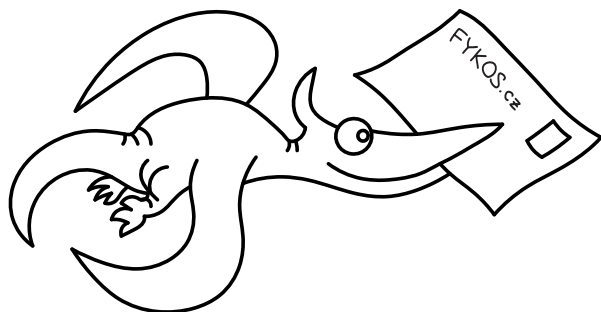


MARTIN VANĚK A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XXXV. ročník – 2021/22



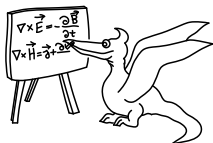
Copyright © Martin Vaněk, 2022
Copyright © MatfyzPress, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy, 2022

ISBN 978-80-7378-469-0



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	14
Zadání experimentálních úloh	111
Řešení experimentálních úloh	112
Fyzika laserové inerciální fúze	142
Kapitola 1: Začínáme slučovat	142
Kapitola 2: Stlačujeme	147
Kapitola 3: Hoříme	151
Kapitola 4: Svítíme	154
Kapitola 5: Stabilizujeme	158
Kapitola 6: Laserujeme	160
Řešení úloh ze seriálu	163
Akce FYKOSu	179
Podzimní soustředění v Dolním Dvoře	179
Jarní soustředění v Hejnicích	180
Fyziklání 2022	182
Fyziklání Online	186
Fyzikální Náboj	188
Den s experimentální fyzikou	189
Pořadí řešitelů	191



Předmluva

Milá čtenářko, milý čtenáři!

Do rukou se Ti dostala publikace, která shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v jeho XXXV. ročníku, který probíhal ve školním roce 2021/22.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol v České republice. Je organizován studenty především Matematicko-fyzikální fakulty UK, ale i jiných škol v České republice i zahraničí, a podporován zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK. Snaží se oslovit studenty se zájmem o fyziku, matematiku a techniku, zkrátka o svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku publikujeme celkem sedm brožur, ve kterých se nachází šest sérií po osmi úlohách. Dvě z nich jsou „jednoduché“ (zaměřené především na první dva ročníky středních škol), jedna „problémová“, vyžadující hlubší zamyšlení, jedna experimentální a jedna „seriálová“. Zbylé tři příklady se týkají libovolného fyzikálního tématu a tvoří jádro série. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které studenti znají z hodin fyziky. Mnohdy vyžadují nějakou hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídka je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení (ať už poštou nebo přes internet). Opravující pak jejich řešení okomentují, obodují a vysvětlí případné chyby. Zpracovaná řešení pošleme zpět řešitelům spolu s výsledkovými listinami, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro řešitele připravujeme i další akce. Pro nejlepší řešitele FYKOSu připravujeme každoročně dvě devítidenní soustředění v některém z malebných koutů Česka. Jejich účastníci si užijí bohatý program plný odborných přednášek z oblasti matematiky, fyziky nebo jiných přírodních věd, ale i her a dalších aktivit v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na zajímavá místa. Tento akademický rok se podzimní soustředění konalo v Dolním Dvoře a jarní soustředění v Hejnicích.

Další FYKOSí akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí nejen jednotlivé katedry MFF, ale i další vědecká pracoviště, např. na Akademii věd ČR. Účastníkům tak umožňujeme navštívit špičkové vědecké laboratoře v Praze a okolí, kde probíhá aktuální fyzikální výzkum.

FYKOS také organizuje největší týmovou fyzikální soutěž v ČR, Fyziklání. Tři hodiny soutěží až pětičlenné týmy středoškoláků v řešení fyzikálních úloh. Vyhrává

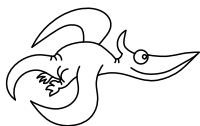
tým s největším bodovým ziskem, přičemž rozhoduje jak správnost, tak i rychlost. Letošní 16. ročník byl spojen s projektem Fyziklani International – Let's Discover European Physics, který byl podpořen Evropskou Unií v rámci programu Erasmus+. Projekt poskytl účastníkům různorodý program od přednášek či exkurzí po národní večer a zúčastnily se ho týmy ze šesti zemí. I díky němu mělo pak Fyziklání silnou mezinárodní účast s účastníky z celkem 8 různých zemí. Celkově na soutěž přijelo 776 účastníků, kteří utvořili 162 týmů. I pro ty, kteří se neúčastnili Fyziklani International, byl připraven doprovodný program po soutěži ve formě přednášek a exkurzí.

Fyzikláním je inspirovaná internetová soutěž Fyziklání Online (v anglické verzi Physics Brawl Online). V listopadu 2021 proběhl její jedenáctý ročník a opět znamenala velký úspěch. Kromě tří kategorií pro středoškoláky, kterým je soutěž určena především, je ve Fyziklání Online také kategorie Open, kde může soutěžit úplně každý. Tohoto ročníku se zúčastnilo přes 3 tisíce lidí ze 47 různých zemí v 715 týmech (602 z těchto týmů byly tvořeny středoškoláky). Tento ročník opět trhal rekordy – zúčastnilo se o téměř 100 týmů více než v minulém (nebo kterémkoliv předchozím) roce.

Kromě toho FYKOS organizuje i další menší akce, o nichž se dozvíte dále v této publikaci nebo na našich webových stránkách.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXXV. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítili čtenáře k samostatnému zamyšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy je seriál o kmitání a vlnění, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci publikace se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud Tě FYKOS zaujal natolik, že by ses chtěl stát řešitelem či organizátorem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://fykos.cz>
 e-mail: fykos@fykos.cz

A jak vypadal XXXV. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 205 studentů ze 127 středních škol z různých koutů světa. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 2 422 došlých řešení a udělili 10 338 bodů.

FYKOS a jeho aktivity jsou financovány Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.



Zadání teoretických úloh

Úloha I.1 ... auta

3 body

Dvě auta vyjedou ve stejný čas ze stejného bodu rychlostmi $v_1 = 100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a $v_2 = 60 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Je možné, aby se auta od sebe vzdalovala některými z následujících rychlostí? Pokud ano, příslušné situace načrtněte.

$$v_a = 160 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, \quad v_b = 40 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, \\ v_c = 30 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, \quad v_d = 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$$

(řešení str. 14)

Úloha I.2 ... pravidlo dvou sekund

3 body

Pravidlo dvou sekund je pomůcka pro řidiče, která tvrdí, že bezpečný rozestup dvou vozidel jsou minimálně dvě sekundy. Mějme dopravní uzel, ve kterém n_1 -proudá silnice přechází v n_2 -proudou. Maximální povolená rychlost v prvním úseku je v_1 . Jaká může být nejmenší možná maximální povolená rychlost v_2 ve druhém úseku, aby se v něm netvořily zácpy a všichni měli možnost dodržet pravidlo dvou sekund? Průměrná délka jednoho auta je l a předpokládáme, že svoji rychlost dokáže měnit skokově.

(řešení str. 15)

Úloha I.3 ... zastavit na bruslích

5 bodů

Na bruslích se dá brzdit metodou „parallel slide“, při které se nože obou bruslí natočí kolmo na směr pohybu, což výrazně zvýší tření s podložkou. Aby bruslař nespádl, musí se naklonit o úhel $\varphi = 35^\circ$ od svislého směru. Předpokládejte, že člověk vážící $m = 70 \text{ kg}$ je i s bruslemi vysoký $H = 1,8 \text{ m}$, přičemž těžiště má ve výšce $h = 1,1 \text{ m}$ nad ledem. Spočítejte, na jak dlouhé dráze zastaví z počáteční rychlosti $v_0 = 15 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

(řešení str. 16)

Úloha I.4 ... klesá ke dnu

7 bodů

Kapsle válcového tvaru (Puddle Jumper – Stargate) s průměrem $d = 4 \text{ m}$, délkou $l = 10 \text{ m}$ a vodotěsnou přepážkou v polovině délky je ponořena pod hladinu oceánu a rychlostí $v = 20 \text{ ft}\cdot\text{min}^{-1}$ klesá ke dnu. V hloubce $h = 1\,200 \text{ ft}$ praskne sklo na přední podstavě a příslušná polovina kapsle se zaplní vodou. Jakou rychlostí bude nyní klesat? Za jak dlouho klesne až na dno v hloubce $H = 3\,000 \text{ ft}$? Osa válce má před prasknutím skla horizontální směr. Předpokládejte, že stěny kapsle jsou vůči jejím rozměrům tenké.

(řešení str. 17)

Úloha I.5 ... mechanicky (ne)stabilní kondenzátor

8 bodů

Představme si nabitý deskový kondenzátor, jehož jedna vodorovná deska je ve fixní pozici a druhá levituje přímo pod ní v rovnovážné pozici. Spodní deska není nijak mechanicky fixována. Jaká bude kapacita takového kondenzátoru v závislosti na přiloženém napětí? Je tento kondenzátor mechanicky stabilní?

(řešení str. 18)

Úloha I.P ... uff, to je vedro

10 bodů

Možná jste si všimli, že sopky na Zemi nemají univerzální tvar – navzájem se mohou dost lišit. Srovnajte například fotografie havajské sopky Mauna Loa a italského Vesuvu. Liší se nejen strmostí stěn, ale i stylem erupcí. Obě tyto vlastnosti úzce souvisí s viskozitou magmatu. Jak viskozita magmatu ovlivňuje styl a nebezpečnost erupcí? Souvisí to nějak s geografickou polohou sopek?

(řešení str. 21)

Úloha II.1 ... stíhání světla

3 body

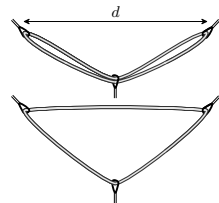
Jindra kráčí po dlouhé osvětlené chodbě. Jeho oči jsou ve výšce 1,7 m nad podlahou, osvětlení na stropě je ve výšce 3,4 m. Jindra se právě nachází ve vzdálenosti 10 m vodorovně od nejbližšího světla a kráčí rychlostí $3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ přímo k němu. Na vyleštěném podlaze vidí odraz světla. Jak rychle se v tento okamžik odraz přibližuje k Jindrovi?

(řešení str. 30)

Úloha II.2 ... fixní stanoviště

3 body

Mějme dvě karabiny ukotvené ve skále ve stejné výšce a ve vzdálenosti d od sebe. Do těchto karabin zacvakneme smyčku celkové délky l . Na ni následně připneme další karabinu, ze které bychom chtěli slanit, přičemž budeme působit směrem dolů silou F . Spočítejte napětí ve smyčce a sílu, kterou působíme na karabiny, v případech, kdy je slaňovací karabina zavěšená na jedné resp. na obou částech smyčky. Při které možnosti je lano napínáno menší silou a která možnost je bezpečnější?



(řešení str. 31)

Úloha II.3 ... model tření

6 bodů

Jaký by byl statický koeficient tření mezi tělesem a podložkou, pokud bychom uvažovali model, ve kterém jsou na povrchu obou těles klínky o vrcholovém úhlu α a výšce d ? Zkuste porovnat vaše výsledky a reálné koeficienty tření.

(řešení str. 32)

**Úloha II.4 ... čepování čaje**

7 bodů

Matěj si chce z várnice natočit čaj do sklenice o hmotnosti M . Jednou rukou drží sklenici a druhou rukou ovládá kohoutek, čímž mění objemový průtok čaje. Rych-

lost výtoku v je konstantní (můžete uvažovat, že rychlost při dopadu do sklenice je stejná). Protože se Matěj nechce moc nadřít, rád by držel sklenici od začátku až do konce čepování konstantní silou.

Jaká musí být závislost výtoku na čase, aby se mu to podařilo? Jak dlouho bude trvat, než se sklenice naplní? (řešení str. 34)

Úloha II.5 ... Shkadov thruster

8 bodů

Před dávnými časy v předaleké galaxii se jedna civilizace rozhodla přestěhovat celou svou sluneční soustavu. Jednou z možností bylo postavit „poloviční Dysonovu sféru“. Tedy konstrukci, která by zachycovala zhruba polovinu záření z hvězdy a odrážela jej všechno jedním směrem. Ideálním tvarem by tak byl rotační paraboloid. Jaký by musel být vztah mezi zářivým výkonem hvězdy, plošnou hustotou takového zrcadla a jeho vzdáleností od hvězdy, aby se mezi nimi udržovala konstantní vzdálenost? (řešení str. 35)

Úloha II.P ... la bomba

10 bodů

Jakého maximálního výkonu dosahuje jaderná bomba? (řešení str. 37)

Úloha III.1 ... Kde těžiště moje?

3 body

Můžeme se setkat s neoficiálním výkladem, že červená, modrá a bílá barva na české vlajce symbolizují krev, oblohu (tedy vzduch) a čistotu. Najděte polohu těžiště takto doslovně interpretované vlajky, přičemž uvažujte, že čistota je nehmotná. Poměr stran je 3 : 2 a rozhraní všech tří částí se nachází přesně ve středu. Hustoty krve a vzduchu si vyhledejte.

Bonus Pokúste sa čo najpresnejšie spočítať polohu ťažiska slovenskej vlajky. Môžete použiť rôzne aproximácie. (řešení str. 45)

Úloha III.2 ... hrajeme si s klíči

3 body

Vašek si rád hraje s klíči tak, že je roztočí na šňůrce a pak si je nechá namotat na ruku. Pro názornost si tuto situaci zjednodušíme modelem, kdy máme ve stavu beztíže hmotný bod o hmotnosti m uchycený na konci nehmotného vlákna délky l_0 . To je druhým koncem připevněno na pevný válec o poloměru r . Vlákno napneme tak, že v bodě uchycení představuje kolmici k povrchu válce, a hmotnému bodu udělíme rychlost \mathbf{v}_0 ve směru kolmém jak na osu válce, tak na napnuté vlákno. To se díky tomu začne na válec namotávat. Jak bude záviset velikost rychlosti hmotného bodu na délce nenamotané části vlákna l ?

Nápověda Najděte veličinu, která je od začátku do konce namotávání konstantní. *Bonus* Za jak dlouho se vlákno namotá celé? (řešení str. 48)

Úloha III.3 ... dva solenoidy

5 bodů

Mějme dvě cívky navinuté na stejné papírové ruličce. První má hustotu vinutí 10 cm^{-1} a druhá 20 cm^{-1} . Rulička měří 40 cm na délku a 1 cm v průměru. Obě

cívky jsou navinuté po celé její délce, přičemž druhá je navinutá přes první. Vzhledem k rozměrům ruličky můžeme zanedbat okrajové efekty a pracovat s cívkami jako s ideálními solenoidy. Uvažujme, že je zapojíme do obvodu sériově za sebou. Toto uspořádání můžeme pomyslně nahradit jedinou cívkou. Jaká by byla její indukčnost? (řešení str. 50)

Úloha III.4 ... laskavý příboj

8 bodů

Blízko pobřeží je rychlost mořských vln ovlivněna přítomností dna. Předpokládejte, že rychlost vln v je funkcí tíhového zrychlení g a hloubky moře h . Platí $v = Cg^\alpha h^\beta$. Pomocí rozměrové analýzy určete rychlost vln v v závislosti na hloubce vody. Číslo C je bezrozměrná konstanta, kterou touto metodou určit nedokážeme.

Kromě rychlosti vln ale koupajícího se Jindru ještě zajímá, z jakého směru k němu vlny dorazí. Definujme souřadnicovou soustavu, ve které hladina vody leží v rovině xy . Linie pobřeží má rovnici $y = 0$, oceán leží v polovině $y > 0$. Hloubka vody h je funkcí vzdálenosti od pobřeží $h = \gamma y$, kde $\gamma = \text{konst.}$ Na širém oceánu, kde je rychlost vln c konstantní (není ovlivněna hloubkou), postupují rovinné vlny, jejichž čela svírají s osou x úhel θ_0 . Najděte diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

popisující tvar čela vlny v blízkosti pobřeží, ale nepokoušejte se ji řešit, není vůbec triviální. Spočítejte, pod jakým úhlem narážejí čela vln na pobřeží.

Bonus Vyřešte diferenciální rovnici a najděte tvar čel vln v blízkosti pobřeží.

(řešení str. 52)

Úloha III.5 ... kovářská

10 bodů

Skřítkci se rozhodli ukovat další magický meč. Vyrábějí jej z tenké kovové tyče o poloměru $R = 1$ cm, na jejímž jednom konci udržují teplotu $T_1 = 400$ °C. Tyč je obklopena obrovským množstvím vzduchu o teplotě $T_0 = 20$ °C. Součinitel přestupu tepla onoho bájného kovu je $\alpha = 12 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ a koeficient tepelné vodivosti má hodnotu $\lambda = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Tyč na výrobu meče je velmi dlouhá. Kde nejbližší zahřívánému konci mohou skřítkci tyč chytit holýma rukama, nemá-li teplota v místě doteku překročit $T_2 = 40$ °C? Proudění vzduchu a tepelné záření neuvažujte. (řešení str. 57)

Úloha III.P ... umělá gravitace

9 bodů

Jak by mohla být na vesmírné lodi realizována umělá gravitace? Jaké by to mělo výhody a nevýhody v závislosti na různých charakteristikách vesmírného plavidla? Je realistická představa, že by v různých patrech vesmírné lodi měla různý směr či že by se rychle měnila, jak někdy můžeme vidět ve sci-fi filmech při „selhání umělé gravitace“? (řešení str. 59)

Úloha IV.1 ... planetově závislé jednotky

3 body

Mnoho jednotek na Zemi je historicky svázáno s vlastnostmi naší planety. Jaké by byly jednotky jako metr, uzel či atmosféra, kdybychom je zavedli stejným způsobem, jako byly původně zavedeny na Zemi, ale přitom bychom bydleli na Marsu? Uvedte jak poměry mezi „zemskými“ a „marťanskými“ jednotkami, tak i jejich vyjádření pomocí jednotek SI. *(řešení str. 61)*

Úloha IV.2 ... rychlodráha

3 body

Matfyz kromě návrhu vlastního piva plánuje postavit i zábavní park. Postaví tam speciální fyzikální bobovou dráhu, na které boby začínají s nějakou nenulovou vertikální rychlostí v_y a rozjíždí se svisle dolů. Dráha se postupně zakřivuje víc a víc do vodorovného směru, přičemž svislá složka rychlosti zůstává konstantní.

Jakou mají boby rychlost ve vodorovném směru v závislosti na výšce, o kterou klesly, a jakou mají celkovou rychlost v závislosti na čase? Boby po dráze jezdí bez tření.

Bonus Jaký je tvar bobové dráhy?

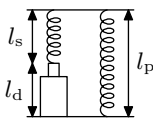
*(řešení str. 63)***Úloha IV.3 ... kyvadlové nárazy**

5 bodů

Dvě malé kuličky jsou upevněny na koncích provázků stejné délky ($l = 42,0 \text{ cm}$) a zanedbatelné hmotnosti. Opačné konce obou provázků jsou uchyceny v tomtéž bodě. Kuličky mají stejnou velikost, liší se však materiálem, z něhož jsou vyrobeny. Jedna je ocelová ($\rho_1 = 7840 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$) a druhá duralová ($\rho_2 = 2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$). Obě závaží pustíme z klidu s počáteční výchylkou 5° , poté dojde k dokonale pružné srážce. Do jaké maximální výšky po ní jednotlivé kuličky vystoupí? Jak to dopadne po druhé srážce? *(řešení str. 64)*

Úloha IV.4 ... analogie

7 bodů



Mějme dvě hookeovské pružiny s modulem pružnosti $E = 2,01 \text{ GPa}$ a píst s viskozitou $\eta = 9,8 \text{ GPa}\cdot\text{s}$. Závislost napětí σ na relativním prodloužení ε je popsána vztahem $\sigma_s = E\varepsilon_s$ pro pružinu a $\sigma_d = \eta\varepsilon_d$ pro píst, přičemž tečka zde značí derivaci podle času. Jednu pružinu délky l_s a píst délky l_d zapojíme do série a poté k nim paralelně připojíme druhou pružinu o délce l_p . Celý tento systém pak náhlým roztahením uvedeme do stavu s $\varepsilon_0 = 0,2$ a toto prodloužení dále držíme konstantní. Určete, za jak dlouho od roztahení poklesne napětí v systému na polovinu původní hodnoty, jestliže platí $\frac{l_s}{l_p} = 0,5$. *(řešení str. 65)*

Úloha IV.5 ... vrtulník

9 bodů

Ptáka Fykosáka už unavovalo létat silou vlastních křídel, a proto začal přemýšlet o stavbě vlastního vrtulníku. Vytvořil si jednoduchý model nosného rotoru a chtěl zjistit, s jakou úhlovou frekvencí ω se má skutečný rotor otáčet. Listy rotoru se zařezávají do vzduchu pod úhlem 45° . Molekuly vzduchu jsou jimi díky tomu

odráženy přímo dolů, čímž vzniká tok hybnosti. Molekuly vzduchu považujte za původně nehybné a srážky s nosnou plochou za dokonale pružné.

Účinná část nosné plochy (tj. část skloněná pod úhlem 45° vůči vodorovnému směru) se nachází ve vzdálenosti $r_1 = 50$ cm až $r_2 = 6,00$ m od osy rotace, průmět listu rotoru do svislého směru má výšku $h = 10,0$ cm. Fykosákův vrtulník bude mít čtyři takové listy.

Kolik otáček za sekundu musí rotor vykonat, aby se vrtulník o hmotnosti $m = 2500$ kg právě udržel na místě? (řešení str. 67)

Úloha IV.P ... zimnou krajinou 11 bodů

Zamyslete se nad tím, jak je možné zjednodušit pohyb člověka krajinou v zimních podmínkách. Vezměte do úvahy různé sklony terénu, typy sněhové pokrývky („prašan,“ mokrý sníh, přemrzlý sníh, led, ...) a pomůcky (sněžnice, lyže, mačky, brusle, ...). Popište, jak dané pomůcky z fyzikálního hlediska fungují, a na základě toho určete, které jsou v jakých podmínkách nejvhodnější. (řešení str. 68)

Úloha V.1 ... ozářená družice 3 body

Průměrně jakou část dne stráví ve stínu Země satelit obíhající na nízké oběžné dráze? Uvažujte, že obíhá po kruhové dráze v rovině ekliptiky ve výšce $H = R/10$ nad povrchem, kde R je střední poloměr Země. (řešení str. 76)

Úloha V.2 ... pecka z třešně 3 body

Elon Musk plánuje kolonizaci Marsu. Aby se to mohlo stát skutečností, musí tomu předcházet výstavba zásobovacích základů na povrchu Měsíce. Pomozte vyřešit zásadní otázku: jak daleko doletí pecka z třešně, kterou 180 cm vysoký člověk na základně na Měsíci plivne vodorovným směrem? Na Zemi by tato pecka dopadla do vzdálenosti 4,3 m.

Bonus Určete poměr vzdáleností, do kterých tentýž člověk doplívne pecku na Zemi a na Měsíci pod libovolným úhlem vzhledem k vodorovné rovině.

(řešení str. 77)

Úloha V.3 ... pod pokličkou 6 bodů

Poklička tvaru dutého válce s kruhovým průřezem o poloměru 6,00 cm leží ve vodorovném umyvadle. Pod ní se nachází vzduch o atmosférickém tlaku 1013 hPa. Při umývání nádobí začneme do umyvadla napouštět vodu o pokojové teplotě. Ta se dostává i pod pokličku a stlačuje tak pod ní uzavřený vzduch. V jistém okamžiku začne poklička plavat. Jak vysoko bude v té chvíli hladina vody? Poklička váží 200 g, má výšku 2,00 cm a její objem můžete zanedbat. (řešení str. 79)

Úloha V.4 ... odpal 7 bodů

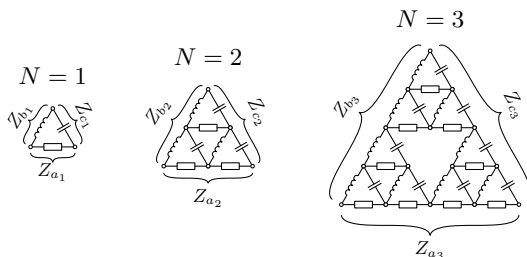
Pták Fykosák odpaloval baseballový míč o hmotnosti m pálkou ve tvaru homogenní tyče s délkovou hustotou λ . Předpokládejme, že tyč je upevněna na jednom svém

konci, přičemž se okolo tohoto bodu může otáčet. Fykosák na ni může působit buď konstantním momentem síly M , nebo ji může roztáčet s konstantním výkonem P . Po otočení o úhel $\varphi_0 = 180^\circ$ narazí konec tyče do dosud nehybného míče a dojde k pružné srážce. Při jaké délce tyče l získá míč největší rychlost? Porovnejte obě situace (tj. konstantní M proti konstantnímu P). (řešení str. 80)

Úloha V.5 ... střídavý trojúhelník

8 bodů

Postavíme si konečný Sierpiňského trojúhelník stupně N (tedy pro $N = 1$ to bude jen trojúhelník, pro $N = 2$ to budou už čtyři trojúhelníky atd.). Na spodních stranách budou vždy rezistory o odporu $R = 150 \Omega$, na levých stranách cívky o indukčnosti $L = 0,4 \text{ H}$ a na zbylých stranách kondenzátory s kapacitou $C = 20 \mu\text{F}$. Mezi levým a pravým dolním rohem trojúhelníku měříme impedanci. Úhlová frekvence zdroje je $\omega = 50 \text{ s}^{-1}$. Najděte rekurentní vztahy, které tuto impedanci vyčíslí, a určete její hodnotu pro $N = 7$. Nalezněte rekurentní vztah pro situaci, kdy bychom cívky a kondenzátory nahradili odpory R a vyčíslíte ji pro $N = 15$.



