

Úloha III.3 ... dva solenoidy

5 bodů; průměr 2,73; řešilo 60 studentů

Mějme dvě cívky navinuté na stejné papírové ruličce. První má hustotu vinutí 10 cm^{-1} a druhá 20 cm^{-1} . Rulička měří 40 cm na délku a 1 cm v průměru. Obě cívky jsou navinuté po celé její délce, přičemž druhá je navinutá přes první. Vzhledem k rozměrům ruličky můžeme zanedbat okrajové efekty a pracovat s cívkami jako s ideálními solenoidy. Uvažujme, že je zapojíme do obvodu sériově za sebou. Toto uspořádání můžeme pomyslně nahradit jedinou cívkou. Jaká by byla její indukčnost?

Jindra si hrál s ruličkami od ubrousků.

Indukčnost solenoidu je

$$L = \mu_0 n^2 S l,$$

kde $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}\text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ je permeabilita vakua, n je hustota vinutí (v závitech na jednotku délky), S je plocha průřezu solenoidu a $l = 40\text{ cm}$ je jeho délka. Plocha průřezu je

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

kde $d = 1\text{ cm}$ je průměr papírové ruličky. Po dosazení $S \doteq 0,785\text{ cm}^2$. Cívky jsou navinuté přímo přes sebe, takže magnetické pole první cívky ovlivňuje druhou a naopak. Označme hustotu vinutí první cívky $n_1 = 10\text{ cm}^{-1}$ a hustotu vinutí druhé cívky $n_2 = 20\text{ cm}^{-1}$.

Řešení pomocí úvahy

Záleží na orientaci proudu v obou cívkách. Pokud elektrické proudy v obou cívkách proudí souhlasně, můžeme říct, že se jedná o jednu cívku s hustotou vinutí $n = n_1 + n_2$. Naopak, pokud proudy vedou proti sobě, jde efektivně o jednu cívku s indukčností $n = n_2 - n_1$. Snadno spočítáme výslednou indukčnost podle vztahu $L = \mu_0 n^2 S l$. V prvním případě vyjde $L = \mu_0 (n_2 + n_1)^2 S l = 3,55 \cdot 10^{-4}\text{ H}$, ve druhém případě $L = \mu_0 (n_2 - n_1)^2 S l = 3,94 \cdot 10^{-5}\text{ H}$.

Řešení pomocí vzájemné indukčnosti

Úlohu samozřejmě můžeme řešit i složitěji spočítáním vzájemné indukčnosti cívek a řešením soustavy rovnic. V této konkrétní úloze je tento způsob řešení delší, avšak v jiných složitějších případech nemusí být možné nalézt výsledek pomocí jednoduché úvahy, a tak bude poučné ukázat si i řešení s použitím vzájemné indukčnosti.

Nejprve určíme vzájemnou indukčnost cívek M . Každá cívka vytváří okolo sebe magnetické pole. Pokud se v blízkosti nacházejí další cívky, bude jimi procházet nenulový tok magnetického pole. Při změně toku v čase se bude v okolních cívkách indukovat napětí. Míra ovlivnění dvojice cívek je popsána vzájemnou indukčností

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1},$$

kde Φ_{12} je tok magnetické indukce v cívce 2 způsobený cívkou 1 a I_1 je proud v cívce 1. Vzájemná indukčnost je stejná oběma směry $M_{12} = M_{21}$.

Obě cívky jsou namotány na stejném jádře a obě mají stejnou délku. První cívka má hustotu vinutí $n_1 = 10\text{ cm}^{-1}$ a druhá $n_2 = 20\text{ cm}^{-1}$. Magnetická indukce vytvořená cívkou 1 uvnitř solenoidu je

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1.$$

Tok magnetické indukce druhou cívkou je tudíž

$$\Phi_{12} = N_2 B_1 S = n_2 l B_1 S = \mu_0 n_1 n_2 l S I_1 .$$

Vzájemná indukčnost cívek 1 a 2 je

$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l S .$$

Pro toky magnetické indukce oběma cívkami sestavíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 I_1 \pm M I_2, \\ \Phi_2 &= \pm M I_1 + L_2 I_2, \end{aligned}$$

kde znaménko +, resp. −, vybereme v případě, že proudy v cívkách tečou souhlasně, resp. nesouhlasně. Napětí indukovaná v cívkách jsou

$$\begin{aligned} V_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} \mp M \frac{dI_2}{dt}, \\ V_2 &= \mp M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}. \end{aligned}$$

Cívky jsou zapojeny sériově, takže $I_1 = I_2 = I$. Ze soustavy dvou rovnic můžeme vytvořit jednu rovnici pro celkové napětí na dvojici cívek

$$V_1 + V_2 = V = -(L_1 \pm 2M + L_2) \frac{dI}{dt} .$$

Soustavu našich dvou cívek tak můžeme nahradit jednou cívkou s indukčností $L = L_1 \pm 2M + L_2$. Indukčnost cívky 1 je $L_1 = \mu_0 S l n_1^2$, indukčnost cívky 2 je $L_2 = \mu_0 S l n_2^2$, vzájemnou indukčnost M jsme odvodili výše. V případě souhlasně vedených proudů v cívkách tak dostaneme kombinovanou indukčnost

$$L = \mu_0 S l (n_1^2 + 2n_1 n_2 + n_2^2) = \mu_0 S l (n_1 + n_2)^2$$

a v případě proudů vedených nesouhlasně je indukčnost

$$L = \mu_0 S l (n_1^2 - 2n_1 n_2 + n_2^2) = \mu_0 S l (n_1 - n_2)^2 .$$

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.