540\mathrm{i})\ \Omega\,.
\end{aligned}
$$

Celkovou impedanci obvodu získáme součtem

$$
Z = Z_1^7 + Z_2^7 \doteq (1\,870 + 300\mathrm{i})\ \Omega\,.
$$

Komplexní impedanci můžeme podle diskuse výše interpretovat následovně. Zapišme ji v goniometrickém tvaru

$$
Z = |Z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(Z)} \doteq 1\,890\mathrm{e}^{0{,}159\mathrm{i}}\,\Omega\,.
$$

Okamžitou hodnotu proudu můžeme popsat podobně jako okamžitou hodnotu napětí (tj. komplexně). Platí pro ni

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \mathrm{Re}\,\bar{i}(t) = \mathrm{Re}\,\bar{I}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,,\\
\bar{I} &= \frac{\bar{U}}{Z} \doteq \frac{\bar{U}\mathrm{e}^{0{,}159\mathrm{i}}}{1\,890\,\Omega}\,.
\end{aligned}
$$

Podle pravidel pro násobení komplexních čísel můžeme vidět, že poměr amplitud napětí a proudu bude roven

$$\frac{U_{\max}}{I_{\max}} = |Z| \doteq 1\,890\,\Omega\,,$$

a fázový posun φ bude

$$\varphi \doteq 0{,}159\,.$$

Napětí tedy předbíhá proud a celý obvod se chová jako cívka s rezistorem.

Obvod pouze s odpory

Pokud všechny součástky nahradíme rezistory o odporu R, situace se velmi zjednoduší. Ze tří rekurentních vztahů dostaneme jeden, konkrétně

$$R^{n+1} = \frac{5}{3} R^n\,.$$

Přes vzorec pro transfiguraci opět dopočítáme R^1 jako

$$R^1 = \frac{1}{3} R\,.$$

V tomto případě můžeme rekurzivní vzorec převést na explicitní vyjádření odporu n-té iterace

$$R^n = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} R = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^{n} R\,,$$

což po dosazení vyjde jako

$$R^{15} \doteq 425 R\,.$$

Toto je odpor jedné části, pro celkový odpor mezi dvěma sousedními vrcholy (všimněme si, že nyní je již celý trojúhelník symetrický) máme podobně jako v případě komplexních impedancí

$$R_{\mathrm{c}}^{15} = R^{15} + R^{15} \doteq 851 R \doteq 128\,\mathrm{k\Omega}\,.$$

Jan Benda
`honzab@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.