Obr. 1: Schéma obvodu.

(řešení str. 83)

Úloha V.P ... teploty asteroid

10 bodů

Vymyslete co nejvíce fyzikálních důvodů, proč by asteroid mohl mít vyšší teplotu než okolí. (řešení str. 87)

Úloha VI.1 ... Superman v akci

3 body

Lex Luthor zajal Lois Lane a vyhodil ji z letadla ve výšce h . Superman se za ní rozletí a v nějaké výšce ji chytí. Předpokládejme, že Lois dokáže přežít zrychlení maximálně $10g$. V jaké nejnižší výšce ji může Superman chytit, aby ji stihl zachránit? (řešení str. 89)

Úloha VI.2 ... generační hrozba

3 body

Představte si, že by existovala kometa, která by ohrožovala Zemi jednou za generaci, přičemž by v tomto okamžiku byla ve svém periheliu. V jaké vzdálenosti

od Země bude taková kometa v afelu a jaká bude délka hlavní poloosy a relativní excentricita její dráhy? Neuvažujte jiné gravitační vlivy než od Slunce a předpokládejte, že jedna generace má $g = 20$ let. (řešení str. 90)

Úloha VI.3 ... povětrná bublinka

5 bodů

Bublifikem vytvoříme malou mýdlovou bublinku. Jakou rychlostí bude padat k zemi? Bublinka má vnější poloměr R a plošnou hustotu s . (řešení str. 91)

Úloha VI.4 ... rychlý poločas

7 bodů

Jaká je pravděpodobnost, že se z jednoho molu radioaktivní látky během jednoho poločasu rozpadu rozpadnou tři čtvrtiny původního počtu atomů? Obvykle by se to mělo stát až za dva poločasy rozpadu. Kvůli čemu bychom mohli takovou situaci pozorovat? (řešení str. 93)

Úloha VI.5 ... leť, raketo, leť

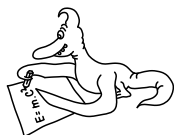
10 bodů

Postavili jsme malou raketu s hmotností $m_0 = 3$ kg, z níž 70 % tvoří palivo. Výtoková rychlost spalin je $u = 200$ m·s⁻¹ a jejich hmotnostní tok je $R = 0,1$ kg·s⁻¹. Raketa je vybavena stabilizačními prvky, takže se nevychyluje z dráhy a startuje z klidu kolmo vzhůru. Předpokládejte, že odporová síla vzduchu je přímo úměrná rychlosti, $F_o = -bv$, kde $b = 0,05$ kg·s⁻¹, v je rychlost rakety a znaménko minus znamená, že síla působí proti směru pohybu. V jaké výšce nad povrchem se bude raketa nacházet v čase $T = 25$ s od zažehnutí motoru? (řešení str. 94)

Úloha VI.P ... přívalový déšť

10 bodů

Je dobré schovávat se před deštěm v lese? Vytvořte vhodný model popisující tuto problematiku. Uvažte například hustotu olistění a intenzitu a délku deště. Popište, za jak dlouho od začátku deště začnou kapky z listů dopadat na zem, za jak dlouho po skončení deště v lese přestane pršet a podobně. (řešení str. 98)



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... auta

Dvě auta vyjedou ve stejný čas ze stejného bodu rychlostmi $v_1 = 100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a $v_2 = 60 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Je možné, aby se auta od sebe vzdalovala některými z následujících rychlostí? Pokud ano, příslušné situace načrtněte.

$$\begin{aligned} v_a &= 160 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, & v_b &= 40 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, \\ v_c &= 30 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}, & v_d &= 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \end{aligned}$$

Ivo chtěl Dana srazit přesně definovanou rychlostí.

Úlohu lze zřejmě řešit metodou „kouknu a vidím“, kdy si hned všimneme, že nejmenší rychlosti (v_b) bude dosaženo při pohybu stejným směrem, největší rychlost (v_a) dostaneme při pohybu od sebe, hodnota v_d bude odpovídat „něčemu mezi tím“ a varianta v_c není možná. Ukážeme si však také, k čemu dospějeme, jestliže se pokusíme poctivě ověřit všechny „samozřejmé“ kroky řešení.

Situaci budeme popisovat pomocí vektorů. Polohu prvního auta v čase t označíme $\mathbf{r}_1(t)$, potom

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{v}_1 t.$$

Pro druhé auto platí obdobná rovnice. Vzájemnou rychlost aut spočítáme jako změnu velikosti jejich vzájemné vzdálenosti vydělenou časem, během kterého ke změně došlo. Po uplynutí času Δt bude platit

$$\mathbf{r}_1(t + \Delta t) = \mathbf{v}_1 \cdot (t + \Delta t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{v}_1 \Delta t.$$

Na toto místo je vhodné zařadit poznámku o použitém značení. Závorky mohou mít dva významy – buď obsahují funkční argumenty (jako třeba u $\mathbf{r}_1(t + \Delta t)$), anebo vyjadřují násobení (například u $\mathbf{v}_1 \cdot (t + \Delta t)$). V tomto případě odlišujeme druhou variantu pro větší názornost tečkou. Zpravidla tomu tak nicméně není a mezi oběma variantami se rozlišuje pouze velikostí mezery, přičemž větší znamená násobení. Konkrétním příkladem může být právě $\mathbf{v}_1(t + \Delta t)$ či $f(x)$ (srovnejte s $f(x)$). Naneštěstí většina autorů ignoruje i toto pravidlo, a význam závorek je tak často nutné odhadovat pouze z kontextu.

Vzájemná vzdálenost bodů, kterou označíme s , není nic jiného než velikost jejich rozdílu

$$s = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.$$

Pro hledanou vzájemnou rychlost dostáváme

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{r}_1(t + \Delta t) - \mathbf{r}_2(t + \Delta t)| - |\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|}{\Delta t} = \\ &= \frac{|(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (t + \Delta t)| - |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) t|}{\Delta t} = |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)|. \end{aligned}$$

Tímto možná až zbytečně složitým výpočtem jsme ukázali to, co jsme byli schopni vytušit už na samém začátku svých úvah, a sice že vzájemná rychlost automobilů je rovna rozdílu jejich rychlostí. Nyní už jen stačí najít všechny vyhovující hodnoty.

Označme úhel mezi vektory rychlostí jako φ . Potom pro trojúhelník se stranami v_1 , v_2 a v platí kosinová věta

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \varphi.$$

Kosinus φ nabývá všech hodnot mezi -1 a $+1$. Pro -1 vyjde $v = v_1 + v_2 = 160 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = v_a$, pro $+1$ dostaneme $v = v_1 - v_2 = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = v_b$. Rychlost v_c zřejmě leží mimo tento interval, protože jí není možné dosáhnout. Konečně rychlost v_d získáme při úhlu

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{v_1^2 + v_2^2 - v_d^2}{2v_1v_2} = \frac{11}{24}, \\ \varphi &\doteq 1,09 \doteq 63^\circ. \end{aligned}$$

Úloha 1.2 ... pravidlo dvou sekund

Pravidlo dvou sekund je pomůcka pro řidiče, která tvrdí, že bezpečný rozestup dvou vozidel jsou minimálně dvě sekundy. Mějme dopravní uzel, ve kterém n_1 -proudá silnice přechází v n_2 -proudou. Maximální povolená rychlost v prvním úseku je v_1 . Jaká může být nejmenší možná maximální povolená rychlost v_2 ve druhém úseku, aby se v něm netvořily zácpy a všichni měli možnost dodržet pravidlo dvou sekund? Průměrná délka jednoho auta je l a předpokládáme, že svoji rychlost dokáže měnit skokově.

Honza trčel příliš dlouho v dopravní zácpě.

Nejprve si určíme, kolik aut projede úsekem silnice za jednotku času. K délce auta připočteme i délku „šedé zóny“, do které se jiný řidič jedoucí za autem nesmí dostat. Efektivní délka auta tedy bude

$$L = l + vt_d,$$

kde t_d představuje právě dvousekundový odstup. Dobu, kterou k projetí úseku potřebuje jedno auto, lze vyjádřit jako

$$T = \frac{L}{v} = \frac{l + vt_d}{v} = \frac{l}{v} + t_d.$$

Převrácená hodnota T nám dá frekvenci – počet aut, která projedou úsekem za jednotku času

$$Q = \frac{1}{T}.$$

Zatím jsme uvažovali pouze jednoproudou silnici. Pro silnici s n jízdními pruhy vynásobíme právě odvozený „průtok“ počtem pruhů n a dostaneme

$$Q = \frac{n}{T},$$

$$Q = \frac{n}{\frac{l}{v} + t_d}.$$

Nyní sestavíme jakousi obdobu rovnice kontinuity z hydrodynamiky. Aby se v uzlu netvořily zácpy, musí se počet aut příjezdících a odjezdících za jednotku času rovnat. Musí tedy platit

$$Q_1 = Q_2,$$

$$\frac{n_1}{\left(\frac{l}{v_1} + t_d\right)} = \frac{n_2}{\left(\frac{l}{v_2} + t_d\right)}.$$

Nakonec z rovnice vyjádříme v_2 a dostaneme výsledek úlohy

$$v_2 = \frac{l}{\frac{n_2}{n_1} \left(\frac{l}{v_1} + t_d\right) - t_d}.$$

Zajímavostí je, že pokud bychom chtěli zvýšit „průtok“ dané silnice tím, že bychom zvýšili maximální rychlost, stane se něco zvláštního. Lze to vystihnout limitou

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{l}{v} + t_d} = \frac{n}{t_d},$$

z níž vyplývá, že i kdyby se auta teoreticky pohybovala nekonečnou rychlostí, bude mít silnice konečnou hodnotu „průtoku“. Jediná možnost jeho zvýšení je proto snížit reakční čas t_d (což by však nebylo bezpečné) nebo přistavět další pruhy.

Úloha I.3 ... zastavit na bruslích

Na bruslích se dá brzdít metodou „parallel slide“, při které se nože obou bruslí natočí kolmo na směr pohybu, což výrazně zvýší tření s podložkou. Aby bruslař nespádl, musí se naklonit o úhel $\varphi = 35^\circ$ od svislého směru. Předpokládejte, že člověk vážící $m = 70 \text{ kg}$ je i s bruslemi vysoký $H = 1,8 \text{ m}$, přičemž těžiště má ve výšce $h = 1,1 \text{ m}$ nad ledem. Spočítejte, na jak dlouhé dráze zastaví z počáteční rychlosti $v_0 = 15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. *Dodo neumí brzdít na bruslích (já taky ne).*

V směre nadol na korčuliara působí zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Aby nespádl, musí mať celková výslednica síl pôsobiacich na korčuliara nulový moment, teda jej vektorová priamka musí prechádzať bodom dotyku a ťažiskom. Veľkosť trecieho zrychlenia a je

$$a = g \operatorname{tg} \varphi.$$

Týmto zrychlením bude korčuliar spomaľovaný. Dráhu d , na ktorej zastane, určíme z rovnosti brzdnéj práce a počiatočnej kinetickej energie

$$mad = mgd \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Vyjadřením dráhy a dosazením číselných hodnot dostáváme

$$d = \frac{v_0^2}{2g \operatorname{tg} \varphi} \doteq 1,26 \text{ m}.$$

Korčuliar tak zastane asi o jeden meter ďalej od miesta, v ktorom začal brzdiť. Pôvodnou rýchlosťou by túto dráhu prešiel len za $t \doteq 0,3 \text{ s}$. Vidíme teda, že aj v prípade korčúľ je reakčný čas nezanedbateľná zložka celého procesu brzdenia.

Úloha I.4 ... klesá ke dnu

Kapsle válcového tvaru (Puddle Jumper – Stargate) s průměrem $d = 4 \text{ m}$, délkou $l = 10 \text{ m}$ a vodotěsnou přepážkou v polovině délky je ponořena pod hladinu oceánu a rychlostí $v = 20 \text{ ft} \cdot \text{min}^{-1}$ klesá ke dnu. V hloubce $h = 1\,200 \text{ ft}$ praskne sklo na přední podstavě a příslušná polovina kapsle se zaplní vodou. Jakou rychlostí bude nyní klesat? Za jak dlouho klesne až na dno v hloubce $H = 3\,000 \text{ ft}$? Osa válce má před prasknutím skla horizontální směr. Předpokládejte, že stěny kapsle jsou vůči jejím rozměrům tenké. Dodo sleduje Stargate Atlantis.

Na kapsulu pôsobia tri rôzne sily – sila tiažová F_g , sila vztlaková F_v a odporová sila prostredia F_o . Vzorec pre odporovú silu závisí na tom, či sa jedná o laminárne alebo turbulentné prúdenie. Najprv odhadneme Reynoldsovo číslo pred prasknutím kapsle

$$\operatorname{Re} \approx \frac{vd\rho}{\eta} \doteq 4 \cdot 10^5.$$

Vyšla nám veľmi vysoká hodnota, takže môžeme prúdenie považovať za turbulentné. To isté bude platiť aj po prasknutí skla, kapsle sa bude zrejme pohybovať ešte rýchlejšie. V oboch prípadoch použijeme Newtonov vzorec pre odporovú silu. Z rovnováhy síl, ktorá musí platiť pre rovnomerný pohyb, dostávame

$$\frac{1}{2}CS\rho v^2 + V\rho g = mg,$$

kde $C = 0,85$ je odporový koeficient pre náš valec,¹ $S = dl$ je prierez valca v smere pohybu, m je hmotnosť kapsle a g je tiažové zrýchlenie.

Po zatopení čelnej časti sa zmenší objem kapsule na polovicu $V' = V/2$, ale jej hmotnosť zostane zachovaná $m' = m$. Zmení sa teda veľkosť príspevku vztlakovej sily. Taktiež sa pri páde orientuje do novej polohy zatopenou časťou nadol, čo zapríčini zmenu koeficientu odporu na hodnotu približne² $C' = 1,5$ a zmení sa

¹<https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a395503.pdf>

²Předpokládáme, že sklo praskne celé čili spodní podstava válce bude otevřená. Nicméně stále se jedná spíše o odhad, konkrétní hodnoty C a C' bychom nejspíš museli změřit.

aj účinný prierez valca $S' = \pi d^2/4$. Po zohľadnení týchto skutočností z rovnakej rovnosti ako na začiatku dostaneme novú rýchlosť klesania

$$\frac{1}{2}C'S'\rho v'^2 + \frac{V}{2}\rho g = mg = \frac{1}{2}CS\rho v^2 + V\rho g,$$

$$v' = \sqrt{\frac{CSv^2 + Vg}{C'S'}} = \sqrt{\frac{Cdlv^2 + \frac{\pi d^2}{4}lg}{C'\frac{\pi d^2}{4}}} = \sqrt{\frac{4Clv^2 + \pi dl g}{C'\pi d}} \approx \sqrt{\frac{lg}{C'}}.$$

Prevedme veličiny s imperiálnymi jednotkami do SI $v \doteq 0,10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $h \doteq 366 \text{ m}$ a $H \doteq 914 \text{ m}$. Po číselnom dosadení dostávame novú rýchlosť kapsule $v' \doteq 8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Vidíme teda, že kapsula bola pôvodne celkom dobre vyvážená (presne ako by sme od ponárajúceho sa plavidla očakávali) a toto vyváženie bolo prudko narušené. Novou rýchlosťou bude kapsuli trvať iba niečo vyše jednej minúty, kým dosadne na dno!

Úloha I.5 ... mechanicky (ne)stabilní kondenzátor

Představme si nabitý deskový kondenzátor, jehož jedna vodorovná deska je ve fixní pozici a druhá levituje přímo pod ní v rovnovážné pozici. Spodní deska není nijak mechanicky fixována. Jaká bude kapacita takového kondenzátoru v závislosti na přiloženém napětí? Je tento kondenzátor mechanicky stabilní?

Vašek vás chtěl ugrilovat kondenzátorem.

Začneme nejdříve komentářem na standardní *pevný* deskový kondenzátor. Kapacita C kondenzátoru je definována jako podíl náboje Q na kondenzátoru a přiloženého napětí U , neboli

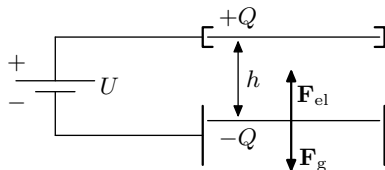
$$C = \frac{Q}{U}.$$

Na první pohled se tak může zdát, že kapacita kondenzátoru je nepřímo úměrná napětí. Avšak nesmíme zapomenout na to, že typicky velikost náboje Q je úměrná napětí U , takže kapacita C kondenzátoru na přiloženém napětí U nezávisí. Kapacita kondenzátoru je typicky dána *pevným* geometrickým uspořádáním vodičů a dielektrik v prostoru. V případě deskového kondenzátoru je jeho kapacita rovna

$$C = \varepsilon \frac{S}{h}, \quad (1)$$

kde ε je permitivita prostředí mezi deskami, S je plocha desek a h je jejich vzdálenost. V této úloze tomu bude jinak, neboť geometrické uspořádání našeho kondenzátoru (vzdálenost jeho desek) *bude záviset* na přiloženém napětí.

Schematický náčrt našeho kondenzátoru je na obr. 2. Na kondenzátor je přiložené stejnosměrné napětí $U > 0$ tak, že je (bez újmy na obecnosti) na horní desce náboj $Q > 0$ a na spodní desce ve vzdálenosti h od horní desky náboj $Q < 0$. Horní deska je fixována, takže veškeré vnější síly jsou vykompenzovány působením uchycení. Na spodní desku působí horní deska přitažlivou elektrickou silou \mathbf{F}_{el} a také tíhová síla $\mathbf{F}_{\text{g}} = m\mathbf{g}$ směřující opačným směrem, kde m je hmotnost spodní desky a g je velikost tíhového zrychlení.



Obr. 2: Schematický náčrt kondenzátoru.

Pro výpočet elektrické síly \mathbf{F}_{el} použijeme pro deskový kondenzátor často používanou aproximaci, podle které je elektrické pole mezi deskami homogenní (elektrická intenzita \mathbf{E}) a vně je nulová. Tato aproximace má dobré opodstatnění, je-li plocha desek S mnohem větší než kvadrát jejich vzdálenosti h^2 ($S \gg h^2$). Nyní si musíme uvědomit, že elektrická síla působící na spodní desku není přímo $-Q\mathbf{E}$, neboť elektrické pole v kondenzátoru je tvořeno jak náboji na horní desce, tak náboji na spodní desce, a do výsledné síly působící na spodní desku interakce mezi náboji na ní nepřispějí. Výsledné elektrické pole mezi deskami se skládá z pole nábojů na horní desce a z elektrického pole nábojů na spodní desce. Ze symetrie pak není těžké vidět, že elektrické pole pouze od nábojů na horní desce je právě $\mathbf{E}/2$. Celková elektrická síla působící na spodní desku je tak

$$\mathbf{F}_{\text{el}} = -\frac{Q\mathbf{E}}{2}.$$

Napětí U mezi deskami je jednoduše rovno $U = Eh$, neboť pole mezi deskami je homogenní. V případě složitějšího (avšak stále stacionárního elektromagnetického) pole uvádíme pro pokročilé, že elektrické napětí mezi body A a B je obecně definované dráhovým integrálem

$$U_{\text{el}} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s},$$

kde $d\mathbf{s}$ je délkový element. Velikost elektrické síly je tak

$$F_{\text{el}} = \frac{QU}{2h}.$$

Z definice kapacity je $Q = CU$, a proto

$$F_{\text{el}} = \frac{CU^2}{2h}. \quad (2)$$

Má-li být spodní deska kondenzátoru v rovnovážné poloze, musí si být velikosti elektrické a tíhové síly rovný, tedy

$$\frac{CU^2}{2h} = mg.$$

Z této rovnice ještě nemůžeme odečíst závislost kapacity na napětí, protože se v ní vyskytuje vzdálenost desek h , která také závisí na napětí. Tu ještě musíme nahradit dosazením h z rovnice (1), čímž dostaneme

$$\frac{C^2 U^2}{2\varepsilon S} = mg.$$

Odtud již získáme hledanou závislost kapacity na přiloženém napětí

$$C = \frac{\sqrt{2mg\varepsilon S}}{U},$$

neboť S a m jsou jenom konstanty.

Nyní se podíváme na stabilitu našeho kondenzátoru, a tedy spodní desky. Dosazením za kapacitu C z rovnice (1) do (2) dostaneme závislost elektrické síly na vzdálenosti desek

$$F_{\text{el}} = \frac{\varepsilon S U^2}{2h^2}. \quad (3)$$

V rovnovážné poloze je velikost této síly rovna velikosti tíhové síly, která na poloze nezávisí. Vychýlí-li se deska směrem nahoru, velikost elektrické síly směřující k horní desce vzroste a způsobí, že se bude spodní deska dále přitahovat k horní desce. Vychýlí-li se deska směrem dolů, velikost elektrické síly směřující k horní desce klesne a převažující tíhová síla bude dále desku urychlovat směrem dolů. Tak jsme odůvodnili, že je náš kondenzátor mechanicky nestabilní.

Tuto úlohu lze také řešit tzv. přes energie. Velikost elektrické síly působící na spodní desku najdeme jako záporně vzatou derivaci energie elektrického pole E_{el} v kondenzátoru podle vzdálenosti h spodní desky od horní desky

$$F_{\text{el}} = -\frac{dE_{\text{el}}}{dh},$$

kde

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{\varepsilon S U^2}{2h}.$$

Opět přikládáme poznámku pro pokročilé. Obecně je síla \mathbf{F} spjatá s její potenciální energií E_p jako záporně vzatý gradient potenciální energie, tedy

$$\mathbf{F} = -\text{grad } E_p \equiv -\nabla E_p.$$

Po provedení derivace dostaneme velikost síly F_{el} přímo ve tvaru (3). Dále se pokračuje jako výše. Přes energie můžeme také vyšetřit stabilitu. Celková potenciální energie E_p spodní desky je rovna součtu potenciální energie tíhové a potenciální elektrické energie,

$$E_p = -mgh - \frac{1}{2} C U^2 = -mgh - \frac{\varepsilon S U^2}{2h}.$$

Extrém (minimum nebo maximum) této potenciální energie, a tedy rovnovážná poloha, se nachází v místě, kde je derivace dE_p/dh nulová. Platí

$$\frac{dE_p}{dh} = -mg + \frac{\varepsilon S U^2}{2h^2} = 0 \quad (4)$$

pro

$$h = U \sqrt{\frac{mg\varepsilon S}{2}}.$$

Rovnice (4) nevyjadřuje nic jiného, než rovnost sil v rovnovážné poloze. O povaze extrému rozhoduje druhá derivace potenciální energie $\frac{d^2 E_p}{dh^2}$. Je-li kladná, jedná se o lokální minimum potenciální energie a poloha je stabilní. Je-li záporná, jedná se o lokální maximum potenciální energie a poloha je labilní. Druhým zderivováním dostaneme

$$\frac{d^2 E_p}{dh^2} = -\frac{\varepsilon S U^2}{h^3} < 0,$$

a tedy jsme opět ukázali, že je náš kondenzátor mechanicky nestabilní.

Úloha I.P . . . uff, to je vedro

Možná jste si všimli, že sopky na Zemi nemají univerzální tvar – navzájem se mohou dost lišit. Srovnajte například fotografie havajské sopky Mauna Loa a italského Vesuvu. Liší se nejen strmostí stěn, ale i stylem erupcí. Obě tyto vlastnosti úzce souvisí s viskozitou magmatu. Jak viskozita magmatu ovlivňuje styl a nebezpečnost erupcí? Souvisí to nějak s geografickou polohou sopek?

Jindrovi už hrabe ze studia „věď“ o Zemi.

V zadání je zmíněno, že sopky nemají všechny stejný tvar. Od toho se odrazíme. Například havajská sopka Mauna Loa má mírný sklon svahu, v poměru ke své výšce se rozprostírá po široké ploše. Oproti tomu italský Vesuv nebo japonská Fudži mají typický kuželovitý tvar, jaký si často laikové představí, když se řekne „sopka“.



Obr. 3: Erupce havajské sopky Mauna Loa v roce 1984. Čedičová láva je vyvrhována do výšky v řádu maximálně desítek metrů a odtéká pryč. (Zdroj: B. Serbert. <https://www.nps.gov/havo/learn/nature/mauna-loa-1984.htm>)

Tvar sopky úzce souvisí se stylem erupcí a s vlastnostmi magmatu. Mauna Loa a sousední Kilauea leží nad havajskou horkou skvrnou (termín „horká skvrna“ si

vysvětlíme později) a produkují čedičové lávy.³ Jelikož čedičová láva má obecně malou viskozitu ($1 \cdot 10^1$ až $1 \cdot 10^2$ Pa·s, asi jako kečup), vzniká štítová sopka s povlnným sklonem svahů. Vesuv a Fudži se nacházejí v místech podsouvání oceánské zemské desky pod kontinentální.

V takových oblastech vzniká magma andezitického složení, které je o jeden až dva řády viskóznější ($\sim 1 \cdot 10^3$ Pa·s) než bazaltické magma. Vyšší viskozita znesnadňuje únik rozpuštěných plynů.⁴ Z bazaltického magmatu bublinky snadno uniknou, erupce čedičových sopek proto nebývají příliš výbušné (viz obrázek 3), láva se poklidně rozlévá do okolí.

Naproti tomu natlakované bublinky ve viskóznějším andezitickém magmatu způsobují explozivní erupce, při kterých kromě výtoku lávy dochází i k vyvrhování pevných částic. Kužel sopky je tvořený střídajícími se vrstvami utuhlé lávy a spadaných sopečných usazenin a nazývá se stratovulkán.

Dělení vyvřelých hornin

Pro lepší pochopení tématu je vhodné se alespoň trochu vyznat v geologii a ve vyvřelých horninách. Vyvřelá hornina je taková, která vznikla krystalizací z taveniny. Vyvřelé horniny, které vznikají ztuhnutím lávy na povrchu země se nazývají výlevné vyvřelé horniny. Minerály ve výlevných horninách tvoří malé, často okem nepostřehnutelné krystalky, protože prudký pokles teploty nedává zárodkům krystalů čas k růstu.

Ne všechno magma tuhne po sopečných erupcích na vzduchu. Ve skutečnosti většina roztavených hornin zkrystalizuje už pod zemí a k povrchu se nikdy nedostanou. Tyto hlubinné vyvřelé horniny mají hrubší krystalickou strukturu, názorným příkladem je žula se svými rozpoznatelnými krystaly křemene, živců a slídy.

Někdy se ještě vyděluje mezistupeň žilných vyvřelých hornin, které vznikají z magmatu, jež si prorazilo v okolní skále úzkou cestu a tuhne v žíle. Odvod tepla je rychlejší než z velkého hlubinného tělesa magmatu, avšak pomalejší než na vzduchu. Krystaly mají střední velikost, bývají však viditelné pouhým okem.

Tak mohou existovat horniny, které mají sice stejné chemické složení, avšak jinou fyzikální strukturu, a proto mají i různé názvy. Povrchovým ekvivalentem hlubinné žuly je světle šedý či načervenalý ryolit. Hlubinným ekvivalentem tmavé vyvřelé výlevné horniny čediče (bazaltu) je gabro.

Jiným důležitým kritériem pro rozdělení vyvřelých hornin je obsah křemíku, potažmo oxidu křemičitého SiO_2 . Z historických důvodů se horniny s vysokým obsahem oxidu křemičitého (> 65 hm. % SiO_2) nazývají kyselé a horniny s nízkým obsahem oxidu křemičitého (42 až 52 hm. % SiO_2) zásadité (bázické). Horniny se středním obsahem SiO_2 jsou podle tohoto názvosloví neutrální a horniny ještě

³Oba názvy „magma“ i „láva“ označují roztavenou horninu. Rozdíl je v poloze. Magma se říká tavenině pod povrchem země, zatímco láva je magma vyvržené na povrch.

⁴Jde o podobný efekt jako při otevření limonády. Při stoupání magmatu k povrchu klesá tlak a tím pádem i rozpustnost plynů – uvolní se bublinky.

zásaditější než zásadité (v zemské kůře vzácné) se jmenují ultrabázické. Tyto názvy nemají nic společného s kyselostí a zásaditostí, jak je známe z chemie.

Známostou kyselou vyvřelou horninou je žula. Ta se skládá z minerálů křemene (čistý SiO_2), draselných a sodnovápenatých živců (taktéž ve své krystalické struktuře obsahují hodně křemíku) a slídy. Příkladem neutrální horniny je andezit, který se skládá ze sodnovápenatých živců a menšího množství křemene, amfibolů, slídy, pyroxenů případně i olivínu.

Příkladem bázické horniny je čedič (bazalt), který se skládá ze sodnovápenatých živců, pyroxenů a olivínu. Pyroxeny a olivíny sice taktéž obsahují křemík, ne však v takovém množství jako křemen nebo živce. Příkladem neutrální horniny je andezit, který se skládá ze sodnovápenatých živců a menšího množství křemene, amfibolů, slídy, pyroxenů případně i olivínu.

Zemská kůra a litosféra

Ze školy si pamatujeme pojmy zemská kůra a litosféra. Oba označují nejsvrchnější vrstvu zemského tělesa. Už však nemusí být jasné, jaký je mezi nimi rozdíl. Rozhraní zemské kůry a pláště je dělení podle chemického složení. Kontinentální zemská kůra se skládá převážně z kyselých hornin, žul, oceánská zemská kůra je hlavně bazaltová, ale svrchní zemský plášť je složen z ultrabázické horniny peridotitu.

Litosféra a astenosféra je dělení na základě fyzikálních vlastností. Litosféra jsou tuhé horniny, které se deformují elasticky. Litosférické desky „plavou“ na astenosféře, což jsou tuhé horniny chovající se plasticky díky vysoké teplotě v hloubkách. Litosféra zahrnuje celou zemskou kůru a zasahuje i do horních vrstev zemského pláště.

Tavení složených látek

Za jakých podmínek se může hornina roztavit? Než si přímo zodpovíme tuto otázku, musíme se podívat na tavení nehomogenních pevných látek. Horniny se skládají z více minerálů a různé minerály mohou mít různé teploty tání.

Znamená to, že minerál s nejnižší teplotou tání se začne tavit jako první, když teplota dostatečně vystoupá? Ne, hornina se začne tavit už při nižší teplotě a začnou se tavit minimálně dva minerály zároveň.

V každém systému, kde jsou při teplotě tání v kontaktu pevná fáze a kapalná fáze⁵ téže chemické látky a kde neodebíráme ani nepřidáváme teplo, se ustanoví dynamická rovnováha.

Molekuly z pevné látky se uvolňují do kapaliny a naopak molekuly z kapaliny krystalizují na povrchu pevné látky. Počet molekul jdoucích jedním směrem se rovná počtu molekul, které jdou opačným směrem. Makroskopicky se jedná o rovnovážný stav.

⁵Část systému, která se liší od ostatních částí jak chemicky, tak fyzikálně, se nazývá fáze. Například voda a olej jsou dvě fáze. Stejně tak voda a led nebo grafit a diamant jsou dvě fáze téže chemické látky.

Klíčovou termodynamickou veličinou, kterou musíme sledovat, je Gibbsova volná energie

$$G = U + pV - TS, \quad (5)$$

kde U je vnitřní energie, p je tlak, V je objem, T je teplota a S je entropie. Diferenciál Gibbsovy energie je

$$dG = dU + p dV + V dp - T dS - S dT,$$

kam můžeme z prvního termodynamického zákona dosadit $dU = \delta q - p dV$, kde q je teplo, čímž dostaneme

$$dG = \delta q - T dS + V dp - S dT.$$

O kusu horniny v hlubinách Země můžeme předpokládat, že se vždy nachází v rovnováze se svým okolím. Jelikož změny teploty a tlaku na geologických škálách jsou pomalé, platí $dp = 0$ a $dT = 0$, a tudíž výraz pro infinitezimální změnu Gibbsovy energie se zredukuje na

$$dG = \delta q - T dS.$$

Hornina v rovnováze s okolím zaujme stav s nejnižší Gibbsovou energií. Proč? Pokud se hornina v rovnováze už nachází, platí rovnost pro změny v rovnovážném stavu $\delta q = T dS$.

Pokud kus horniny v rovnováze není, platí Clausiova nerovnost $\delta q < T dS$. Gibbsova energie tudíž bude klesat, dokud se hornina nedostane do rovnováhy, kdy je Gibbsova energie minimální.

Člen $U + pV$ v rovnici (5) je entalpie $H = U + pV$. To je ekvivalent vnitřní energie pro přesuny tepla při stálém tlaku. Jestliže dodáme látce teplo za stálého objemu, vzroste o stejnou hodnotu její vnitřní energie. Jestliže teplo dodáme za stálého tlaku, vzroste o stejnou hodnotu entalpie látky.

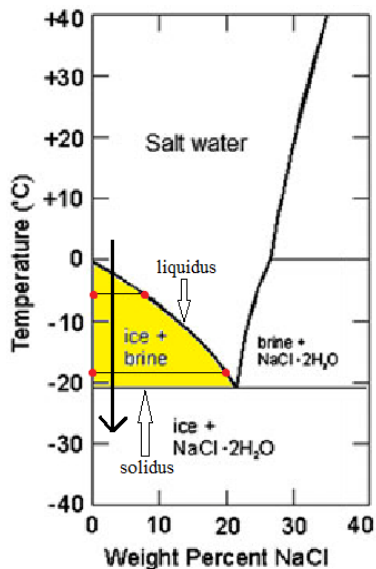
Teoretičtí fyzikové radši pracují s vnitřní energií (protože se s ní snadněji počítá), praktikové rádi používají entalpii (protože se snadněji měří).

Abyste byla Gibbsova energie co nejnižší, systém se pokusí zaujmout stav s co nejnižší entalpií a co nejvyšší entropií. Tyto dva požadavky jsou však protichůdné. Nízká entalpie je podmíněna nízkou teplotou, ale ta znamená nízkou entropii a naopak. Pevné látky mívají nízkou entalpii, avšak také nízkou entropii. Kapaliny mají vyšší entalpii i entropii a plyny ještě víc.

Ke skupenské přeměně může dojít, když se Gibbsovy volné energie obou skupenství rovnají. Vezměme si například vodu za atmosférického tlaku. Teplota tání je 0°C . Při 0°C mají led i kapalná voda stejnou Gibbsovu energii, proto obě skupenství mohou existovat současně. Například ale při 10°C by hypotetický led měl vyšší Gibbsovu energii než kapalná voda, proto je rovnovážným skupenstvím vody při této teplotě kapalina.

Přidání příměsi do čisté kapaliny změní entalpii a podstatně zvýší entropii, Gibbsova energie se sníží a tím pádem poklesne i teplota tání. Toho se využívá například při zimním solení silnic, kdy sůl sníží bod tání vody a nedojde tak k námraze nebo k nahromadění sněhu. Teplotu tání však nemůžeme snížit libovolně.

Například pro směs soli a vody lze dosáhnout minimální teploty tání $-21,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ při 23,3 hm. % soli. Směs s nejnižší možnou teplotou tání se nazývá eutektická. Neutektické směsi začínají tuhnout vždy při vyšší teplotě.



Obr. 4: Fázový diagram tuhnutí směsi vody se solí. Anglický výraz „brine“ označuje solný roztok. (Zdroj: S. M. Badawy. *Laboratory freezing desalination of seawater*, Desalination and water treatment (2015), *upraveno*)

Schéma, jak tání a tuhnutí závisí na složení, můžeme nakreslit do fázového diagramu teplota vs. složení. Křivka, nad kterou je všečen materiál kapalný, se nazývá liquidus. Podobně křivka, pod kterou je všechna látka v pevném skupenství se nazývá solidus. Obě křivky jsou vyznačeny v obrázku 4.

Při tuhnutí eutektické směsi vody se solí se vytvoří dvě fáze – čistý led s minimem soli a dihydrát chloridu sodného $\text{NaCl} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Jak by ale probíhalo tuhnutí neutektické směsi? Vezměme si vodu s trošičkou rozpuštěné soli.

Jak jsme zmínili výše, led začne krystalizovat až při nižší teplotě než $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Jde o čistý led. Molekuly H_2O jsou tak přednostně odstraňovány z roztoku, čímž roste koncentrace soli ve zbylé kapalíně a dále se snižuje teplota tuhnutí. Musíme stále

odebírat teplo, aby mohl krystalizovat další led. Systém se nyní skládá ze dvou fází, ledu a solného roztoku.

Obě fáze mají rozdílné chemické složení od počátečního roztoku. Kdybychom v tuto chvíli fáze oddělili, získali bychom led (čisté H_2O) a koncentrovanější solný roztok než byl původní. Rovnovážné složení roztoku při dané teplotě můžeme zjistit z toho, kde vodorovná čára protne liquidus (pravá červená tečka v obrázku 4).

Až když složení kapaliny dosáhne eutektického složení, další odebrání tepla nesníží teplotu, ale způsobí krystalizaci eutektické směsi. Po utužení je pevná látka opět složena ze dvou fází, krystalků ledu a dihydrátu chloridu sodného, a celá dohromady má stejné chemické složení jako původní roztok.

Při zahřívání pevné látky probíhá celý proces opačně. Jakmile bychom naši směs ledu s dihydrátem soli zahřáli na $-21,2^\circ\text{C}$, růst teploty by se zastavil. Další dodávané teplo se bude spotřebovávat na skupenskou přeměnu a vznik eutektické kapaliny.

První eutektická směs se vytvoří v místech kontaktu krystalků ledu s dihydrátem chloridu sodného. Až roztaje dostatek vody, v níž se rozpustí všechna sůl, bude při dalším dodávání tepla stoupat teplota. Současně s tím se budou rozpouštět zbylé krystalky ledu a budou snižovat koncentraci soli v kapalině. Při teplotě blízké 0°C roztaje poslední led a nám zbude slabý solný roztok.

Tavení hornin

Navzdory populárním představám nejsou horniny v zemském plášti tekuté⁶. Mají sice vysokou teplotu (1 300 až 1 400 $^\circ\text{C}$, ale kvůli obrovskému tlaku v hlubinách se netaví.

V důsledku vysoké teploty jsou však tyto horniny v plastickém stavu. Podobně jako plastelína se pod tlakem deformují. Dochází k difuzi atomů v krystalech a ke vzájemnému posouvání krystalických zrn. Horniny pláště „tečou“ jako kapalina s viskozitou $1 \cdot 10^{20}$ až $1 \cdot 10^{21}$ Pa·s⁷, nicméně stále mají zachovanou krystalickou strukturu. Jde o pevnou látku.

Průběh teploty směrem do nitra Země je na všech místech velice podobný. Do hloubky 100 až 150 km stoupá teplota s hloubkou přibližně jako $25^\circ\text{C}\cdot\text{km}^{-1}$. Hluběji je kvůli vyrovnávání teplot konvekčním prouděním pozvolnější teplotní gradient $0,6^\circ\text{C}\cdot\text{km}^{-1}$. Teplota se tam pohybuje okolo 1 400 $^\circ\text{C}$ a tlaky se pohybují v řádu jednotek gigapascalů (podle hloubky).

Teplota tání s hloubkou taktéž vzrůstá a vždy je vyšší než přirozená teplota podle geotermálního gradientu. Jak se tedy mohou horniny přirozeně roztavit?

⁶Vnější zemské jádro je sice roztavené, avšak jeho materiál se nemísí s pláštěm a nikdy se nedostane na povrch.

⁷To je nepředstavitelně vysoká viskozita podobná viskozitě skla nebo pianové struny, avšak na geologických časových škálách se deformace projeví.

Známe tři způsoby vzniku magmatu.

- **Adiabatický vzestup horniny.** Ze zemského pláště může stoupat materiál konvekčním pohybem. Pokud horninové těleso stoupá příliš rychle, nemá čas vyrovnat teplotu s okolím a chladne adiabaticky. Adiabata má však mírnější pokles teploty než přirozený gradient a může protnout solidus. Toto se děje na divergentních okrajích litosférických desek – tam, kde vyniká nová oceánská kůra.
- **Příměs vody v hornině snižuje teplotu tání.** V oceánské kůře se nachází mnoho hydratovaných minerálů. Při subdukci oceánské desky do hlubin dojde k restrukuralizaci minerálů, voda se uvolní, vystoupá do vyšších vrstev pláště, kde její přítomnost sníží teplotu tání. Takto vznikají andezitická magmata.
- **Roztavení při kontaktu s místem s vysokou teplotou.** Na některých místech rozhraní zemského jádra a pláště dochází k silnému ohřevu pláště. Mechanismus vzniku takové nerovnováhy není dosud přesně znám. Každopádně horký materiál stoupá konvekcí. Toto magma se sice nedostane až na povrch, pod litosférou se „rozplácne“, ale jelikož má vyšší teplotu, začne tavit nad ní ležící horniny pláště. Taková oblast se nazývá horká skvrna.

V zemském nitru není dostatek tepla, aby došlo k úplnému roztavení horniny. Skupenské teplo tání tomu brání. Magmata proto obvykle mají eutektické složení. Velice často bývá magma tvořeno směsí taveniny a pevných krystalků.

Křemík ovlivňuje viskozitu

Každá vyvřelá hornina byla kdysi roztaveným magmatem. Právě obsah křemíku vysoce ovlivňuje viskozitu taveniny. Kationty křemíku Si^{4+} vytváří pevnou strukturu se čtyřmi anionty kyslíku O^{2-} uspořádanými do vrcholů čtyřstěnu.

Tato skupina $[\text{SiO}_4]^{4-}$ má čtyři elektrony navíc, které u atomů kyslíku dychtivě čekají na jiné atomy či molekuly, s nimiž by mohly vytvořit vazbu. Skupiny SiO_4 se velmi ochotně spojují navzájem.

V čedičovém magmatu s menším obsahem křemíku se čtyřstěny $[\text{SiO}_4]^{4-}$ vyskytují osamoceně nebo v malých skupinkách. Jenže v magmatu žulového složení se čtyřstěny spojují do řetězců, do 2D a 3D struktur a tím zvyšují viskozitu magmatu o několik řádů. Viskozita magmatu výrazně ovlivňuje styl erupcí.

Typy sopečných erupcí

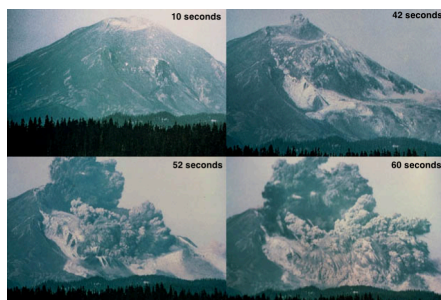
Magma není tvořeno jen roztavenou horninou a případně neroztavenými krystalky, v magmatu se nachází i množství rozpuštěných těkavých látek, hlavně H_2O a CO_2 . Když magma stoupá k povrchu, s klesajícím tlakem se snižuje rozpustnost, a tak se začínají tvořit bublinky. V málo viskózním čedičovém magmatu můžou bublinky celkem volně cestovat, spojovat se, a nakonec vystoupat na povrch, kde volně uniknou.

Ve viskóznějším andezitickém nebo ryolitickém (žulovém) magmatu zůstávají bubliny ale uvězněny. S tím, jak se magma blíží k povrchu, bubliny rostou. 3D

sít vysokoviskózního magmatu s bublinami v jednu chvíli už nevydrží další růst bublin a promění se na vysokotlaký plyn s částicemi horké hmoty. A to je vlastně okamžik erupce, kdy se do okolí rozprsknou kusy magmatu jako sopečné pumy a sopečný popel.

Pokud se viskózní magma nachází pod silnější vrstvou horniny, tlak se může dlouho akumulovat, až dojde k silné erupci pliniovského typu. Při ní je vyvržen sloupec sopečného popela vzhůru k nebesům. Po ochlazení částčky popela klesají na zem a vytvoří sopečný spad. Nebezpečné je, pokud výbuch nemíří vzhůru, ale do strany nebo pokud se mrak stoupající nahoru ochladí a spadne zpět na sopku. V takovém případě se dá do pohybu dolů po svahu mračno horkého sopečného popela, které spálí vše, co mu přijde do cesty.

Teplota pyroklastického proudu se pohybuje od jednotek stovek do tisíce stupňů Celsia a rychlost dosahuje řádu stovek kilometrů za hodinu. Pyroklastický proud smetl v roce 1902 město Saint-Pierre na Martiniku. Podobně pyroklastický proud na konci své dráhy, když už ztratil větší část energie a také zchladl, pohřbil v roce 79 město Pompeje. Příkladem z nedávné doby je výbuch sopky Mount St. Helens (viz obrázek 5).



Obr. 5: Explosivní erupce sopky Mount St. Helens v roce 1980. Časový údaj se vztahuje k době uplynulé od zemětřesení, které spustilo sesuv svahu a erupci.

Vznikl pyroklastický proud, který doputoval až 31 km od sopky. (Zdroj: G.

Rosenquist.

https://volcanoes.usgs.gov/volcanic_ash/mount_st_helens_1980.html)

To ale nutně neznamená, že by vulkanismus čedičových sopek byl méně nebezpečný. Jejich erupce nebývají tak divoké, ale při velkých erupcích se globální hrozbou stávají plyny uvolněné z magmatu, které mohou ovlivnit klima. Jako extrémní příklad si vezmeme například masivní výlevný vulkanismus z doby před 252 miliony let na území dnešní Sibíře. Je pravděpodobné, že sopečné plyny a prach uvolněné do atmosféry změnilo klima a způsobily permské vymírání druhů.

Z historicky nedávných erupcí se jedná například o erupci vulkánu Laki na Islandu v roce 1783. Laki není klasická sopka s kuzelem. Šlo o erupci podél trhliny – láva vytékala z mnoha kráterů podél linie dlouhé 25 km. Fluor uvolněný při erupci

popadal na islandské pastviny, z čehož se otrávil a zahynula polovina dobytka. Na ostrově vypuknul hladomor, který nepřežilo 20 % populace.

Do atmosféry se uvolnilo $1,2 \cdot 10^8$ t oxidu siřičitého SO_2 , který způsobil globální ochlazení. Následující zimu provázely tuhé mrazy, například v Americe zamrzla řeka Mississippi. Jako důsledek erupce tak můžeme označit i povodně v Čechách na jaře 1784, které poničily Karlův most v Praze.

Geografické rozmístění sopek

Jistě jste si na mapách všimli, že rozmístění sopek není rovnoměrné. Sopky se koncentrují na rozhraní litosférických desek, ale existují i nějaké sopky mimo tato rozhraní (například na Havaji nebo na Kanárských ostrovech). Nejvíce vulkanické činnosti se vyskytuje na divergentních rozhraních oceánických desek, kde dochází ke tvorbě nové oceánské kůry.

Tuhnoucí bazaltická láva vytváří na mořském dně v kontaktu s vodou takzvanou polštářovou lávu – na povrchu lávy se kvůli odvodu tepla vytvoří tenká pevná krustička, avšak zevnitř působící tlak přibývající lávy po chvíli krustu na jednom místě prolomí a vytvoří se nová lávová boule. Stejný proces se pak opakuje pořád a pořád dokola.

Tento typ vulkanické činnosti však často zůstává mimo pozornost, protože nepředstavuje žádné nebezpečí. Při tuhnutí lávy dochází k vázání molekul vody k některým minerálům, což má potom význam při subdukci oceánské desky pod kontinentální desky.

Při střetu oceánské a kontinentální desky se hustší materiál oceánské desky začne zanořovat. V hloubkách okolo 100 km dojde k metamorfické přeměně minerálů, voda uzavřená v hornině se uvolní a způsobí snížení teploty solidu a dojde k tavení magmatu. Díky přítomnosti vody je eutektické složení taveniny posunuto ve prospěch SiO_2 a vzniká andezitické magma.

Případně je možné, že od andezitického magmatu se ohřejí horniny zemské kůry, jež jsou převážně tvořené žulou, a tak vznikne ještě viskóznější ryolitické magma. Sopečné erupce nad místy podsouvání oceánské desky pod kontinentální mají opravdu výbušný charakter. Jako příklad může sloužit dobře zdokumentovaná exploze Mount St. Helens z roku 1980 nebo už dříve zmíněný Vesuv.

Samostatnou kategorií jsou sopky sedící na horkých skvrnách. Výskyt horkých skvrn je nezávislý na deskové tektonice, a tak tyto sopky jsou po zemské povrchu rozestry náhodně.

Tok horkého materiálu způsobujícího horkou skvrnu začíná na rozhraní zemského jádra a pláště. Díky rozdílu hustot horkého a studenějšího materiálu může tento horký materiál vystoupat až k zemské kůře, kde se zastaví pod horninami s nižší hustotou, protože zemská kůra má v průměru nejnižší hustotu ze všech částí zemského nitra.

Horký materiál se „rozplácne“ a vytvoří plášťový chochol. Od horkého materiálu se zahřejí a roztaví horniny nad ním. Charakter vulkánu nad horkou skvrnou je

tak určen tím, jestli se horká skvrna nachází pod oceánskou kůrou nebo pod kontinentální kůrou. Z oceánské kůry, která má většinou bazaltické složení, vznikají štítové sopky jako na Havaji.

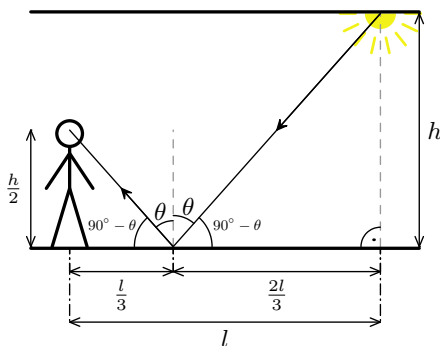
Naopak na horkých skvrnách pod kontinentální kůrou vznikají supervulkány, protože tavením kontinentální kůry vzniká vysoce viskózní žulové magma, které v sobě dokáže naakumulovat tlak potřebný k superexplozi. Příkladem je supervulcán Yellowstone v Severní Americe.

Úloha II.1 . . . stíhání světla

Jindra kráčí po dlouhé osvětlené chodbě. Jeho oči jsou ve výšce 1,7 m nad podlahou, osvětlení na stropě je ve výšce 3,4 m. Jindra se právě nachází ve vzdálenosti 10 m vodorovně od nejbližšího světla a kráčí rychlostí $3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ přímo k němu. Na vyleštěné podlaze vidí odraz světla. Jak rychle se v tento okamžik odraz přibližuje k Jindrovi? Jindra si vzpomněl na chození po chodbě na základní škole.

Podle zákona odrazu musí být úhly dopadu a odrazu světla stejné. Proto se světelné paprsky odráží do Jindrových očí pod stejným úhlem, pod jakým dopadají z osvětlení na podlahu. Situaci můžeme vidět na obrázku 6.

Pro nalezení bodu dopadu paprsku využijeme podobnosti dvou pravoúhlých trojúhelníků. První z nich je tvořen Jindrovými očima, bodem dopadu a patou kolmice na podlahu. Druhý je tvořen osvětlením, bodem dopadu a opět patou kolmice na podlahu, tentokrát však tou procházející světlem.



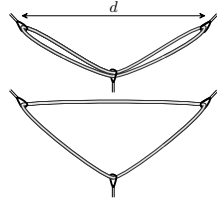
Obr. 6: Náčrt situace, jak Jindra (vlevo), kráčející po chodbě směrem ke světlu, vidí odraz světla na podlaze.

Výška světla nad podlahou je $h = 3,4 \text{ m}$, zatímco Jindrovy oči jsou ve výšce $h/2 = 1,7 \text{ m}$. Z podobnosti trojúhelníků vyplývá, že jejich vodorovné strany musí být ve stejném poměru, jako ty svislé, tj. $1 : 2$. Označíme-li celkovou vodorovnou vzdálenost Jindry a světla jako l , daného poměru dosáhneme se vzdálenostmi $l/3 = = l_J$ (od Jindry k bodu dopadu) a $2l/3$ (od bodu dopadu ke světlu).

Ať se Jindra pohybuje jakkoli, odraz světla se vždy musí nacházet ve třetině l . Vzdálenost mezi Jindrou a osvětlením se zkracuje rychlostí $v = 3 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Tím pádem se třetinová vzdálenost mezi Jindrou a odrazem světla na podlaze musí zkracovat třetinovou rychlostí $v_J = v/3 = 1 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Jinými slovy, Jindra se ke světlu přibližuje rychlostí $v = 3 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Odraz světla na podlaze se ke světlu přibližuje rychlostí $v_o = 2 \cdot v/3 = 2 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Z toho vyplývá, že Jindra a odraz světla se k sobě vzájemně přibližují rychlostí $v_J = v - v_o = 1 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Úloha II.2 ... fixní stanoviště

Mějme dvě karabiny ukotvené ve skále ve stejné výšce a ve vzdálenosti d od sebe. Do těchto karabin zacvakneme smyčku celkové délky l . Na ni následně připneme další karabinu, ze které bychom chtěli slanit, přičemž budeme působit směrem dolů silou F . Spočítejte napětí ve smyčce a sílu, kterou působíme na karabiny, v případech, kdy je slaňovací karabina zavěšená na jedné resp. na obou částech smyčky. Při které možnosti je lano napínáno menší silou a která možnost je bezpečnější?



Dodo snil o lezení na skalách.

Úloha je cvičení na rozklad síl. Důležitou roli bude preto mat geometria jednotlivých případov.

Začnime situáciou, keď sú cez zlaňovaciú karabínu vedené oba pramene. Rozložme najprv silu pôsobiacu v zlaňovacej karabíne do smeru slučky. Pre uhol α zovretý medzi slučkou a zvislicou je

$$\sin \alpha = \frac{d/2}{l/4} = \frac{2d}{l}.$$

Napätová sila v slučke má veľkosť danú vzťahom, ktorú odvodíme z

$$F = 2 \cdot 2F_s \cos \alpha = 4F_s \sqrt{1 - \frac{4d^2}{l^2}}$$

a tak je daná vzťahom

$$F_s = \frac{F}{4} \left(1 - \frac{4d^2}{l^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Sila v istiacich karabínach je jednoducho dvojnásobok

$$F_k = \frac{F}{2} \left(1 - \frac{4d^2}{l^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{F}{2} \frac{l}{\sqrt{(l-2d)(l+2d)}}.$$

Situácia v druhom prípade je trochu komplikovanejšia. Dĺžka ramena rovno-ramenného trojuholníka vytvoreného slučkou je $\frac{1}{2}(l-d)$, a preto je uhol β medzi slučkou a zvislicou v zlaňovacej karabíne v tomto prípade $\sin \beta = \frac{d/2}{(l-d)/2} = \frac{d}{l-d}$. Napätovú silu v slučke určíme z rovnováhy síl v zlaňovacej karabíne ako v prvom

případe, lenže berieme vo výraze jednu polovicu a nie štvrtinu (cez karabínu ide len jeden prameň)

$$F_s = \frac{F}{2} \frac{1}{\cos \beta} = \frac{F}{2} \left(1 - \frac{d^2}{(l-d)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Následne musíme zložiť sily v karabíne istenia. Na túto karabínu pôsobia dve napätové sily F_s , ktoré zvierajú uhol $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$. Ich zložením tak máme

$$\begin{aligned} F_k &= 2F_s \cos \frac{\gamma}{2} = 2F_s \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}} = \frac{F}{\cos \beta} \sqrt{\frac{1 + \sin \beta}{2}} = \\ &= \frac{F}{\sqrt{2}} (1 - \sin \beta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{F}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{l-d}{l-2d}}. \end{aligned}$$

Z praktického hľadiska nás pri tradičnom lezení, keď si istenie počas lezenia budujeme, zaujíma hlavne sila pôsobiaca v istiacich bodoch a šité ploché slučky sú v takejto zostave obvykle najsilnejší prvok. Ak si tieto závislosti vykreslíme, ľahko vidíme, že v oboch prípadoch sa situácia stáva nebezpečnou so vzdialenosťou istiacich bodov približujúcou sa polovici dĺžky slučky. To je situácia, keď je slučka v bode zlaňovacej karabíny skoro napriamo. Ďalej vidíme, že v druhom prípade je sila F_k väčšia s faktorom 1,4 – 1,5. V prípade, keď sú cez karabínu vedené dva pramene slučky sú teda pôsobiace sily nižšie. Nevýhodou zakreslenej konfigurácie tohto prípadu je redundancia. Ak na hornom obrázku zlyhá jeden z istiacich bodov, zlyhá sústava celá, zatiaľ čo na spodnom obrázku musia pre úplné zlyhanie zlyhať oba istiace body. Toto sa dá v praxi riešiť iným vedením lana v dvojprameňovom prípade tak, že pri zlyhaní jednej z istiacich karabín sú v slučke stále cvaknuté aj istiaci bod aj zlaňovacia karabína.

Úloha II.3 ... model tření



Jaký by byl statický koeficient tření mezi tělesem a podložkou, pokud bychom uvažovali model, ve kterém jsou na povrchu obou těles klínky o vrcholovém úhlu α a výšce d ? Zkuste porovnat vaše výsledky a reálné koeficienty tření. *Karel se inspiroval u KorSemu.*

Statický koeficient tření f je definován jako podíl statické třecí síly F_t , která působí proti směru pohybu, ku normálové tlakové síle F^n působící na dané těleso

$$f = \frac{F_t}{F^n}.$$

V našem modelu musíme najít tyto síly a pomocí nich vyjádřit f . Začíná-li těleso v klidu, působí na něj pouze tíhová síla F_g . Abychom jej uvedli do pohybu, začneme na něj působit silou F v horizontálním směru.

Stykové plochy tvoří jednotlivé zuby, které zjednodušeně představují nakloněnou rovinu. My se zaměříme pouze na jednu takovou „nakloněnou rovinu“. Na ni působí kolmo na sebe dvě síly

$$\frac{F_g}{N} \quad \text{a} \quad \frac{F}{N},$$

kde N představuje počet stykových ploch (zubů), mezi které se síly dělí. Síly rozdělíme na složky normálové a tečné stejně jako na nakloněné rovině pod úhlem $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

$$\begin{aligned} F_g^n &= \frac{F_g}{N} \cos \beta, & F^n &= \frac{F}{N} \sin \beta, \\ F_g^t &= \frac{F_g}{N} \sin \beta, & F^t &= \frac{F}{N} \cos \beta. \end{aligned}$$

Má-li se těleso uvést do pohybu, musí se tečná složka námi působené síly F^t vyrovnat tečné složce tíhové síly F_g^t

$$\begin{aligned} \frac{F}{N} \cos \beta &= \frac{F_g}{N} \sin \beta, \\ F \sin \frac{\alpha}{2} &= F_g \cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Při úpravě jsme použili identitu $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Doteď jsem se zaměřovali na jednotlivé zuby, ty jsou ale v porovnání s celým tělesem „zanedbatelně“ malé. Z makroskopického hlediska se nám povrch může jevit hladce a samotná tíhová síla se nám jeví jako tlaková normálová síla, platí tedy $F_g \approx F^n$. Stejně tak se nám tečná složka tíhové síly jeví jako třecí síla vzdorující pohybu, kterou musíme překročit působením horizontální síly, tudíž $F' \approx F^t$.

Úspěšně se nám podařilo vyjádřit jednotlivé síly. Finální úpravou získáme

$$\begin{aligned} f &= \frac{F_t}{F^n} \approx \frac{F'}{F_g} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \\ f &\approx \cotg \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Vyšlo nám, že koeficient statické třecí síly závisí pouze na úhlu α , a nikoli na výšce zubu či hmotnosti tělesa, což odpovídá i reálné situaci. Úhel α nás zajímá v rozsahu $(0, \pi)$. Při překročení těchto mezí se situace začne zrcadlit.

Nyní se podíváme na krajní situace. Při $\alpha \approx 0$ jsou zuby extrémně ostré a koeficient se limitně blíží nekonečnu. Naopak, pokud se $\alpha \approx \pi$, zuby prakticky vymizí a styková plocha je rovná, třecí síla je tudíž nulová.

V reálném světě se setkáváme s koeficienty statického tření převážně v rozmezí $(0, 1)$, těm odpovídá úhel α_r v rozmezí $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Avšak i koeficienty tření větší než 1 existují, zajímavým příkladem je svařování za studena. Při tomto procesu se spojují dva objekty ze stejného materiálu (nejčastěji kovy) bez použití svařovacích aditiv. Atomy na dotykové ploše „neví“, k jaké části desek patří, a proto mohou přilnout k sobě.

Úloha II.4 . . . čepování čaje

Matěj si chce z várnice natočit čaj do sklenice o hmotnosti M . Jednou rukou drží sklenici a druhou rukou ovládá kohoutek, čímž mění objemový průtok čaje. Rychlost výtoku v je konstantní (můžete uvažovat, že rychlost při dopadu do sklenice je stejná). Protože se Matěj nechce moc nadřít, rád by držel sklenici od začátku až do konce čepování konstantní silou.

Jaká musí být závislost výtoku na čase, aby se mu to podařilo? Jak dlouho bude trvat, než se sklenice naplní? Matěj si rád čepuje čaj.

Matěj musí působit jednak proti tíze skleničky o hmotnosti M , jednak proti hmotnosti napuštěné vody

$$m(t) = \int_0^t \rho Q(t') dt'$$

a jednak proti hybnosti dopadajícího proudu vody $F_h(t) = \rho Q(t)v$. Požadujeme, aby celková síla F byla konstantní v čase, což znamená

$$F = Mg + \rho g \int_0^t Q(t') dt' + \rho v Q(t) .$$

Dostáváme

$$Q(t) = K - \frac{g}{v} \int_0^t Q(t') dt' , \quad (6)$$

kde $K = \frac{F - Mg}{\rho v}$. Celou rovnici zderivujeme

$$\dot{Q}(t) = -\frac{g}{v} Q(t) ,$$

což je velmi známá rovnice pro exponenciální rozpad, jejímž řešením je

$$Q(t) = K e^{-\frac{g}{v}t} ,$$

kde K je integrační konstanta, kterou jsme rovnou určili z nezderivované rovnice (6) dosazením $t = 0$. Hmotnost čaje v plném hrnečku označíme m_0 a vyjádříme závislost hmotnosti načepovaného čaje na čase

$$m(t) = \rho K \int_0^t e^{-\frac{g}{v}t'} dt' = \rho K \frac{v}{g} \left(1 - e^{-\frac{g}{v}t}\right) = \left(\frac{F}{g} - M\right) \left(1 - e^{-\frac{g}{v}t}\right) .$$

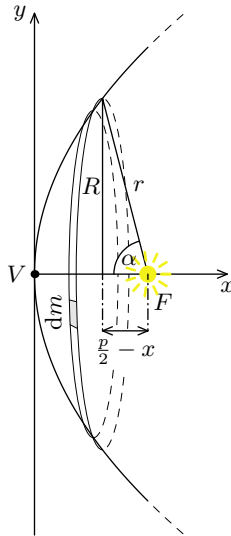
V dalším kroku zjistíme dobu t_0 , kterou bude trvat, než Matěj načepuje hmotnost $m_0 = m(t_0)$

$$m_0 = \left(\frac{F}{g} - M\right) \left(1 - e^{-\frac{g}{v}t_0}\right) \Rightarrow t_0 = \frac{v}{g} \ln \left(\frac{F - Mg}{F - Mg - m_0 g}\right) .$$

Všimněme si zajímavého faktu – pokud chceme konstantní silou F držet i plně načepovanou sklenici (tj. aby nám ruka se sklenicí nevystřelila nahoru, až zavřeme kohoutek), potřebujeme, aby platilo $F = (M + m_0)g$. Potom nám čepování čaje zabere nekonečný čas.

Úloha II.5 ... Shkadov thruster

Před dávnými časy v předaleké galaxii se jedna civilizace rozhodla přestěhovat celou svou sluneční soustavu. Jednou z možností bylo postavit „poloviční Dysonovu sféru“. Tedy konstrukci, která by zachycovala zhruba polovinu záření z hvězdy a odrážela jej všechno jedním směrem. Ideálním tvarem by tak byl rotační paraboloid. Jaký by musel být vztah mezi zářivým výkonem hvězdy, plošnou hustotou takového zrcadla a jeho vzdáleností od hvězdy, aby se mezi nimi udržovala konstantní vzdálenost? *Karel sleduje Kurzgesagt.*



Obr. 7: Schéma „poloviční Dysonovy sféry“ tvaru rotačního paraboloidu.

Má-li konstrukce tvaru rotačního paraboloidu odrážet všechno zachycené záření jedním směrem, měla by se hvězda, jakožto zdroj záření, nacházet v jeho ohnisku. Zároveň ze zadání víme, že má být zachycena pouze polovina záření, paraboloid je tedy useknutý tak, že se nachází pouze v jednom poloprostoru od hvězdy. Uspořádání je znázorněno na obrázku 7. Pro udržení konstantní vzdálenosti mezi hvězdou a zrcadlem je třeba, aby výslednice sil mezi těmito objekty byla nulová. V systému působí dvě síly – přitažlivá gravitační síla mezi hvězdou a zrcadlem a proti ní

síla způsobená tlakem záření. Ta má za následek odtlačování zrcadla od hvězdy a v ideálním případě přesně kompenzuje zmíněné gravitační přitahování.

Můžeme tedy najít vztah spojující parametry systému tak, aby výslednice sil působící na paraboloid byla nulová. Ale co výslednice sil působících na hvězdu? Ta bude přitahována stejnou gravitační silou, jakou je k hvězdě přitahován paraboloid. Ale hvězda září na všechny strany stejně, tudíž zde nepůsobí žádná síla způsobená zářením. Hvězda se tak bude přibližovat k paraboloidu. Na konci řešení ovšem ukážeme, že pro hvězdu velikosti našeho Slunce by její zrychlení bylo relativně malé.

Začněme výpočtem gravitační síly. Paraboloid si rozřežeme na tenké kroužky se společnou osou rovnoběžnou s osou paraboloidu. Nejprve spočítáme složku gravitační síly ve směru osy paraboloidu způsobenou infinitezimálně malým kouskem jednoho takového kroužku. Ta je podle Newtonova gravitačního zákona

$$dF_1 = \frac{GM \, dm}{r^2} \cos \alpha,$$

kde G je gravitační konstanta, dm je hmotnost našeho nekonečně malého úseku kroužku, M je hmotnost hvězdy, r je vzdálenost úseku kroužku od hvězdy a α je velikost úhlu mezi osou paraboloidu a spojnicí hvězdy s úsekem kroužku. Z obrázku zjistíme, že

$$\cos \alpha = \frac{\frac{p}{2} - x}{r},$$

kde p je parametr paraboloidu, tzn. dvojnásobek vzdálenosti vrcholu a ohniska, a x je vzdálenost vrcholu a středu kroužku.

Celkovou gravitační sílu dF_2 od jednoho kroužku získáme sečtením všech infinitezimálně malých příspěvků po jeho obvodu. Hmotnost dm můžeme vyjádřit pomocí plošné hustoty σ jako

$$dm = \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2} dl \, dx,$$

kde dl je element délky po obvodu kroužku a R je poloměr kroužku jako funkce souřadnice x . Dosazením do vztahu pro dF_1 a následnou integraci podle l dostaneme

$$dF_2 = 2\pi R \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2} \frac{GM \, dx}{r^2} \cos \alpha.$$

Veličiny r a R lze vyjádřit pomocí p a x . Rovnice paraboly s vodorovnou osou a s vrcholem v počátku je

$$y^2 = 2px,$$

v případě paraboloidu

$$R^2 = 2px.$$

Vzdálenost r pak snadno dopočteme z Pythagorovy věty. Pro gravitační sílu jednoho kroužku dostaneme

$$dF_2 = \frac{2\pi\sigma \sqrt{2px + p^2}}{\left(\frac{p}{2} + x\right)^3} \left(\frac{p}{2} - x\right) GM \, dx.$$

Gravitační síla všech kroužků je rovna určitému integrálu tohoto výrazu podle x od 0 do $p/2$. Označme konstantu $2\pi\sigma GM$ jako c_1 . Příslušný určitý integrál vyjde

$$F_g = c_1 \frac{\sqrt{2^5} - 4}{3} = 8\pi\sigma GM \frac{\sqrt{2} - 1}{3}.$$

Nyní podobným způsobem vypočteme sílu způsobenou tlakem záření. Paraboloid opět rozřežeme na úzké kroužky a tentokrát začneme výpočtem síly na element prostorového úhlu po obvodu kroužku $d\Omega$. Jemu příslušná síla je

$$dF_z = \frac{L \frac{d\Omega}{4\pi} (1 + \cos \alpha)}{c},$$

kde c značí rychlost světla a L je zářivý výkon hvězdy. Faktor $1 + \cos \alpha$ odpovídá změně hybnosti světla ve směru osy x a $d\Omega$ odpovídá ploše, jakou by tento prostorový úhel vytínal na jednotkové kouli. Platí pro něj

$$d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha.$$

Celková síla způsobená tlakem záření bude rovna integrálu podle α od 0 do $\pi/2$. Příslušný neurčitý integrál vyjde $\frac{-(1+\cos \alpha)^2}{4} + C$ a celková síla bude rovna

$$F_z = \frac{3L}{4c}.$$

Z rovnosti F_g a F_z vyplývá vztah mezi zářivým výkonem hvězdy, plošnou hustotou zrcadla a jeho vzdáleností od hvězdy

$$8\pi\sigma GM \frac{\sqrt{2} - 1}{3} = \frac{3L}{4c} \Rightarrow L = \frac{32\pi\sigma GMc (\sqrt{2} - 1)}{9}.$$

Všimněme si, že ve vztahu nevystupuje vzdálenost hvězdy od vrcholu zrcadla. Ta může být libovolná, je-li splněna podmínka vyplývající ze zadání, která říká, že hvězda se nachází v ohnisku paraboloidu. Jediným volným parametrem pro danou hvězdu je plošná hustota zrcadla.

Velikost gravitační síly, která působí na hvězdu, musí být stejně velká jako F_z . Naše Slunce má zářivý výkon přibližně $4 \cdot 10^{26}$ W. Velikost gravitační síly by tak byla $F_g = 10^{18}$ N. Pro gravitační zrychlení hvězdy potom vychází $a_g = \frac{F_g}{M} = 5 \cdot 10^{-13}$ m·s⁻². S tímto zrychlením by se Slunce za tisíc let neposunulo ani o jeden svůj poloměr.

Úloha II.P ... la bomba

Jakého maximálního výkonu dosahuje jaderná bomba?

Karel přemýšlel nad americkými prezidenty.

Všichni jsme asi slyšeli o shoení jaderných bomb na japonská města Hirošima a Nagasaki za druhé světové války. Naštěstí už od té doby jaderné zbraně nikdy

ve válce použity nebyly. V zadání úlohy jsme tázáni na maximální výkon jaderné bomby. Dává tato otázka vůbec smysl? Není náhodou výbuch jaderné bomby jedním velkým okamžitým „třeskem“ a neblíží se tedy maximální okamžitý výkon k nekonečnu? Na zodpovězení těchto otázek si každopádně nejprve musíme uvědomit, na jakém fyzikálním principu tato zařízení fungují.

Vazebná energie jádra

Princip výtěžku energie z jaderné reakce (ať už v jaderné elektrárně, nebo u jaderné bomby) je založen na ekvivalenci energie a hmotnosti, kterou si poprvé uvědomil Einstein. Samozřejmě se jedná o známý vztah

$$E = mc^2.$$

Další ingrediencí je fakt, že klidové hmotnosti jader atomů nejsou dané pouhým součtem klidových hmotností jednotlivých nukleonů, ze kterých jsou složena, ale jsou o určitou hodnotu m_v menší. Tato hodnota (ještě vynásobená konstantou c^2) je právě vazebná energie držící jádro pohromadě. Zmíněná skutečnost odpovídá univerzálnímu principu přírody, že fyzikální systémy mají tendenci obsazovat takové konfigurace, které extremalizují (zpravidla minimalizují) energii tohoto systému. Pro rozdíl hmotností m_v ⁸ platí

$$m_v = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - M,$$

kde Z a A je protonové resp. nukleonové číslo a m_p , m_n , M jsou klidové hmotnosti protonu, neutronu a daného atomového jádra. Pro vazebnou energii potom platí

$$E_v = m_v c^2.$$

V částicové fyzice se často volí hodnota $c = 1$. Ekvivalence energie a hmotnosti je poté ze vztahu výše ještě více patrná.

Při jaderných reakcích ze zákona zachování energie potom plyne

$$M_{\text{in}} c^2 = M_{\text{out}} c^2 + \Delta E,$$

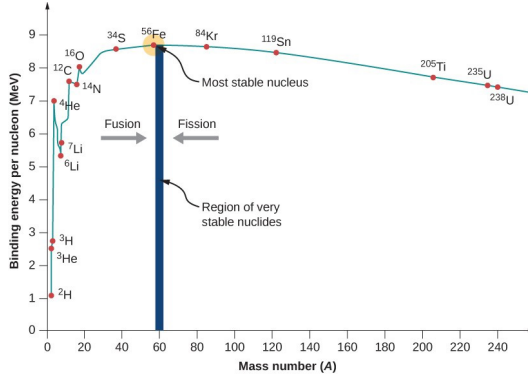
kde M_{in} jsou klidové hmotnosti reagujících částic, M_{out} jsou klidové hmotnosti produktů reakce a ΔE je získaná energie, a to ve formě gamma záření a kinetické energie produktů. Aby byla reakce exotermická, musí být klidová hmotnost produktů menší než klidová hmotnost reagujících částic. Pro lepší orientaci v problému je výhodné si zavést pomocnou veličinu

$$\varepsilon_v = \frac{E_v}{A},$$

neboli vazebnou energii na jeden nukleon. Její hodnoty pro různé izotopy můžeme vidět na obrázku 8. Při jaderných reakcích pak budeme energii získávat, pokud bude ε_v produktů větší než ε_v reagujících jader.

Obecně se energie uvolňuje při slučování (fúzi) lehkých jader až do jádra železa a pak při štěpení těžkých jader. To je třeba důvod, proč v jádru Slunce najdeme železo, ale žádné těžší prvky již ne.

⁸Anglicky *mass defect*, <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/mass-defect>.

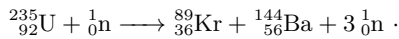


Obr. 8: Závislost vazebné energie příslušející jednomu nukleonu na atomovém čísle (<https://opentextbc.ca/universityphysicsv3openstax/chapter/nuclear-binding-energy>).

Řetězová reakce

V jaderných reaktorech a zbraních se navíc využívá dalšího jevu zvaného řetězová reakce. Ta nastává u jaderných reakcí, kde jeden nebo více produktů (např. neutron) je zároveň schopen danou reakci iniciovat. Příkladem takové reakce je štěpení izotopu uranu ^{235}U , viz obrázek 9.

Rovnice jedné takové reakce je například



Štěpných reakcí ^{235}U je však mnoho (z hlediska možných produktů) a typicky u nich dochází k produkci jednoho až sedmi neutronů (v průměru 2,4).¹⁰ Relativní zastoupení různých izotopů v produktech štěpné řetězové reakce popisuje „velbloudí křivka“.¹¹

Kritické množství

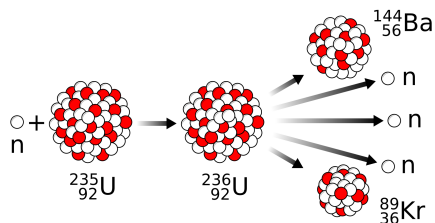
Další důležitý pojem související s řetězovou reakcí, kterou iniciují neutrony, je faktor efektivního násobení neutronů k příslušející dané konfiguraci paliva. Je to číslo které udává, kolik neutronů z jedné reakce v průměru iniciuje další reakci. V případě ^{235}U tedy bude k určitě menší než 2,4, protože ne všechny neutrony produkované štěpením znovu štěpení iniciují.¹² Číslo k závisí na izotopickém složení

⁹ Ve všech dosavadních jaderných reaktorech a zbraních se kromě používalo ^{235}U ještě ^{239}Pu , které bylo např. použito jako palivo bomby „Fat Man“ shozené na Nagasaki.

¹⁰ Hodnota se značí $\bar{\nu}$ a pozvolně roste s energií nalétávajícího neutronu. Výraznější růst nastává až pro E větší než přibližně 1 MeV. Viz https://en.wikipedia.org/wiki/Prompt_criticality.

¹¹ Slangový výraz odvozený z faktu, že při logaritmické svislé ose křivka vypadá jako dva hrby. Křivka závisí na štěpném izotopu a na kinetické energii štěpícího neutronu. Viz https://en.wikipedia.org/wiki/Fission_product_yield.

¹² Některé například z materiálu vylétí, jiné se zase zachytí v jádře bez toho, aby nastala štěpná reakce.



Obr. 9: Jedna z možných štěpných reakcí ^{235}U
 (https://en.wikipedia.org/wiki/Discovery_of_nuclear_fission).

paliva a roste s hustotou a hmotností. Dále pak lze k ovlivnit geometrickým tvarem použitého paliva a nebo třeba obklopením paliva vrstvou reflektující neutrony.

Průběh řetězových reakcí se dělí na tři případy v závislosti na k :

- Pro $k < 1$ říkáme, že materiál má podkritické množství a pokud takovému materiálu dodáme nějaký počáteční impuls neutronů, počet reakcí bude s časem exponenciálně klesat. Jediný konstantní zdroj neutronů v takovémto případě bude ze spontánních jaderných rozpadů.
- Pro $k = 1$ říkáme, že materiál má kritické množství,¹³ reakce je samoudržitelná.
- Pro $k > 1$ říkáme, že materiál má nadkritické množství. Množství reakcí v materiálu roste s časem exponenciálně a pokud se číslo k vlivem uvolňování obrovského množství energie nezmenší, v podstatě vždy dochází k destrukci materiálu a pokud reakce probíhá dostatečně rychle, tak dochází i k explozi.

„Okamžitá“ kritičnost

Jak jsme se již zmínili výše, pro materiál v nadkritickém stavu roste počet štěpných reakcí exponenciálně s časem podle vztahu

$$N(t) = N_0 k^{\frac{t}{T}}.$$

Čas T je v tomto případě průměrná doba, za kterou neutron vylétávající ze štěpné reakce iniciuje novou štěpnou reakci.

Většina neutronů generovaná rozpadovou reakcí pochází přímo z reakce samotné, viz obr. 9. Těmto neutronům se říká „okamžité“.¹⁴ Tyto neutrony iniciují další štěpení v řádu nanosekund. Standardně se uvažuje průměrná doba mezi dvěma interakcemi jeden shake = 10 ns.¹⁵ Do neutronů generovaných rozpadovou reakcí se ale započítávají i ty, které jsou generovány rozpadem dalších produktů štěpení. Např. ^{92}Kr i ^{141}Ba jsou oba radioaktivní izotopy. Těmto neutronům, které tvoří méně než jedno procento celkových neutronů uvolněných štěpnou reakcí, se říká

¹³Anglicky *critical mass*, https://en.wikipedia.org/wiki/Critical_mass.

¹⁴Anglicky *prompt neutrons*, https://en.wikipedia.org/wiki/Prompt_criticality.

¹⁵Z anglického rčení „in two shakes of a lamb’s tail“.

„opožděné neutrony“¹⁶ Uvolňují se v řádu desetin až desítek sekund po reakci (souvisí s poločasem rozpadu štěpných produktů).

Toho se využívá v jaderných reaktorech, kde jsou tyto opožděné neutrony nutné k tomu, aby se materiál dostal nad kritickou mez. Průměrný čas mezi jednotlivými generacemi neutronů je proto relativně velký a je možné reakci regulovat pomocí regulačních tyčí. Navíc je v jaderných reaktorech reakce moderovaná. To znamená, že jsou palivové tyče ponořené do moderátoru,¹⁷ jenž spomaluje neutrony, které pak ochotněji s palivem reagují.¹⁸ K výbuchu prakticky dojít nemůže, protože při uvolnění velkého množství energie se zhorší podmínky pro štěpení (horší moderace, Dopplerův jev, ...) a číslo k tím klesne pod kritickou mez.

Oproti tomu v případě, že pro nadkritickou mez stačí uvažovat reakce iniciované z „okamžitých“ neutronů, z textu výše vyplývá, že čas mezi jednotlivými generacemi T je v řádech shake. My dále budeme uvažovat přesně $T = 1$ shake. Reakce se tedy v podstatě okamžitě vymyká kontrole a dochází k výbuchu.

Jaderné zbraně

V předchozích odstavcích jsme si stručně představili fyzikální principy, na kterých jsou jaderné zbraně založeny. Jejich praktická implementace je ale samozřejmě velmi složitá a sofistikovaná. Představme si teď dva hlavní druhy jaderných zbraní a také veličinu sloužící k popisu jejich ničivé síly.

Energie uvolněná explozí se obvykle uvádí v jednotkách tun TNT,¹⁹ tzn. energie, kterou by uvolnila exploze dané hmotnosti TNT. Jedna kilotuna TNT je rovna 4,18 TJ. Obecně je velmi náročné energii výbuchu přesně určit. Nejpresnější metodou je radiochemické měření radioaktivního spadu. Při testu bomby Trinity se Enrico Fermi pokusil měřit energii výbuchu z toho, jak tlaková vlna posune vypuštěné kousky papírků v bezvětrí.

Jako jaderné zbraně se většinou označují bomby založené na principu neřízené řetězové reakce jader těžkých prvků. Energie těchto bomb se tedy získává ze štěpení těžkých jader. Někdy se pak mezi jaderné zbraně zařazují i zbraně založené na fúzi lehkých jader, které se označují jako termonukleární.

Štěpné jaderné bomby se dělí na dva základní typy (viz obr. 10):

- Nejjednodušší štěpná jaderná bomba je tzv. dělového typu.²⁰ Skládá se ze dvou podkritických množství štěpného materiálu, která se odpálením konvenční chemické bomby srazí, čímž vznikne nadkritické množství štěpného materiálu. U tohoto typu ke štěpení dojde ve velmi malé části materiálu. U jaderné bomby se jménem „Little Boy“ shozené na Hirošimu se štěpilo pouze $\sim 1,4\%$ z celkového materiálu a celková uvolněná energie byla ~ 15 kt.
- Druhým, rafinovanějším typem je tzv. implozní puma.²¹ Materiál ve tvaru dutého válce nebo sféry je obklopen konvenční trhavinou, která ho stlačí do

¹⁶ Anglicky *delayed neutrons*.

¹⁷ Typickým moderátorem je tzv. „těžká voda“ s chemickým vzorcem D_2O , kde D značí deuterium, což je vodík se dvěma protony neboli 2H .

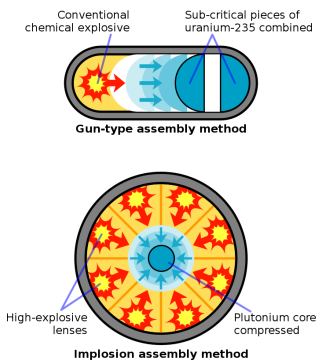
¹⁸ Moderátor efektivně zvyšuje číslo k na nadkritickou hodnotu.

¹⁹ Standardně se značí stejně jako tuna čili t.

²⁰ Anglicky *gun-type*.

²¹ Anglicky *implosion type*.

nadkritického stavu. Někdy se dovnitř sféry přidává fúzní materiál, většinou plyn tritia a deuteria. Této metodě se říká boosting. Fúzní materiál slouží jako další zdroj neutronů pohánějící štěpnou reakci. Štěpné reakce mají horní hranici danou tím, že větší množství materiálu by již překročilo kritické množství i bez odpálení startující trhavin. Tuto hranici představuje bomba „Ivy King“ s ničivou silou 500 kt.



Obr. 10: Dva typy štěpných bomb
(https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_weapon).

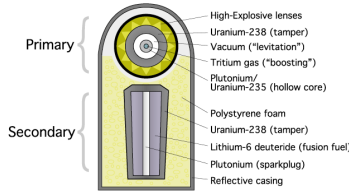
Dalším, o mnoho ničivějším typem jsou již zmíněné termonukleární bomby. Standardní typ této bomby je tzv. Teller-Ulamův, který je možné vidět na obr. 11. Bomba funguje tak, že se nejdříve spustí primární štěpná reakce. Energie z této primární reakce zahřeje polystyren obklopující sekundární nálož na tak vysoké teploty, že se z něj stane plazma. Ta poté stlačí sekundární nálož, takže se spustí jaderné štěpení uvnitř sekundární nálože.²² Dále se zahřeje fúzní materiál na teploty v řádech milionů kelvinů a spustí se fúzní reakce. Nakonec produkty této fúzní reakce iniciují štěpení materiálu obklopujícího sekundární nálož, u kterého by normálně k výraznému štěpení nedocházelo. Je také možné přidat třetí, větší fúzní nálož, která bude „zapálena“ energií z té předchozí. V principu se tento proces dá opakovat libovolně-krát a energetický výtěžek termonukleární bomby je tak v podstatě neomezený.²³ Nejsilnější odpálená termonukleární bomba vůbec „Tsar Bomba“ měla sílu 50 Mt.

Maximální výkon jaderné bomby

Teď se konečně vracíme k otázce ze zadání. Nejdříve si ale musíme vybrat, jaký typ jaderné bomby budeme uvažovat. Jelikož energie termonukleární bomby je v podstatě neomezená a také proto, že proces výbuchu ve štěpné bombě se lépe popisuje, vybereme si štěpnou bombu.

²²sparkplug

²³https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_weapon



Obr. 11: Teller-Ulam konfigurace
(https://en.wikipedia.org/wiki/Thermonuclear_weapon).

Jak již bylo zmíněno, energie výbuchu štěpné bomby je generována štěpnými reakcemi, které jsou iniciovány „okamžitými“ neutrony. Předpokládejme, že známe okamžitě uvolněnou energii E_o ²⁴ jedné štěpné reakce. Pokud poté známe energii exploze bomby E_e , tak můžeme určit počet rozpadlých jader materiálu jako

$$N_{in} = \frac{E_e}{E_o}.$$

Dále víme, že počet rozpadů v n -tý shake je

$$N_n = N_0 k^n.$$

Pro jednoduchost volme konstantu $N_0 = 1$. Předpokládáme, že řetězovou reakci spustil jediný neutron. Ve štěpných jaderných bombách v průměru proběhne 80 shake²⁵ než štěpný materiál expanduje natolik, že řetězová reakce ustane.²⁶ Pokud chceme zjistit faktor efektivního násobení neutronů pro danou bombu, stačí nám řešit rovnici

$$\sum_{i=0}^{80} k^i = N_{in}.$$

V našem modelu, který je daný rovnicí výše předpokládáme, že k je neměnné. Pokud se nám to nezdá příliš pravděpodobné, můžeme třeba předpokládat, že v posledních 5 shake se materiál již rozpíná a hodnota k bude postupně klesat např. na polovinu původní hodnoty.²⁷ Místo toho, aby platilo $N_n = N_{n-1} \cdot k$, platí $N_{76} = N_{75} \cdot k \cdot \frac{10-9}{10}$, $N_{77} = N_{76} \cdot k \cdot \frac{10-8}{10}$, atd. Dostáváme upravený vztah

$$\sum_{i=0}^{75} k^i + \sum_{i=1}^5 k^{75+i} \cdot \prod_{j=1}^i \frac{10-j}{10} = N_{in}.$$

²⁴To znamená kinetickou energii vzniklých jader, kinetickou energii „okamžitých“ neutronů a energii gamma záření.

²⁵Vytvoří se 80 generací neutronů.

²⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Critical_mass

²⁷Přesný tvar tohoto předpokladu není odůvodněný výpočtem, ale pouze fyzikální intuicí, že reakce nepřestane probíhat náhle v jednom okamžiku, ale utlumuje se postupně. Slouží spíše pro ilustraci toho, že se do vztahu dá promítnout právě jistá fyzikální intuice.

Hledáme tedy kořen polynomu stupně 80 na kladné reálné poloose.²⁸ To se na první pohled může zdát jako komplikovaná úloha. Stačí si ale uvědomit, že koeficient před každou mocninou k je kladný. To znamená, že pokud $P(0) < 0$, což v našem případě platí, bude mít tento polynom na kladné reálné ose pouze jeden kořen, neboť je v tomto intervalu ryze rostoucí. Tuto rovnici hravě vyřeší v podstatě libovolný výpočetní software jako je např. Mathematica. Také je problém možné vyřešit „vlastnoručně“ implementací Newtonovy metody v libovolném programovacím jazyce a jako počáteční hodnotu zvolit nulu (nebo jakékoli kladné číslo). Pro zjištění maximálního výkonu

$$P_{\max} = \frac{\Delta W}{\Delta t},$$

nám pak stačí vybrat generaci s největším počtem reagujících neutronů N_{\max} .²⁹ ΔW potom bude dáno prostým vztahem

$$\Delta W = N_{\max} E_o.$$

Tato energie je samozřejmě generovaná za časový úsek $\Delta t = 1$ shake. Máme tedy

$$P_{\max} = N_{\max} E_o \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

Zkusme si tento výpočet provést konkrétně pro tři bomby, které měly jako štěpný materiál ^{235}U .

Tab. 1: Tři bomby

Jméno	$\frac{m_p}{\text{kg}}$	$\frac{E_c}{\text{kt}}$	$\frac{E_e}{\text{kt}}$	$\frac{E_e/E_c}{\%}$	k	$\frac{\Delta W}{\text{kt}}$	$\Delta W/E_e$	$\frac{P_{\max}}{W}$
Little Boy	64	1131	15	1,3	2,027	3,65	0,244	$1,53 \cdot 10^{21}$
Ivy King	60	1060	500	47,2	2,120	132,54	0,265	$5,55 \cdot 10^{22}$
Orange Herald	117	2067	720	34,8	2,130	192,47	0,267	$8,05 \cdot 10^{22}$

Hodnota m_p v tabulce značí hmotnost štěpného materiálu. Z ní a ze vztahu

$$M_{^{235}\text{U}} = \frac{m_p}{n},$$

kde $M_{^{235}\text{U}}$ je molární hmotnost, můžeme dopočítat počet částic a pak i energii uvolněnou při kompletním rozštěpení materiálu E_c . Hodnoty energie výbuchu E_e jsou známé.³⁰ Podíl E_e/E_c pak udává, jak velká část materiálu byla při výbuchu rozštěpena. Nakonec podíl $\Delta W/E_e$ říká, jak moc velká část energie výbuchu vznikla při štěpení pomocí neutronů z nejpočetnější generace.³¹

²⁸Záporné a imaginární hodnoty k totiž nemají fyzikální smysl.

²⁹Pro $k > 2$ to vždy bude 80. generace.

³⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_weapon_yield

³¹Ve všech zmíněných případech byla tato generace tou poslední, neboť $k > 1$ i pro posledních pět generací u všech uvažovaných bomb.

Z předposledního sloupce tabulky je patrné, že pro náš model je podíl energie ze štěpení poslední generace a celkové energie přibližně 0,25.³² Maximální výkon štěpné jaderné bomby můžeme přibližně vyjádřit pomocí energie jejího výbuchu

$$P_{\max} = 0,25 \cdot E_e \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}.$$

V posledním sloupci je uveden dopočítaný maximální výkon, kterého bomba dosahovala. Pro představu porovnejme výkon bomby „Ivy King“, což je největší čistě štěpná jaderná bomba, co kdy byla odpálena,³³ a výkon největší fungující jaderné elektrárny na světě, což je Jihokorejská jaderná elektrárna Kori. Kori má celkový výkon 7489 MW. To znamená, že bomba „Ivy King“ měla v jeden okamžik výkon $7,4 \cdot 10^{12}$ krát větší.

Úloha III.1 ... Kde těžiště moje?

Můžeme se setkat s neoficiálním výkladem, že červená, modrá a bílá barva na české vlajce symbolizují krev, oblohu (tedy vzduch) a čistotu. Najděte polohu těžiště takto doslovně interpretované vlajky, přičemž uvažujte, že čistota je nehmotná. Poměr stran je 3 : 2 a rozhraní všech tří částí se nachází přesně ve středu. Hustoty krve a vzduchu si vyhledejte.

Bonus Pokúste sa čo najpresnejšie spočítat polohu ťažiska slovenskej vlajky. Môžete použiť rôzne aproximácie. *Matěj má rád zábavu s vlajkami.*

Celý problém si zredukujeme na 2D úlohu, protože poloha těžiště nezávisí na tloušťce vlajky. Zavedeme kartézské souřadnice, které mají střed v levém spodním rohu vlajky. Její délku a výšku označíme 3 a 2 – pro jednoduchost počítáme bezrozměrně.

Vlajku si rozdělíme na tři části podle obrázku. Snadno rozpoznáme polohy těžišť jednotlivých útvarů (využijeme faktu, že těžiště trojúhelníka leží ve třetině jeho výšky).

Tab. 2: Parametry částí české vlajky.

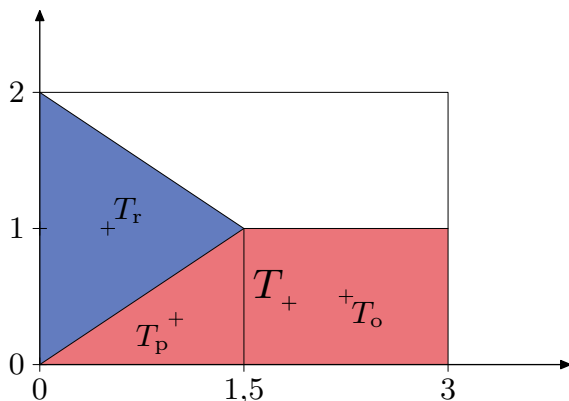
objekt	poloha těžiště	obsah
červený obdélník	$T_o = (2,25; 0,5)$	1,5
červený pravoúhlý trojúhelník	$T_p = \left(1; \frac{1}{3}\right)$	0,75
modrý rovnoramenný trojúhelník	$T_r = (0,5; 1)$	1,5

Poloha společného těžiště je vážený průměr jednotlivých těžišť podle jejich hmotnosti, přičemž pro zkrácení zápisu počítáme s polohami těžišť jako s vektory

$$T = (T_1; T_2) = \frac{(2,25; 0,5) \cdot 1,5 + \left(1; \frac{1}{3}\right) \cdot 0,75 + (0,5; 1) \cdot 1,5k}{1,5 + 0,75 + 1,5k} = \frac{(4,125 + 0,75k; 1 + 1,5k)}{2,25 + 1,5k},$$

³²V případě, kdy uvažujeme k fixní, tak tento poměr vychází přibližně 0,50, takže maximální výkon dostáváme řádově stejný.

³³Bomba „Orange Herald“ měla ještě dodatečný fúzní boosting.



Obr. 12: Rozdělení české vlajky na tři části.

kde k je poměr hustoty vzduchu a krve.

Průměrná hustota lidské krve je $1\,060\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, hustota vzduchu je pouhých $1,3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, proto

$$k = \frac{1,3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}}{1\,060\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}} \doteq 0,0012.$$

Po dosazení do vztahu pro těžiště dostáváme

$$T = \frac{(4,126; 1,002)}{2,252} = (1,832; 0,450).$$

Všimněme si, že hmotnost vzduchu jsme mohli zanedbat a vyšlo by nám téměř to samé. Zanedbání vzduchu znamená $k = 0$ čili bychom hledali jenom těžiště červené části

$$T_{\text{krv}} = \frac{(4,125; 1)}{2,25} = \left(\frac{11}{6}; \frac{4}{9}\right) = (1,833; 0,444).$$

Výsledky by se lišily o necelé 1%.

Bonus

Podstatou této části úlohy je najít rovnováhu mezi tím, co dokážeme spočítat v reálném čase, a tím, jak přesný výsledek chceme. Úplné přesnosti stejně nemůžeme dosáhnout, protože státní znak, vyobrazený na slovenské vlajce, není slovenskými zákony přesně geometricky definovaný. Můžeme se proto setkat se znaky, které se mírně liší.

Přesně je definováno pouze umístění a velikost státního znaku. Jeho výška je polovina výšky vlajky, takže 1 v našich bezrozměrných jednotkách. Šířka je $2/5$ výšky vlajky neboli $4/5$. A jeho vzdálenost od horního, spodního a levého okraje vlajky je stejná, tedy $1/2$. Dále je určeno, že kolem znaku je bílý lem, jehož tloušťka je setina výšky vlajky, což je $1/50$.

Vlajku si rozdělíme na několik částí, jejichž těžiště spočítáme samostatně. Jelikož výpočet těžiště je lineární záležitost, můžeme si pro zjednodušení zavést i útvary se zápornou hmotností.

Těžiště spodní červené oblasti můžeme spočítat jako vážený průměr těžiště neporušeného červeného pruhu a těžiště odříznutého trojúhelníku, které ale bereme se zápornou hmotností. Vrcholový úhel trojúhelníku odhadneme na 110° . Jeho výška je

$$v = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{50} = \frac{14}{75},$$

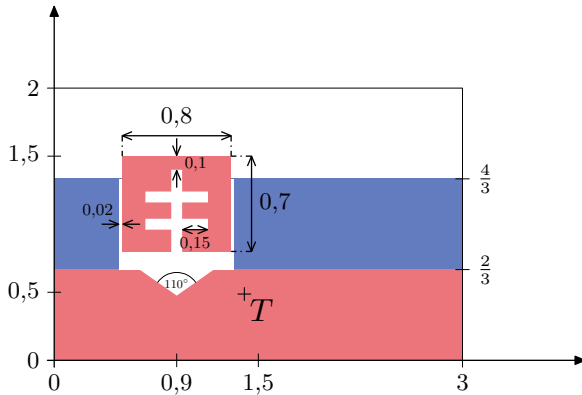
obsah vychází jako $v^2 \operatorname{tg}(55^\circ) \doteq 0,04976$.

Červené pozadí ve státním znaku aproximujeme obdélníkem, jehož šířka je dána jako 0,8 a výšku odhadneme na 0,7. Obsah spočítáme snadno a výška těžiště bude $2 - 0,5 - \frac{0,7}{2} = 1,15$. Tato aproximace vnáší do našich výpočtu největší chybu.

Kříž na státním znaku není moc přesně definovaný. Proto budeme muset jeho rozměry odhadnout. Ačkoliv by konce kříže měly být rozšířené, budeme pro jednoduchost počítat s tím, že kříž je složen z čar, které mají konstantní šířku, kterou odhadneme na 0,08.

Pro jednoduchost uvažujme, že oba dva páry ramen kříže jsou stejně dlouhé a dohromady s páteří kříže tvoří středově symetrický objekt, takže jeho těžiště je ve středu. Rozměry zvolíme tak, jak je naznačeno na obrázku. Obsah potom bude $0,08 \cdot (0,6 + 4 \cdot 0,15) = 0,096$.

Jelikož hustota vzduchu je o tři řády menší než hustota krve, můžeme si dovolit zanedbat modré kopečky na státním znaku. Spolu s nimi zanedbáme i dva modré laloky pod červeným čtvercem, abychom mohli modrou část brát pouze jako dva obdélníky. Opět to započítáme jako kladný modrý pruh a záporný obdélník v místě státního znaku. Hmotnost vyříznutého obdélníku je $-2/3 \cdot (0,8 + 0,04) k = 0,56k$. Polohy těžišť jsou dobře vidět z obrázku.



Obr. 13: Aproximace slovenské vlajky.

Tab. 3: Parametry částí slovenské vlajky. Modrý trojúhelník (hory) zanedbáváme.

	objekt	poloha těžiště	obsah	relativní hmotnost
	červený pruh (celý)	$T_r = (1,5; \frac{1}{3})$	2	2
	trojúhelníkový odřezek z pruhu	$T_t = (0,9; \frac{136}{225})$	0,050	-0,050
	červený obdélník (celý)	$T_c = (0,9; 1,15)$	0,56	0,56
	křížový výřez z obdélníku	$T_k = (0,9; 1,1)$	0,096	-0,096
	modrý pruh	$T_b = (1,5; 1)$	2	$2k$
	prostřední odřezek modrého pruhu	$T_p = (0,9; 1)$	0,56	-0,56 k

Shrnutí

Nyní už máme vše potřebné, zbývá jen dosadit hodnoty z druhého a posledního sloupce tabulky do vzorce pro vážený průměr. Dostáváme

$$T = (1,397; 0,487) .$$

Samozřejmě bychom mohli postupně přidávat další geometrická tělesa aproximující útvary na vlajce, čímž bychom zpřesňovali výpočet.

Druhou možností je napsat program, který by načtel obrázek vlajky a polohu těžiště by spočítal za nás. Při použití tohoto postupu a obrázku slovenské vlajky z Wikipedie dostaneme její přesný střed v bodě

$$T_{PC} = (1,411; 0,473) ,$$

což je o 0,019 jednotky vedle ručně spočítaného těžiště T .

Úloha III.2 . . . hrajeme si s klíči

Vašek si rád hraje s klíči tak, že je roztočí na šňůrce a pak si je nechá namotat na ruku. Pro názornost si tuto situaci zjednodušíme modelem, kdy máme ve stavu beztíže hmotný bod o hmotnosti m uchycený na konci nehmotného vlákna délky l_0 . To je druhým koncem připevněno na pevný válec o poloměru r . Vlákno napneme tak, že v bodě uchycení představuje kolmici k povrchu válce, a hmotnému bodu udělíme rychlost \mathbf{v}_0 ve směru kolmém jak na osu válce, tak na napnuté vlákno. To se díky tomu začne na válec namotávat. Jak bude záviset velikost rychlosti hmotného bodu na délce nenamotané části vlákna l ?

Nápověda Najděte veličinu, která je od začátku do konce namotávání konstantní.
Bonus Za jak dlouho se vlákno namotá celé?

Vašek si hrál při pádu z okna s klíči.

V inerciální vztahné soustavě spojené s válcem působí na hmotný bod jediná síla, a to tahová síla vlákna. Je-li vlákno napnuté, míří tahová síla ve směru vlákna a hmotný bod se pohybuje ve směru kolmém na vlákno. Výkon tahové síly, který je daný skalárním součinem tahové síly a rychlosti hmotného bodu, je pak nulový.

Zachovávající se veličinou je tedy mechanická energie hmotného bodu, která je v našem případě rovna kinetické energii. Mechanická energie hmotného bodu je rovna

$$E = \frac{1}{2}mv^2,$$

kde \mathbf{v} je rychlost hmotného bodu. Její velikost v se zachovává, neboť mechanická energie i hmotnost jsou konstantní. Znamená to, že po celou dobu namotávání je $v = v_0$ a velikost rychlosti na délce nenamotané části vlákna l nezávisí.

V okamžiku, kdy se vlákno na válec namotá, narazí hmotný bod do válce a následující pohyb je dán charakterem srážky.

Bonus

Označme $\varphi \geq 0$ úhel, který svírá vlákno v daném čase t se směrem, který svíralo na začátku v čase $t = 0$. Zpočátku se vlákno na válec namotávat nebude. Nejdříve se totiž otočí o pravý úhel ($\varphi = \frac{\pi}{2}$). V tomto okamžiku bude směr vlákna tečný na povrch válce a při dalším otáčení se bude muset vlákno na válec namotávat. V této první čtvrtotáčce se hmotný bod otáčí kolem bodu uchycení vlákna, a proto je poloměr otáčení l_0 . Navíc úhlová rychlost ω je konstantní a je rovna

$$\omega = \frac{v_0}{l_0}.$$

Připomeňme, že úhlová rychlost je definována jako časová změna úhlu natočení, matematicky vyjádřeno jako časová derivace úhlu $\varphi(t)$,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}(t) = \dot{\varphi}(t). \quad (7)$$

Úhlová rychlost ω je konstantní, a proto jednoduše dostaneme, že se vlákno natočí o úhel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ za čas

$$t_1 = \frac{\pi l_0}{2v_0}. \quad (8)$$

Dále se bude vlákno na válec postupně namotávat, takže se celkově bude hmotný bod pohybovat po jakési spirále. V každém bodě trajektorie lze však v malém okolí tohoto bodu aproximovat trajektorii kružnicovým obloukem, který tvoří tzv. oskulační kružnici. Tyto oskulační kružnice jsou charakterizovány svým středem a poloměrem. Středem oskulační kružnice je v každém okamžiku místo, kde se vlákno od válce začíná odchylovat, a poloměr je dán délkou l nenamotané části vlákna. Velikost rychlosti $v = v_0$ je proto rovna

$$v_0 = l\omega = l \frac{d\varphi}{dt}, \quad (9)$$

kde délka l závisí na čase, $l = l(t)$, a úhlová rychlost stále definovaná vztahem (7) nyní závisí na čase. Tato délka souvisí s délkou namotané části vlákna, která je rovna $r(\varphi - \frac{\pi}{2})$ pro $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$, a proto

$$l(t) = l_0 - r \left(\varphi(t) - \frac{\pi}{2} \right). \quad (10)$$

Dohromady dostaneme z rovnic (9) a (10) diferenciální rovnici

$$v_0 = \left(l_0 - r \left(\varphi(t) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \frac{d\varphi}{dt},$$

kteřou řešíme separací proměnných. Tuto rovnici můžeme integrovat, a to od okamžiku $t = t_1$ (rovnice (8)), kdy je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a do nějakého obecného času t před namotáním celého vlákna, kdy je $\varphi = \varphi(t)$ neboli

$$\int_{t_1}^t v_0 dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \left(l_0 - r \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right) d\varphi.$$

Všimněte si, že pravá strana představuje délku spirály, po které se hmotný bod po první čtvrtotáčce pohybuje. Abychom si usnadnili práci, můžeme provést substituci $\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Úhel $\tilde{\varphi}$ představuje natočení vlákna od začátku namotávání. Pro diferenciál máme $d\tilde{\varphi} = d\varphi$ a diferenciální rovnice přejde na tvar

$$\int_{t_1}^t v_0 dt = \int_0^{\tilde{\varphi}} (l_0 - r\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi}.$$

Velikost rychlosti v_0 je konstantní, a proto je levá strana jednoduše rovna násobku v_0 a času pohybu hmotného bodu po spirále. Dále zintegrováním pravé strany vedoucí na délku spirály dostaneme

$$v_0(t - t_1) = l_0\tilde{\varphi} - \frac{r\tilde{\varphi}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = t_1 + \frac{\tilde{\varphi}}{2v_0} (2l_0 - r\tilde{\varphi}).$$

Vlákno se namotá na válec za čas $t = t_2$, kdy $r\tilde{\varphi} = l_0$ neboli

$$t_2 = \frac{\pi l_0}{2v_0} + \frac{l_0^2}{2v_0 r} = \frac{l_0}{2v_0} \left(\pi + \frac{l_0}{r} \right),$$

kde jsme za t_1 dosadili výraz z rovnice (8).

Úloha III.3 . . . dva solenoidy

Mějme dvě cívky navinuté na stejné papírové ruličce. První má hustotu vinutí 10 cm^{-1} a druhá 20 cm^{-1} . Rulička měří 40 cm na délku a 1 cm v průměru. Obě cívky jsou navinuté po celé její délce, přičemž druhá je navinutá přes první. Vzhledem k rozměrům ruličky můžeme zanedbat okrajové efekty a pracovat s cívkami jako s ideálními solenoidy. Uvažujme, že je zapojíme do obvodu sériově za sebou. Toto uspořádání můžeme pomyslně nahradit jedinou cívkou. Jaká by byla její indukčnost?
Jindra si hrál s ruličkami od ubrousků.

Indukčnost solenoidu je

$$L = \mu_0 n^2 S l,$$

kde $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ je permeabilita vakua, n je hustota vinutí (v závitech na jednotku délky), S je plocha průřezu solenoidu a $l = 40 \text{ cm}$ je jeho délka. Plocha průřezu je

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

kde $d = 1 \text{ cm}$ je průměr papírové ruličky. Po dosazení $S \doteq 0,785 \text{ cm}^2$. Cívky jsou navinuté přímo přes sebe, takže magnetické pole první cívky ovlivňuje druhou a naopak. Označme hustotu vinutí první cívky $n_1 = 10 \text{ cm}^{-1}$ a hustotu vinutí druhé cívky $n_2 = 20 \text{ cm}^{-1}$.

Řešení pomocí úvahy

Záleží na orientaci proudu v obou cívkách. Pokud elektrické proudy v obou cívkách proudí souhlasně, můžeme říct, že se jedná o jednu cívku s hustotou vinutí $n = n_1 + n_2$. Naopak, pokud proudy vedou proti sobě, jde efektivně o jednu cívku s indukčností $n = n_2 - n_1$. Snadno spočítáme výslednou indukčnost podle vzta- hu $L = \mu_0 n^2 S l$. V prvním případě vyjde $L = \mu_0 (n_2 + n_1)^2 S l = 3,55 \cdot 10^{-4} \text{ H}$, ve druhém případě $L = \mu_0 (n_2 - n_1)^2 S l = 3,94 \cdot 10^{-5} \text{ H}$.

Řešení pomocí vzájemné indukčnosti

Úlohu samozřejmě můžeme řešit i složitěji spočítáním vzájemné indukčnosti cívek a řešením soustavy rovnic. V této konkrétní úloze je tento způsob řešení delší, avšak v jiných složitějších případech nemusí být možné nalézt výsledek pomocí jednoduché úvahy, a tak bude poučné ukázat si i řešení s použitím vzájemné indukčnosti.

Nejprve určíme vzájemnou indukčnost cívek M . Každá cívka vytváří okolo sebe magnetické pole. Pokud se v blízkosti nacházejí další cívky, bude jimi procházet nenulový tok magnetického pole. Při změně toku v čase se bude v okolních cívkách indukovat napětí. Míra ovlivnění dvojice cívek je popsána vzájemnou indukčností

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1},$$

kde Φ_{12} je tok magnetické indukce v cívce 2 způsobený cívkou 1 a I_1 je proud v cívce 1. Vzájemná indukčnost je stejná oběma směry $M_{12} = M_{21}$.

Obě cívky jsou namotány na stejném jádře a obě mají stejnou délku. První cívka má hustotu vinutí $n_1 = 10 \text{ cm}^{-1}$ a druhá $n_2 = 20 \text{ cm}^{-1}$. Magnetická indukce vytvořená cívkou 1 uvnitř solenoidu je

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1.$$

Tok magnetické indukce druhou cívkou je tudíž

$$\Phi_{12} = N_2 B_1 S = n_2 l B_1 S = \mu_0 n_1 n_2 l S I_1.$$

Vzájemná indukčnost cívek 1 a 2 je

$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l S.$$

Pro toky magnetické indukce oběma cívkami sestavíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= L_1 I_1 \pm M I_2, \\ \Phi_2 &= \pm M I_1 + L_2 I_2,\end{aligned}$$

kde znaménko +, resp. −, vybereme v případě, že proudy v cívkách tečou souhlasně, resp. nesouhlasně. Napětí indukovaná v cívkách jsou

$$\begin{aligned}V_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} \mp M \frac{dI_2}{dt}, \\ V_2 &= \mp M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}.\end{aligned}$$

Cívky jsou zapojeny sériově, takže $I_1 = I_2 = I$. Ze soustavy dvou rovnic můžeme vytvořit jednu rovnici pro celkové napětí na dvojici cívek

$$V_1 + V_2 = V = -(L_1 \pm 2M + L_2) \frac{dI}{dt}.$$

Soustavu našich dvou cívek tak můžeme nahradit jednou cívkou s indukčností $L = L_1 \pm 2M + L_2$. Indukčnost cívky 1 je $L_1 = \mu_0 S l n_1^2$, indukčnost cívky 2 je $L_2 = \mu_0 S l n_2^2$, vzájemnou indukčnost M jsme odvodili výše. V případě souhlasně vedených proudů v cívkách tak dostaneme kombinovanou indukčnost

$$L = \mu_0 S l (n_1^2 + 2n_1 n_2 + n_2^2) = \mu_0 S l (n_1 + n_2)^2$$

a v případě proudů vedených nesouhlasně je indukčnost

$$L = \mu_0 S l (n_1^2 - 2n_1 n_2 + n_2^2) = \mu_0 S l (n_1 - n_2)^2.$$

Úloha III.4 ... laskavý příboj

Blízko pobřeží je rychlost mořských vln ovlivněna přítomností dna. Předpokládejte, že rychlost vln v je funkcí tíhového zrychlení g a hloubky moře h . Platí $v = C g^\alpha h^\beta$. Pomocí rozměrové analýzy určete rychlost vln v závislosti na hloubce vody. Číslo C je bezrozměrná konstanta, kterou touto metodou určit nedokážeme.

Kromě rychlosti vln ale koupajícího se Jindru ještě zajímá, z jakého směru k němu vlny dorazí. Definujme souřadnicovou soustavu, ve které hladina vody leží v rovině xy . Linie pobřeží má rovnici $y = 0$, oceán leží v polorovině $y > 0$. Hloubka vody h je funkcí vzdálenosti od pobřeží $h = \gamma y$, kde $\gamma = \text{konst}$. Na širém oceánu, kde je rychlost vln c konstantní (není ovlivněna hloubkou), postupují rovinné vlny, jejichž čela svírají s osou x úhel θ_0 . Najděte diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

popisující tvar čela vlny v blízkosti pobřeží, ale nepokoušejte se ji řešit, není vůbec triviální. Spočítejte, pod jakým úhlem narážejí čela vln na pobřeží.

Bonus Vyřešte diferenciální rovnici a najděte tvar čel vln v blízkosti pobřeží.

Jindra miluje jednoduchou rozměrovou analýzu a těžké diferenciální rovnice.

Jednotkou tíhového zrychlení je $[g] = \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, jednotkou hloubky je $[h] = \text{m}$ a jednotkou rychlosti je $[v] = \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Při rozměrové analýze se snažíme najít takové exponenty α a β , aby veličina $v = g^\alpha h^\beta$ měla rozměr rychlosti. Dosadíme do rovnice jednotky zmíněných třech veličin

$$\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = \text{m}^\alpha \cdot \text{s}^{-2\alpha} \cdot \text{m}^\beta = \text{m}^{\alpha+\beta} \cdot \text{s}^{-2\alpha}.$$

Rozměrová analýza vede vždy na soustavu lineárních rovnic. V našem případě z rovnosti exponentů na levé a pravé straně vznikne soustava

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta, \\ -1 &= -2\alpha, \end{aligned}$$

s řešením $\alpha = 1/2$ a $\beta = 1/2$. Závislost rychlosti vln na hloubce vody je

$$v = Cg^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}} = C\sqrt{gh},$$

kde C je bezrozměrná konstanta, kterou bohužel z rozměrové analýzy zjistit nemůžeme.

Jelikož hloubka moře je lineární funkcí vzdálenosti od pobřeží $h = \gamma y$, rychlost vln je $v = C\sqrt{g\gamma y}$. Vlny se šíří v souladu se Snellovým zákonem. Úhel, který svírají čela vln s pobřežím je stejný jako úhel mezi paprsky (kolmými na vlnoplochy) a kolmicí na pobřeží. Necht čelo vlny ve vzdálenosti y od pobřeží svírá s linií pobřeží úhel θ . Ze Snellova zákona odvodíme

$$\frac{\sin \theta}{v} = \frac{\sin \theta_0}{c} \Rightarrow \sin \theta = \frac{v \sin \theta_0}{c} = \frac{C\sqrt{g\gamma y} \sin \theta_0}{c} = \sqrt{ay},$$

kde a je konstanta pro zjednodušení zápisu. Vztah mezi derivací a úhlem θ je

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}},$$

Za $\sin \theta$ můžeme dosadit z předchozí rovnice, čímž dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{ay}}{\sqrt{1 - ay}}. \tag{11}$$

Pobřeží se nachází na souřadnici $y = 0$. Dosazením do rovnice zjistíme

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{y=0} = \frac{0}{\sqrt{1-0}} = 0$$

neboli čela vln jsou rovnoběžná s linií pobřeží. To je zajímavé zjištění. Až budete někdy u moře nebo u jiné velké vodní plochy, všimněte si toho, že vlny vždy dorážejí na břeh kolmo nezávisle na směru vln dál od břehu.

Možná vás zarazilo, že naše diferenciální rovnice (11) nedává smysl pro příliš velké hodnoty y , poněvadž výraz pod odmocninou by se stal záporným. To nevádí, protože pro velká y tato rovnice neplatí. Odvozený vztah pro rychlost vln $v \propto \sqrt{gh}$

je použitelný jen pokud je hloubka vody mnohem menší než vlnová délka λ vlny (rozumně použitelný je pro $h/\lambda < 0,05$).

Naopak pro velké hloubky vody (hranice je přibližně $h/\lambda > 0,5$) platí pro rychlost vln jiný vztah $v \approx g/(2\pi f)$, kde f je frekvence vlnění. Přítomnost dna už rychlost neovlivňuje. Pro sinusoidální vlnu je tudíž rychlost konstantní. Přechod mezi těmito dvěma režimy je obtížnější popsat, to nás však nemusí trápit. Snellův zákon totiž říká, že poměr $\sin \theta/v$ musí být pro každou vlnu všude stejný, takže můžeme propojit rychlost a úhel vlny na širém moři s rychlostí a úhlem u pobřeží. Zájemci o další informace o vodních vlnách mohou začít například na anglické wikipedii:³⁴

Bonus

Diferenciální rovnici separujeme a integrujeme

$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} dy = \int dx.$$

Tato rovnice vypadá na první pohled neřešitelně. Její řešení je sice dlouhé, avšak existuje. My si ho krok za krokem ukážeme.

Řešení integrálu na pravé straně je triviální

$$\int dx = x + D, \quad (12)$$

kde D je integrační konstanta.

Levé straně se však musíme věnovat podrobněji. V integrálech se členem pod odmocninou bývá užitečné zbavit se šikovou substitucí oné odmocniny. Tvar „něco minus jedna“ napovídá, že šikovou substitucí by mohlo být použití druhé mocniny hyperbolického kosinu místo „něčeho“

$$\begin{aligned} \frac{1}{ay} &= \cosh^2 \psi, \quad y > 0, \quad \psi > 0, \\ y &= \frac{1}{a \cosh^2 \psi}, \\ dy &= -\frac{2 \sinh \psi}{a \cosh^3 \psi} d\psi. \end{aligned}$$

Po dosazení získáme

$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} dy = -\frac{2}{a} \int \sqrt{\cosh^2 \psi - 1} \frac{\sinh \psi}{\cosh^3 \psi} d\psi = -\frac{2}{a} \int \frac{\sinh^2 \psi}{\cosh^3 \psi} d\psi.$$

Ani nový integrál bohužel není na první pohled řešitelný, můžeme jej však dále zjednodušit použitím per partes, kde označíme

$$\frac{\sinh^2 \psi}{\cosh^3 \psi} = uv',$$

³⁴[https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_\(water_waves\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_(water_waves))

pro funkce

$$u = \sinh \psi, \quad v = -\frac{1}{2} \frac{1}{\cosh^2 \psi},$$

$$u' = \cosh \psi, \quad v' = \frac{\sinh \psi}{\cosh^3 \psi}.$$

Tím integrál převedeme do tvaru

$$-\frac{2}{a} \int \frac{\sinh^2 \psi}{\cosh^3 \psi} d\psi = -\frac{2}{a} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sinh \psi}{\cosh^2 \psi} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cosh \psi} d\psi \right) = \frac{1}{a} \frac{\sinh \psi}{\cosh^2 \psi} - \frac{1}{a} \int \frac{1}{\cosh \psi} d\psi,$$

který už je našťestí řešitelný substitucí

$$\operatorname{tgh} \frac{\psi}{2} = t,$$

$$\psi = 2 \operatorname{argtgh} t,$$

$$d\psi = \frac{2}{1-t^2} dt.$$

Tato substituce s hyperbolickým tangens je analogická často používané substituci pro složité výrazy s goniometrickými funkcemi $\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = t$. Vztah mezi hyperbolickým tangens s polovičním argumentem a hyperbolickým kosinem je

$$t = \operatorname{tgh} \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{\cosh \psi - 1}{\cosh \psi + 1}} \Rightarrow \cosh \psi = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Po dosazení substituce do integrálu vyjde

$$\int \frac{1}{\cosh \psi} d\psi = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{2}{1-t^2} dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \operatorname{arctg} t = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\cosh \psi - 1}{\cosh \psi + 1}}.$$

Integrační konstantu nemusíme psát, protože jsme ji napsali už do integrálu (12) z pravé strany rovnice. Konečný výsledek je

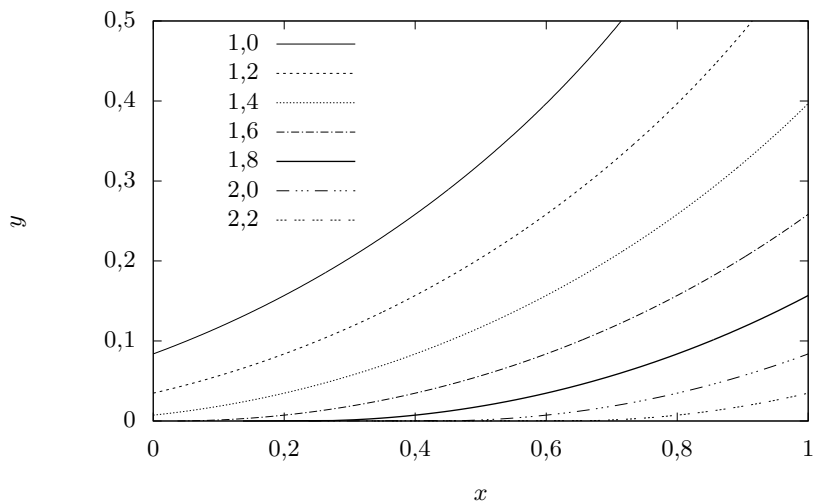
$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} dy = -\frac{2}{a} \int \frac{\sinh^2 \psi}{\cosh^3 \psi} d\psi = \frac{1}{a} \frac{\sinh \psi}{\cosh^2 \psi} - \frac{2}{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\cosh \psi - 1}{\cosh \psi + 1}}.$$

Nyní ještě místo substituční proměnné ψ musíme dosadit původní proměnnou y

$$\int \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} dy = y \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} - \frac{2}{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{ay}}{1 + \sqrt{ay}}}.$$

Řešení pravé strany v rovnici (12) spojíme s právě odvozeným řešením levé strany. Vztah pro tvar čela vlny v blízkosti pobřeží je

$$x + D = y \sqrt{\frac{1}{ay} - 1} - \frac{2}{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{ay}}{1 + \sqrt{ay}}}.$$



Obr. 14: Tvar vln dorážejících na pobřeží pro $a = 1$ a různé hodnoty D .

Číslo D je integrační konstanta. Výraz $x + D$ nám říká, že můžeme řešení libovolně posunout v souřadnici x , což dává smysl. Na souřadnici x totiž rychlost vln ani jejich tvar nijak nezávisí. Tvar čel vln v blízkosti pobřeží je vykreslen na obrázku 14. Ačkoli konstanta a má jednotku m^{-1} , můžeme jí považovat za bezrozměrnou, pokud to samé uděláme i s osami x a y .

Úloha III.5 ... kovářská

Skřítkci se rozhodli ukovat další magický meč. Vyrábějí jej z tenké kovové tyče o poloměru $R = 1$ cm, na jejímž jednom konci udržují teplotu $T_1 = 400$ °C. Tyč je obklopena obrovským množstvím vzduchu o teplotě $T_0 = 20$ °C. Součinitel přestupu tepla onoho bájného kovu je $\alpha = 12 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ a koeficient tepelné vodivosti má hodnotu $\lambda = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Tyč na výrobu meče je velmi dlouhá. Kde nejbližše zahřívávanému konci mohou skřítkci tyč chytit holýma rukama, nemá-li teplota v místě doteku překročit $T_2 = 40$ °C? Proudění vzduchu a tepelné záření neuvažujte.

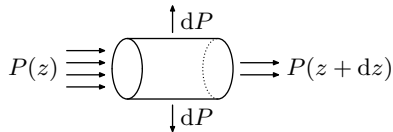
Matěj Rzehulka si spálil prsty o kov.

Pro popis tyče zvolíme válcové souřadnice, jejichž osa z bude rovnoběžná s osou tyče. První konec (s teplotou T_1) umístíme do počátku, druhý někam v kladném směru osy z . Zadání po nás chce najít závislost teploty na vzdálenosti $T(z)$. Díky předpokladu tenké tyče můžeme uvažovat, že teplota opravdu závisí jen na z .³⁵

Podívejme se na bilanci energie v libovolném úseku tyče (viz obrázek 15). Hustotu tepelného toku v axiálním směru q_a odvodíme z Fourierova zákona vedení tepla

$$q_a = -\lambda \nabla T = -\lambda \frac{dT}{dz}.$$

Vztah říká, že teplo v pevných látkách poteče ve směru největšího poklesu teploty, což lze intuitivně očekávat na základě 2. termodynamického zákona (teplo se samovolně nešíří z chladnějšího tělesa na teplejší). Konstantu úměrnosti λ lze chápat jako množství tepla, které projde stěnou jednotkové plochy a tloušťky za čas 1 s, pokud je rozdíl teplot na jejích okrajích 1 K.



Obr. 15: Úsek tyče od z po $z + dz$. Z předchozího úseku do něj teče výkon $P(z)$, do následujícího pokračuje $P(z + dz)$ a přes rozhraní se vzduchem uniká dP .

Výkon, procházející kolmým řezem tyčí ve vzdálenosti z , bude

$$P(z) = S q_a(z) = -\pi R^2 \lambda \frac{dT}{dz}(z) = -\pi R^2 \lambda T'(z).$$

Při infinitezimálním posunu podél tyče o dz se výkon změní na $P(z + dz) = -\pi R^2 \lambda T'(z + dz)$. Přestup tepla mezi dvěma látkami (zde z kovu do vzduchu) lze popsat Newtonovým vztahem

$$dP = \alpha (T - T_0) dS = 2\pi\alpha (T - T_0) R dz,$$

³⁵Kdyby tyč nebyla tenká, museli bychom uvažovat, že teplota závisí ještě na vzdálenosti od osy r . Teplota by zřejmě směrem ven klesala, protože tyč je na okrajích chlazená vzduchem.

kde T_0 značí teplotu *dostatečně daleko* od tyče, kde již teplota není tyčí ovlivněna.

Tento vztah je jen zjednodušením – v reálném případě bychom museli modelovat přirozené proudění vzduchu okolo horkého válce, což by bez počítače téměř nešlo. Zde jej „skryjeme“ do konstanty α a složitý průběh teploty nahradíme teplotou T_0 .

Jelikož předpokládáme ustálený stav, energie se nemůže nikde hromadit. To znamená, že výkon, který do úseku teče, z něj musí také vytékat

$$P(z) = P(z + dz) + dP.$$

Druhý člen v rovnici přesuneme na levou stranu a za všechny členy dosadíme

$$\begin{aligned} -\pi R^2 \lambda (T'(z) - T'(z + dz)) &= 2\pi\alpha (T - T_0) R dz, \\ \frac{T'(z + dz) - T'(z)}{dz} &= \frac{2\pi\alpha}{R\lambda} (T - T_0). \end{aligned}$$

Ve výrazu na levé straně ihned poznáváme vzorec pro druhou derivace funkce T' , neboli T'' . Tím jsme získali diferenciální rovnici pro $T(z)$, kterou už stačí jen vyřešit. Pro zjednodušení použijeme substituci $t = T - T_0$. Zřejmě $t'' = T''$, takže máme

$$t'' = \frac{2\pi\alpha}{R\lambda} t = ct \quad \Rightarrow \quad t'' - ct = 0, \quad (13)$$

kde jsme všechny parametry schovali do konstanty c .

Jedná se o homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Charakteristický polynom je

$$\kappa^2 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \sqrt{c},$$

řešení hledáme ve tvaru

$$t = Ae^{\kappa z} + Be^{-\kappa z} \quad \Rightarrow \quad T = t + T_0 = Ae^{\kappa z} + Be^{-\kappa z} + T_0.$$

Neznáme konstanty určíme z okrajových podmínek. V počátku je teplota T_1 čili platí

$$T_1 = T(z = 0) = A + B + T_0.$$

Naopak *velmi daleko* se teplota tyče vyrovná s teplotou vzduchu, která je konečná

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = T_0 \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

Potom zřejmě $A = T_1 - T_0$. Kombinací obou podmínek dostáváme výsledný vztah

$$T(z) = T_0 + (T_1 - T_0) e^{-\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda R}} z},$$

ze kterého už stačí jen vyjádřit souřadnici, kde teplota klesne pod T_2

$$z_2 = \sqrt{\frac{\lambda R}{2\alpha}} \ln\left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0}\right).$$

Dosadíme-li do vztahu číselné hodnoty, vyjde $z_2 = 42,5$ cm.

Poznámka: Známe-li rovnici vedení tepla pro homogenní izotropní prostředí

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{P_V}{\rho c_p} = \frac{\partial T}{\partial t},$$

můžeme rovnici (13) odvodit jednoduchým dosazením nulové pravé strany (protože jde o stacionární stav) a „záporného objemového zdroje tepla“

$$P_V = -\frac{q_n S}{V} = -\frac{2\pi R l \alpha (T - T_0)}{\pi R^2 l} = -\frac{2\alpha (T - T_0)}{R}.$$

Úloha III.P . . . umělá gravitace

Jak by mohla být na vesmírné lodi realizována umělá gravitace? Jaké by to mělo výhody a nevýhody v závislosti na různých charakteristikách vesmírného plavidla? Je realistická představa, že by v různých patrech vesmírné lodi měla různý směr či že by se rychle měnila, jak někdy můžeme vidět ve sci-fi filmech při „selhání umělé gravitace“?

Karel se zasnul při sledování sci-fi.

Lineární zrychlení

Pokud se omezíme na dostupné znalosti fyziky, k realizaci umělé gravitace potřebujeme, aby se loď pohybovala s nenulovým zrychlením. Setrvačné síly jsou totiž z pohledu pasažérů na lodi nerozeznatelné od gravitačních (viz Einsteinův myšlenkový experiment s výtahem).³⁶

V lineárním směru by to stálo velké množství paliva. Loď by se neustále musela pohybovat se zrychlením g , které by jako přetížení cítili astronauti. Není však známa žádná technologie, která by lodi dodávala takto velké zrychlení kontinuálně. Navíc bychom se po nějaké době (řádově měsíce) začali blížit rychlosti světla, takže by loď musela zrychlovat zase na opačnou stranu (brzdit), přičemž aby se nezměnily vnitřní podmínky, musela by se otočit svou původně přední částí dozadu.

Odstředivé zrychlení

Dobrá, jaké máme jiné možnosti? Třeba bude loď rotovat kolem vlastní osy. Odstředivé zrychlení ale závisí na vzdálenosti od osy otáčení a rychlosti a pochopitelně nikdy nenasimuluje dost přesně gravitační působení, jaké známe na Zemi. Současné moduly velké desítky metrů by se musely otáčet velkou úhlovou rychlostí, aby udržely požadovanou „gravitaci“.³⁷

Například pro rotující modul s poloměrem $r = 50$ m by udržení $a = g$ znamenalo vyvinutí obvodové rychlosti

$$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{ar}.$$

³⁶<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20020052455/downloads/20020052455.pdf>

³⁷<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20070001008/downloads/20070001008.pdf>

Číselně je to přibližně

$$v \doteq 22,14 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

To se nezdá nějak hrozné, vřdyt často cestujeme i větší rychlostí. Jenže je potřeba si uvědomit, že to znamená pohyb po kružnici rychlostí 4,2 rpm (otáček za minutu). Vzhledem k velikosti lidského těla (které je relativně velké k rozměrům celého rotujícího tělesa) by to znamenalo, že na části těla od hlavy k patě by působily značně jiné síly, takže bychom pocítovali konstantní napětí, což by vedlo ke zdravotním potížím.

Právě proto je lepší postavit loď s řádově větším poloměrem. Gradient setrvačných sil nebude tak výrazný a navíc získáme větší plochu „podlahy“.

Zatím se tento model testoval jen v laboratoři na rozměrech řádu desítek centimetrů. Ostatně na simulaci toho, jak bychom se cítili, stačí obyčejná zábavní centrifuga na pouti. Zemskou gravitaci si příliš neuvědomujeme, neboť na nás působí neustále a ve stálém směru. Působící síly si však rychle všimneme, když uděláme stojku nebo se projedeme (alespoň ti šťastnější z nás) v Tesle Model S schopné vyvinout zrychlení $a = g$.³⁸ Naše tělo vnímá silně pouze gravitaci v jiném směru než od hlavy k nohám, nebo naopak beztíži.

Podle psychologie je pro naše subjektivní vnímání zásadní, když se mění zrychlení. Tuto situaci popisujeme veličinou ryv (anglicky: jerk)

$$[j] = \text{m}\cdot\text{s}^{-3}.$$

Ryv definujeme jako derivaci zrychlení

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

Účinky ryvu na organismy pozoruje i biologie. Například točení hlavy poté, co jsme vystaveni proměnnému zrychlení, je dáno pohybem mikrokrytalů kalcitu ve vnitřním uchu. Velikost ryvu $j = 0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$ je na hranici našeho vnímání, $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$ a více již výrazně pocítíme a hodnota $10\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}$ způsobí trhání měkkých tkání (tohle doma nezkoušejte).³⁹

Samozřejmě můžeme definovat i další derivace zrychlení a ryvu a diskutovat jejich krátkodobé i dlouhodobé dopady na lidské tělo.

Jiné interakce

Co kdybychom gravitaci nahradili jinou interakcí, třeba elektromagnetickou? Pokud bychom se dostatečně silně nabili vůči okolí, byli bychom buď přitahováni, nebo odpuzováni. Elektromagnetická interakce je dokonce o mnoho řádů silnější než gravitační. Jenže není univerzální. Oddělení kladných a záporných nábojů přináší problémy v jaderné fyzice a s našimi možnostmi není ve větším měřítku

³⁸<https://tinyurl.com/fykosR35S3U6>

³⁹<https://link.springer.com/article/10.1007/s00221-020-05745-7>

realizovatelné, takže by se náboj brzy neutralizoval.

Lod by také mohla vzlétnout už nabitá. Ovšem i v tomto případě by srážkami s částicemi hmoty docházelo k postupnému rozptýlení náboje do okolního vesmíru. Dále by elektrostatickou indukcí na elektricky vodivých předmětech docházelo k jiskření, případně vzniku korony, což by zaprvé náboj rychle vybil, zadruhé to v přítomnosti oxidačních činidel (vzduchu) může způsobit požár. O tom, že náboj na lodi není úplně žádoucí, mohli vyprávět přeživší katastrofy vzducholodi Hindenburgt.⁴⁰

Všechny tyto možnosti ale spoléhají na to, že bychom byli ještě naživu, a je nutné dodat, že to by byl hned největší problém. Při vystavení extrémně silným EM polím by došlo k desynchronizaci elektrických nervových impulzů. Experimentálně to však zatím na lidech nikdo neověřoval.

Pokud by navíc pole byla proměnná, způsobí indukcí vznik proudů a zahřívání tkání, což by nás mohlo v podstatě upéct (po dosažení teploty v rozpětí 43 °C až 45 °C by došlo k denaturaci bílkovin, enzymů a následně ke smrti buněk).

Sci-fi

Dosud jsme se bavili pouze o situaci, kdy pasažéři zažívají rozumně „předvídatelnou“ gravitaci. V různých patrech lodi by směřovala stále stejným směrem, pouze s různou intenzitou. Měnící se umělá gravitace by byla možná jen obrovskými změnami rychlosti a opět se dostáváme k problému, jak vyvinout takové zrychlení.

Změny gravitace jsou však ve sci-fi literatuře a kinematografii možné téměř okamžitě a nečekaně. Například by se mohlo jednat o jistou exotickou hmotu, která dokáže rušit gravitační působení, případně ho obrátit apod. Například v herní sérii *Mass Effect* je objevena hmota, která je schopná měnit hmotnost okolních těles. Žádnou takovou částici však neznáme. Veškerou známou hmotu spojuje právě jednotná gravitace⁴¹ a její hmotnost ovlivňuje Higgsovo pole všem stejně.

Úloha IV.1 ... planetově závislé jednotky

Mnoho jednotek na Zemi je historicky svázáno s vlastnostmi naší planety. Jaké by byly jednotky jako metr, uzel či atmosféra, kdybychom je zavedli stejným způsobem, jako byly původně zavedeny na Zemi, ale přitom bychom bydleli na Marsu? Uvedte jak poměry mezi „zemskými“ a „marťanskými“ jednotkami, tak i jejich vyjádření pomocí jednotek SI. Karel se zamýšlel nad ne-SI jednotkami.

Metr

První oficiální definice metru pochází z roku 1793 jako jedna desetimilióntina vzdálenosti rovníku a severního pólu. Pokud uvažujeme Mars jako kouli o polomě-

⁴⁰<https://tinyurl.com/Hindenburgfykos>

⁴¹<https://cds.cern.ch/record/2295704/files/pdf.pdf>

ru $r_M = 3\,386$ km, tak je tato vzdálenost rovna čtvrtině jeho obvodu, přibližně tedy 5 319 km. Desetimiliontina této vzdálenosti činí přibližně polovinu metru. Podle původní definice by byl tedy „martanský“ metr přibližně poloviční než ten původní „zemský“

$$\frac{l_M}{l_Z} = \frac{R_M}{R_Z} \doteq 0,53.$$

Pro zajímavost, pokud bychom Mars uvažovali jako rotační elipsoid, došli bychom k úplně stejnému výsledku.

Metr byl také definován jako délka závěsu sekundového kyvadla. Toto kyvadlo má periodu dvě sekundy. Vyjdeme-li z učebnicového vztahu pro periodu matematického kyvadla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

můžeme poměr délek závěsů sekundových kyvadel na Marsu a Zemi vyjádřit jako podíl tabulkových hodnot tíhových zrychlení při jejich povrchu

$$\frac{l_M}{l_Z} = \frac{g_M}{g_Z} \doteq \frac{3,72 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}{9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} \doteq 0,38.$$

Podle této definice je „martanský“ metr ještě kratší, než ten určený z předchozí definice. Předpokládali jsme ale, že délka sekundy na Marsu a na Zemi je stejná. Pokud si ale Martané (stejně jako lidé) stanoví délku sekundy na

$$1 \text{ s} = \frac{1}{86\,400} \text{ d},$$

pak je tato doba jiná, neboť Mars má rotační periodu $P = 1,026$ d. Po této úvaze definujeme „martanský“ metr jako

$$l_M = l_Z \frac{g_M}{g_Z} \left(\frac{P_M}{P_Z} \right)^2 \doteq 0,38 \text{ m} \cdot 1,026^2 \doteq 0,40 \text{ m}.$$

Standardní atmosféra

Standardní atmosféra byla definována jako tlak vyvolaný sloupcem rtuti vysokým 760 mm při teplotě 0°C. Poměr velikosti této jednotky na Marsu a Zemi se dá vyjádřit jako

$$\frac{p_M}{p_Z} = \frac{h\rho g_M}{h\rho g_Z} = \frac{g_M}{g_n} \doteq 0,38,$$

kde $g_n = 9,807 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je standardní tíhové zrychlení pro Zemi, $g_M = 3,725 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je tabulková hodnota tíhového zrychlení na Marsu, ρ je hustota rtuti a $h = 760$ mm je definicí stanovená výška sloupce. Tedy číselně $p_M \doteq 385$ hPa. Opět však narazíme na jisté problémy - při průměrné povrchové teplotě Marsu je rtuť v pevném skupenství, takže její vlastnosti nejsou shodné s vlastnostmi rtuti v pozemském barometru. Otázkou je také, zda bychom neměli ve výpočtu uvažovat i výše uvedenou změnu délky, jelikož milimetr na Zemi a Marsu se podle předchozích úvah liší.

Situaci si však můžeme zjednodušit, pokud budeme atmosféru definovat jako průměrný atmosférický tlak na povrchu. V tomto případě platí

$$p_M \doteq 610 \text{ Pa} = 0,0060 \text{ atm}.$$

Uzel

Definice uzlu byla navržena tak, aby rychlost v uzlech byla rovna počtu obloukových minut zeměpisné šířky, které loď ujela za hodinu při jízdě v poledníkovém směru. Rychlost lodi v uzlech na Zemi a Marsu bude stejná, pokud jejich úhlové rychlosti budou stejné. Pak se ale ураžené vzdálenosti za jednotku času budou lišit. Např. loď plující rychlostí deset uzlů za hodinu urazí na Zemi během hodiny přibližně 18,6 km, zatímco loď plující stejnou rychlostí na Marsu urazí za stejný čas pouze asi 9,9 km (v pozemských kilometrech). Poměr rychlostí v $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ lodí se stejnou rychlostí v uzlech na Marsu a Zemi je dán poměrem jejich poloměrů jako

$$\frac{v_M}{v_Z} = \frac{R_M}{R_Z} \doteq 0,53.$$

Na situaci můžeme nahlížet i následovně. Definice uzlu v principu definuje jednotku úhlové rychlosti pohybu po povrchu $\omega_0 = 1' \text{ h}^{-1}$. Pokud bychom uvažovali navíc i změnu rotační periody, můžeme si uvědomit, že letadlo s rychlostí 1 uzel obletí planetu za $t = 360 \cdot 60 \text{ h} = 900P$. Z toho už lehce určíme poměr skutečných rychlostí jako

$$\frac{v_M}{v_Z} = \frac{\frac{2\pi R_M}{900P_M}}{\frac{2\pi R_Z}{900P_Z}} = \frac{R_M P_Z}{R_Z P_M} \doteq 0,52.$$

Úloha IV.2 ... rychlodráha

Matfyz kromě návrhu vlastního piva plánuje postavit i zábavní park. Postaví tam speciální fyzikální bobovou dráhu, na které boby začínají s nějakou nenulovou vertikální rychlostí v_y a rozjíždí se svisle dolů. Dráha se postupně zakřivuje víc a víc do vodorovného směru, přičemž svislá složka rychlosti zůstává konstantní.

Jakou mají boby rychlost ve vodorovném směru v závislosti na výšce, o kterou klesly, a jakou mají celkovou rychlost v závislosti na čase? Boby po dráze jezdí bez tření.

Bonus Jaký je tvar bobové dráhy?

Karel měl „světlou“ chvíli.

Máme danou vertikální rychlost v_y , která má být konstantní. Poloha ve směru y , pokud ji začneme počítat od místa, kde byl bob vypuštěn, přičemž směrem dolů bude kladná, poroste jako $y = v_y t$. Protože máme zanedbat odporové síly, musí platit zákon zachování mechanické energie, neboli

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy + \frac{1}{2}mv_y^2,$$

kde v je celková rychlost bobu ve výšce y , resp. v čase t , a m je hmotnost bobu. Tou ovšem můžeme celou rovnici vydělit a nebudeme ji tedy potřebovat. Vidíme,

že celková kinetická energie je počáteční kinetická a přírůstek způsobený poklesem bobu. Pokud rychlost ve směru x označíme jako v_x , pak platí

$$v_x^2 + v_y^2 = 2gy + v_y^2 \Rightarrow v_x = \sqrt{2gy}.$$

Tím jsme dostali odpověď na první otázku, horizontální rychlost je $v_x = \sqrt{2gy}$. Pokud do zákona zachování energie dosadíme časovou závislost y , získáme vztah pro rychlost

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgv_y t + \frac{1}{2}mv_y^2 \Rightarrow v^2 = 2gv_y t + v_y^2 \Rightarrow v = v_y \sqrt{1 + \frac{2gt}{v_y}}.$$

Odpověď na druhou otázku je, že celková rychlost bobu se v čase vyvíjí jako $v = v_y \sqrt{1 + \frac{2gt}{v_y}}$.

Bonus

Dráhu si vyjádříme parametricky. Od počátku víme, že platí $y = v_y t$. Co platí pro x ? To zjistíme tak, že nalezneme v_x v závislosti na čase a zintegrujeme jej.

$$v_x = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gv_y t} \Rightarrow x = \int_0^t v_x(\tau) d\tau = \int_0^t \sqrt{2gv_y \tau} d\tau = \frac{1}{3} \sqrt{8gv_y t^3}.$$

Získali jsme tak parametrické vyjádření. Ještě můžeme najít závislost $y(x)$, pokud vyjádříme t z jedné rovnice a do druhé dosadíme. Potom nám vyjde $y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9x^2 v_y^2}{g}}$. Z výsledků je patrné, že tvar dráhy bude záviset i na rychlosti, se kterou budeme chtít bob vypouštět.

Úloha IV.3 ... kyvadlové nárazy

Dvě malé kuličky jsou upevněny na koncích provázků stejné délky ($l = 42,0$ cm) a zanedbatelné hmotnosti. Opačné konce obou provázků jsou uchyceny v tomtéž bodě. Kuličky mají stejnou velikost, liší se však materiálem, z něhož jsou vyrobeny. Jedna je ocelová ($\rho_1 = 7840$ kg·m⁻³) a druhá duralová ($\rho_2 = 2800$ kg·m⁻³). Obě závaží pustíme z klidu s počáteční výchylkou 5° , poté dojde k dokonale pružné srážce. Do jaké maximální výšky po ní jednotlivé kuličky vystoupí? Jak to dopadne po druhé srážce? Karel chtěl ostatní hypnotizovat. Chce se vám řešit úlohu ...

Pre jednoduchost si zvolíme hladinu nulovej potenciálnej energie v mieste zrážky. Poznáme dĺžku lana l a uhol $\alpha_0 = 5^\circ$, vďaka ktorým vieme, že počiatočná výška oboch závaží je

$$h_0 = l(1 - \cos \alpha_0) = 1,60 \text{ mm}.$$

Podľa zákona zachovania mechanickej energie (ďalej len ZZE) môžeme písať pre prvé závažie

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1 g h_0,$$

$$v_1 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_0)}.$$

Kedže je druhé závaží vychýlené pod rovnakým uhlom a jeho lano má rovnakú dĺžku, tak platí $v_2 = -v_1$. Aby sme zistili rýchlosť závaží po náraze použijeme ZZE a zákon zachovania hybnosti (ďalej len ZZH)

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2, \\ m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'.$$

Riešením tejto sústavy rovníc a dosadením za m_1, m_2, v_1, v_2 a h_0 získame

$$v_1' = \frac{\rho_1 - 3\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_0)}, \\ v_2' = \frac{3\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_0)}.$$

Teraz vieme späťne vypočítať do akej výšky h_1' a h_2' vystúpia jednotlivé závažia podľa ZZE

$$\frac{1}{2}m_1v_1'^2 = m_1gh_0 \Rightarrow h_1' = \frac{v_1'^2}{2g}, \\ h_1' = \left(\frac{\rho_1 - 3\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2 l(1 - \cos \alpha_0) \doteq 4,43 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Rovnaký postup je aj pri druhom závaží

$$h_2' = \left(\frac{3\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2 l(1 - \cos \alpha_0) \doteq 6,06 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

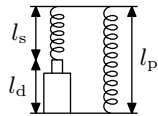
Vidíme teda, že ľahšie duralové závaží bude „vystrelené“ výrazne vyššie, zatiaľ čo pohyb ocelového závažia bude len ťažko pozorovateľný.

Riešime matematické kyvadlo, a preto platí, že druhá zrážka nastane na rovnakom mieste ako prvá. Podľa ZZE budú mať závažia rovnaké rýchlosti pred druhou zrážkou ako mali po prvej zrážke. Riešime opäť tú istú sústavu rovníc, preto budú mať závažia po druhej zrážke rýchlosti rovnaké ako mali pred prvou zrážkou, a teda vystúpajú do pôvodnej výšky.

Po prvej zrážke vystúpajú závažia do výšok $h_1' \doteq 4,43 \cdot 10^{-6}$ m a $h_2' \doteq 6,06 \cdot 10^{-3}$ m, po druhej zrážke vystúpajú naspäť do pôvodnej výšky.

Úloha IV.4 ... analógie

Mějme dvě hookeovské pružiny s modulem pružnosti $E = 2,01$ GPa a píst s viskozitou $\eta = 9,8$ GPa·s. Závislost napětí σ na relativním prodloužení ε je popsána vztahem $\sigma_s = E\varepsilon_s$ pro pružinu a $\sigma_d = \eta\dot{\varepsilon}_d$ pro píst, přičemž tečka zde značí derivaci podle času. Jednu pružinu délky l_s a píst délky l_d zapojíme do série a poté k nim paralelně připojíme druhou pružinu o délce l_p . Celý tento systém pak náhlým roztážením uvedeme do stavu s $\varepsilon_0 = 0,2$ a toto prodloužení dále držíme konstantní. Určete, za jak dlouho od roztážení poklesne napětí v systému



na polovinu původní hodnoty, jestliže platí $\frac{l_s}{l_p} = 0,5$.

Mírek vymýšlel úlohy na zkoušce. Zase.

Napětí v sériově zapojené pružině, v paralelní pružině a v pístu označíme postupně σ_s , σ_p a σ_d . Relativní prodloužení bude obdobně ε_s , ε_p a ε_d .

Celkové napětí v systému, které označíme σ , je dáno součtem napětí jednotlivých paralelních částí. Napětí v první části je $\sigma_s = \sigma_d$, zatímco ve druhé je to jednoduše σ_p . Potom

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_s. \quad (14)$$

Ze zadání vyplývají vztahy mezi napětími a relativními prodlouženími

$$\sigma_s = E\varepsilon_s, \quad \sigma_p = E\varepsilon_p, \quad \sigma_d = \eta\varepsilon_d.$$

Zatím máme 7 neznámých a 5 rovnic, potřebujeme proto získat ještě dvě rovnice. První z nich vychází z faktu, že prodloužení ε_p je konstantní, neboli $\varepsilon_p = \varepsilon_0$. Poslední rovnice vyplývá ze zachování délky. Zřejmě platí $l_p = l_s + l_d$. Obecně (při libovolném natažení) musí platit

$$(1 + \varepsilon_p)l_p = (1 + \varepsilon_s)l_s + (1 + \varepsilon_d)l_d.$$

Pro zjednodušení si definujme konstantu $\lambda = \frac{l_s}{l_p}$, čímž dostaneme

$$1 + \varepsilon_p = (1 + \varepsilon_s)\lambda + (1 + \varepsilon_d)(1 - \lambda).$$

Toto je naše poslední rovnice. Je jasné, že budeme muset řešit diferenciální rovnici, začneme tedy vyjádřením časové derivace relativního prodloužení pístu

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_d &= \frac{\sigma_d}{\eta} = \frac{\sigma_s}{\eta} = \frac{E\varepsilon_s}{\eta} = \frac{E}{\eta} \left(\frac{1 + \varepsilon_0}{\lambda} - 1 - (1 + \varepsilon_d) \frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) = \\ &= \frac{E}{\eta\lambda} (1 + \varepsilon_0 - \lambda - (1 + \varepsilon_d)(1 - \lambda)) = \frac{E}{\eta\lambda} (\varepsilon_0 - (1 - \lambda)\varepsilon_d) = \\ &= -\frac{E(1 - \lambda)}{\eta\lambda} \left(\varepsilon_d - \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda} \right). \end{aligned}$$

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_d - \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda}} d\varepsilon_d &= -\frac{E}{\eta} \frac{1 - \lambda}{\lambda} dt, \\ \ln\left(\varepsilon_d - \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda}\right) &= C - \frac{E}{\eta} \frac{1 - \lambda}{\lambda} t, \end{aligned}$$

kde C je integrační konstanta. Nyní si můžeme vyjádřit prodloužení pístu

$$\varepsilon_d = \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda} + Ae^{-\frac{E}{\eta} \frac{1 - \lambda}{\lambda} t},$$

kde $A = e^C$ je další konstanta. Pro její určení použijeme počáteční podmínky. V čase $t = 0$ s (těsně po natažení systému) se píst ještě nestihl dát do pohybu, takže platí $\varepsilon_d(0) = 0$. Z toho plyne

$$A = -\frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda} \Rightarrow \varepsilon_d = \frac{\varepsilon_0}{1 - \lambda} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} \frac{1 - \lambda}{\lambda} t} \right).$$

Už máme vše potřebné proto, abychom mohli spočítat celkové napětí v systému. Začneme dosazením do rovnice (14)

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_s = \sigma_p + \sigma_d = E\varepsilon_0 + \eta\dot{\varepsilon}_d.$$

Dále spočítáme časovou derivaci relativního prodloužení pístu

$$\dot{\varepsilon}_d = -\frac{\varepsilon_0}{1-\lambda} e^{-\frac{E}{\eta} \frac{1-\lambda}{\lambda} t} \left(-\frac{E}{\eta} \frac{1-\lambda}{\lambda} \right) = \frac{E\varepsilon_0}{\eta\lambda} e^{-\frac{E}{\eta} \frac{1-\lambda}{\lambda} t},$$

kteřou rovnou dosadíme do předchozí rovnice

$$\sigma = E\varepsilon_0 + \frac{E\varepsilon_0}{\lambda} e^{-\frac{E}{\eta} \frac{1-\lambda}{\lambda} t} = E\varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{E}{\eta} \frac{1-\lambda}{\lambda} t} \right).$$

Podle zadání hledáme čas τ , ve kterém je napětí poloviční oproti počáteční hodnotě, neboli

$$\sigma(\tau) = \frac{1}{2}\sigma(0) = \frac{1}{2}E\varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right).$$

Odtud už snadno vyjádříme τ jako

$$\tau = \frac{\eta}{E} \frac{\lambda}{1-\lambda} \ln \frac{2}{1-\lambda}.$$

Číselně $\tau \doteq 6,8$ s.

Úloha IV.5 ... vrtulník

Ptáka Fykosáka už unavovalo létat silou vlastních křídel, a proto začal přemýšlet o stavbě vlastního vrtulníku. Vytvořil si jednoduchý model nosného rotoru a chtěl zjistit, s jakou úhlovou frekvencí ω se má skutečný rotor otáčet. Listy rotoru se zařezávají do vzduchu pod úhlem 45° . Molekuly vzduchu jsou jimi díky tomu odráženy přímo dolů, čímž vzniká tok hybnosti. Molekuly vzduchu považujte za původně nehybné a srážky s nosnou plochou za dokonale pružné.

Účinná část nosné plochy (tj. část skloněná pod úhlem 45° vůči vodorovnému směru) se nachází ve vzdálenosti $r_1 = 50$ cm až $r_2 = 6,00$ m od osy rotace, průmět listu rotoru do vsmíslého směru má výšku $h = 10,0$ cm. Fykosákův vrtulník bude mít čtyři takové listy.

Kolik otáček za sekundu musí rotor vykonat, aby se vrtulník o hmotnosti $m = 2500$ kg právě udržel na místě? Jindrovi bylo vedro, tak si stoupl pod vrtulník.

Obvodová rychlost vrtule závisí na vzdálenosti od osy rotace, tím pádem na ni bude závislá i rychlost sestupného proudu vzduchu. Představme si infinitezimální válcový element vzduchu obepínající osu rotace ve vzdálenosti r . Výška tohoto elementu je h (stejná jako vertikální výška listu rotoru) a jeho radiální šířka je dr . Tento element vzduchu má hmotnost

$$dm = 2\pi\rho r h dr.$$

Otáčející se list rotoru pošle tento element vzduchu dolů rychlostí $v = \omega r$. Perioda rotoru je $T = 2\pi/\omega$. Hybnost tohoto elementu letícího dolů je

$$dp = v dm = 2\pi\rho\omega hr^2 dr,$$

přičemž se tento děj odehraje za čas T , takže na vrtulník působí element reakční síly směrem nahoru

$$dF_1 = \frac{dp}{T} = \frac{\omega dp}{2\pi} = \rho\omega^2 hr^2 dr.$$

Vztlaková síla působící na vrtulník od jednoho listu rotoru je

$$F_1 = \int_{r_1}^{r_2} \rho\omega^2 hr^2 dr \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{1}{3}\rho\omega^2 h (r_2^3 - r_1^3).$$

Rotor má $N = 4$ listů, takže celková vztlaková síla je

$$F = \frac{N}{3}\rho\omega^2 h (r_2^3 - r_1^3).$$

Jestliže se má vrtulník tak akorát udržet ve vzduchu, musí být vztlaková síla rovna tíhové

$$F = mg,$$

kde $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení. Úhlová frekvence rotoru tak musí být

$$\omega = \sqrt{\frac{3mg}{N\rho h (r_2^3 - r_1^3)}}.$$

Po dosazení číselných hodnot ze zadání a hustoty vzduchu $\rho = 1,29 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ dostáváme

$$\omega = 25,7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Počet otáček za sekundu je

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 4,09 \text{ Hz}.$$

Rotor musí vykonat 4,09 otáček za sekundu, aby se vrtulník udržel na místě.

Úloha IV.P ... zimnou krajinou

Zamyslete se nad tím, jak je možné zjednodušit pohyb člověka krajinou v zimních podmínkách. Vezměte do úvahy různé sklony terénu, typy sněhové pokrývky („prašan“, mokrý sníh, přemrzlý sníh, led, ...) a pomůcky (sněžnice, lyže, mačky, brusle, ...). Popište, jak dané pomůcky z fyzikálního hlediska fungují, a na základě toho určete, které jsou v jakých podmínkách nejvhodnější.

Dodo by chcel konečne poriadnu zimu.

Budeme se řídit radou ze zadání a popíšeme nejdříve fyzikální principy, na kterých dané pomůcky fungují. Poté zmíníme, jaké jsou jejich výhody a nevýhody v různých typech prostředí.

Sněžnice

Sněžnice lidé používali minimálně již před 4 tisíci lety. Fyzikální princip, na kterém sněžnice fungují je totiž velmi jednoduchý. Hloubka, do které se noha člověka snažícího se brodit sněhovou pokrývkou zaboří, se bude zvětšovat s rostoucím tlakem, kterým noha na sníh působí. Pokud tedy zvětšíme plochu, na které tíha působí, tím, že k botě připevníme sněžnici, zmenšíme tím hloubku zaboření.

Hloubka zaboření samozřejmě bude záviset i na typu sněhu. Pokud sníh bude starý a zmrzlý, je možné, že po něm půjde chodit bez zaboření bez sněžnic. Pokud se ale bude jednat o hluboký, čerstvě napadaný sníh, tak se bez nějaké pomůcky zabraňující zaboření neobejdeme. I při použití sněžnic se v čerstvém sněhu standardně noha zaboří 15 až 20 cm. Běžně se určuje velikost sněžnice pomocí pravidla $14,5 \text{ cm}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$ na jednu sněžnici. Proto horolezecké sněžnice mohou být až 76 cm dlouhé a 25 cm široké.

Tradiční sněžnice se skládaly z dřevěného rámu, na který byla napnuta mřížka z kůží. Moderní sněžnice pak mají buďto kovový nebo plastový rám a výplň ze syntetických materiálů. Horolezecké sněžnice mají také kovové zuby pro lepší stabilitu na strmých svazích.



Obr. 16: Tradiční sněžnice
(<https://en.wikipedia.org/wiki/Snowshoe>).



Obr. 17: Moderní sněžnice
(<https://en.wikipedia.org/wiki/Snowshoe>).

Mačky

Mačky jsou tvořeny rámem a sadou kovových hrotů, které se připevňují na obuv. Slouží ke zvýšení stability na ledových a sněhových površích. Používají se hlavně v horolezectví, případně při lezení na ledových stěnách. V závislosti na funkci, ke které jsou určeny, mají rozdílnou geometrii hrotů.



Obr. 18: Mačky pro lezení na ledové stěně
(<https://en.wikipedia.org/wiki/Crampons>).

Lyže

Stejně jako sněžnice i lyže jsou člověkem využívány již tisíce let. Základní funkce lyží je podobná jako u sněžnic, tedy zvětšení kontaktní plochy se sněhem. K tomu ale navíc slouží k úspoře energie pomocí snížení tření mezi lyží a sněhem. Dnešní lyže jsou ale mnohem sofistikovanější než jejich starověcí předci. V naprosté většině případů jsou lyže používány ještě s hůlkami pro větší mobilitu a stabilitu. Základní dělení lyží je na běžecké a sjezdové. Jak již název napovídá, běžecké lyže slouží k překonávání převážně rovinných terénů, případně k běhu do kopce. Sjezdové lyže pak poskytují velkou kontrolu při sjezdu z kopce. Existují ale také hybridní lyže, které kombinují tyto dvě funkce.

Běžecké lyže Dělením lyží na běžecké a sjezdové jejich klasifikace ale zdaleka nekončí. Běžecké lyže se dále dělí na základě toho, jakou technikou se na nich běhá. Jedná se buďto o lyže klasické nebo lyže na bruslení (skatové). Klasické běžecké lyže se pak dále dělí podle toho, do jakého typu terénu jsou nevhodnější. Některé jsou vhodné do upravené stopy, jiné pak do nedotčené přírody.

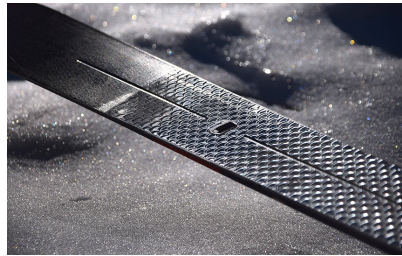
Zabývejme se nyní fyzikálním principem techniky klasického běžeckého lyžování, přesněji principem techniky *strídavého běhu*. Zprv je nutné zmínit, že u běžeckého lyžování má lyžař volnou patu. Bota je k vázání připevněna pouze ve špičce. Při klasickém lyžování se pak lyžař odráží z ploch lyží. Klasický běh na lyžích je velmi podobný běhu na „suchu“. Celkově se klasický běh na lyžích dá rozdělit do tří fází: odraz z jedné nohy, přesun váhy na druhou nohu a skluz. Jak je ale možné, že se lyžař dokáže odrazit z plochy lyže bez toho aby došlo k podklouznutí? To umožňuje speciální tvar lyží, jež jsou (dvojitě) klenuté⁴² a zároveň použitím tzv. *stoupacího vosku* v určité části skluznice lyže. Těto části skluznice se říká *mazací komora* a nachází se pod vázáním. Stoupací vosk slouží ke zvýšení tření

⁴² Anglický název pro toto klenutí je *double camber*.

skluznice a sněhu, aby bylo možné se odrazit. U některých lyží bývá skluznice v oblasti mazací komory opatřena tzv. „šupinami“, které slouží ke zvýšení tření mezi sněhem a lyží v momentu odrazu. Takovému lyže se pak nemusí mazat stoupacími vosky.



Obr. 19: Klenutí klasické běžecké lyže
(<https://tahoetrailguide.com>).



Obr. 20: Protiskluzový vzor pod vázáním
(<https://tahoetrailguide.com>).

Pokud tedy lyži položíme na rovný podklad, bude se ho dotýkat pouze u špičky a u jejího konce. První klenutí slouží k rovnoměrnému rozložení váhy lyžaře. Pokud však bude stát na obou lyžích zároveň, nebude lyže zcela narovnaná (pokud lyžař používá správně dlouhé lyže). Mazací komora stále nebude v kontaktu s podkladem. Teprve když lyžař bude stát celou vahou na jedné lyži, dojde ke kontaktu mazací komory se sněhem a bude se moci odrazit.⁴³

Dalším stylem jízdy, který také spadá do klasického běžeckého lyžování, a kterou využívají hlavně závodní lyžaři, je technika zvaná *soupaž*. U této techniky neprobíhá odraz z ploch lyží - lyžař je poháněn vpřed pouze odrazy hůlek. Tento styl ale pro naprostou většinu lyžařů není dlouhodobě udržitelný. Pokud je ale lyžař dostatečně sebevědomý a věří, že celou plánovanou trasu zvládne tímto stylem, nemusí lyže mazat stoupacím voskem.

Lyže pro klasické lyžování ve stopě jsou velice lehké a tenké (40 – 50 mm) a navíc k dosažení zmiňovaného dvojitého klenutí nejsou opatřeny kovovými hranami, které by negativně ovlivňovaly tuhost a váhu lyží. Běžecké lyže také na rozdíl od lyží sjezdových nemají postranní výřez, tzn. jsou ve všech místech přibližně stejně široké. To napomáhá lyži jet rovně. Na druhou stranu se s ní pak poměrně obtížně zatáčí.

Mimo klasické lyžování se v 80. letech rozmohla alternativní technika, tzv. *bruslení*. Jak již název napovídá, tento styl lyžování má mnoho podobného s ledním či in-line bruslením. Místo odrazů z ploch se v tomto případě lyžař odráží z hran

⁴³V ideálním případě by ani po přesunutí celé váhy neměla být mazací komora v kontaktu se sněhem, protože skluz by správně měl probíhat právě na jedné noze. Až teprve při odrazu směrem nahoru a dopředu se lyže ještě dodatečně stlačí a v tu chvíli dojde ke kontaktu. Tato situace je ale pouze ideální případ, kterého dosahují lyžaři s výbornou technikou a začátečníci by na takovéto lyži nebyli schopni se pořádně odrazit.

lyží. Tento způsob jízdy je rychlejší než obě techniky klasického lyžování, neboť pro odraz při střídavém běhu je při odrazu daná lyže vždy v klidu. Při soupaži se zase minimálně využívá spodní část těla, což není tolik efektivní. Na druhou stranu, aby bylo bruslení možné, musí být trať upravená, sníh musí být alespoň trochu stlačený, jinak by se lyže propadávaly do sněhu a bruslení by bylo prakticky nemožné. Skatové lyže jsou kratší než klasické, mají nižší klenutí a jsou tužší.



Obr. 21: Skatová vs klasická technika
(<https://www.lofsdalen.com/en/cross-country-skiing>).

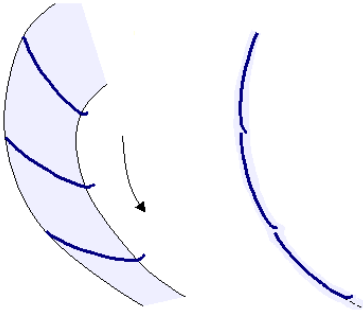
Sjezdové lyže Sjezdové lyže se od těch běžeckých poměrně výrazně liší. Jsou zpravidla kratší, širší, a navíc jsou užší v oblasti vázání oproti jejich koncům (hrany lyží opisují část kružnice). Dále pak mají kovové hrany a jejich klenutí je nižší než u běžeckých klasických lyží. Tvar klenutí se mění v závislosti na tom, na jaký typ sjezdu je lyže určena. V některých případech je klenutí dokonce záporné po celé lyži, nebo se kombinuje se standardním v určitých částech lyže. Noha je tentokrát k lyži připevněna jak ve špičce tak u paty, neboť je žádoucí co největší kontrola nad lyží.

Jelikož sjezd přímo dolů ze svahu je pro naprostou většinu lyžařů v podstatě sebevražda (i na standardních lyžích je možné dosáhnout rychlostí přes $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$), je nutné nějakým způsobem brzdit. To se dělá zatáčením. Zatáčet se na lyžích dá zatáčet dvěma způsoby.

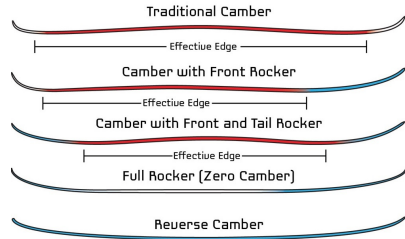
Pokud lyžař zatáčí smykem, seškrabuje při zahranění lyží vrchní vrstvu sněhu ze sjezdovky, přičemž zpětná reakce sněhu lyžaře brzdí. Při tomto způsobu nejsou lyže v rovnoběžné poloze se směrem rychlosti lyžaře. Tato technika není příliš náročná, protože lyžař nemusí vyvinout tak velký tlak na hranu lyží, aby dosáhl požadovaného efektu.

Pokročilejší technika je tzv. *carvingový* oblouk. V tomto případě lyžař jede také po hraně lyže, ale tentokrát na ni musí vyvinout dostatečně velký tlak, aby se zasekla do sjezdovky dostatečně hluboko. Pokud toto nastane, lyžař již nebude

podjíždět směrem vně okamžitého oblouku jeho trajektorie, ale udrží si kruhovou trajektorii (viz obr. 22).



Obr. 22: Smyk vs carvingový oblouk (<https://donsnotes.com/sports/ski-technology.html>).



Obr. 23: Typy profilů sjezdových lyží (<https://donsnotes.com/sports/ski-technology.html>).

Typy klenutí a míra vykrojení lyží výrazně ovlivňují jejich jízdní vlastnosti. U dnešních lyží se standardně kombinuje tradiční klenutí uprostřed lyží a záporné klenutí na koncích lyže. Standardní klenutí slouží k požadovanému rozložení hmotnosti lyžaře po celé délce lyže, čím se zvyšuje efektivní hrana lyže (tzn. délka hrany lyže, která je v dané situaci v kontaktu se sněhem) při carvingovém oblouku. Záporné klenutí na koncích lyže snižuje efektivní hranu při malém úhlu naklonění lyže, tedy při malých rychlostech, což umožňuje velkou míru kontroly nad lyžema. Při zvětšujících se úhlech naklonění lyže pak roste délka efektivní hrany, což zvětšuje stabilitu lyže při carvingovém oblouku. I když mají sjezdové lyže uprostřed tradiční klenutí, ve velkých rychlostech se stejně prohnou na druhou stranu, neboť to je jediný způsob, jak může být vykrojená hrana lyže po celé její délce v kontaktu se sjezdovkou (viz obr. 24). Tímto způsobem je ale váha lyžaře rozložena po hraně lyže rovnoměrně. Lyže se záporným klenutím se potom používají v podstatě jenom na jízdě mimo sjezdovky v hlubokém sněhu.

Hybridní lyže Ukázali jsme si základní principy konstrukcí lyží běžeckých a sjezdových a z nich plynoucí požadované vlastnosti v daných situacích. Designéři lyží se ale také snaží tyto vlastnosti kombinovat do jedné sady lyží. Vznikají potom lyže, které nejsou vynikající ani v jedné situaci, ale dají se použít v obou případech. Existuje celé spektrum lyží mezi hraničními případy klasických běžeckých lyží a lyží sjezdových. Potom už záleží na daném lyžaři, jakým způsobem má v plánu lyže použít. Pokud např. zvětšíme tloušťku klasické lyže a opatříme jí kovovými hranami, nebude tak elastická a sníží se tím pádem její skluz, ale půjde zase použít v hlubším sněhu a také se s ní jednodušeji budou sjíždět svahy.

Existují pak nejen hybridní lyže ale i hybridní technika sjezdu, kdy lyžař má upevněnou pouze špičku boty, tzv. *Telemark*.⁴⁴



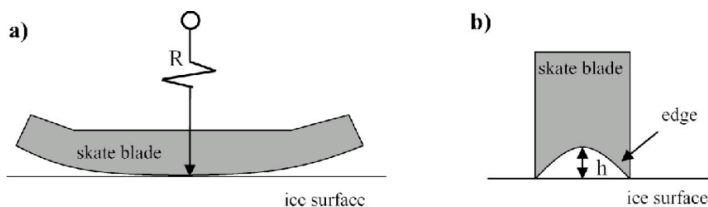
Obr. 24: Závodník v carvingovém oblouku (<https://donsnotes.com/sports/ski-technology.html>).



Obr. 25: Závodník v telemarkovém oblouku (https://en.wikipedia.org/wiki/Telemark_skiing).

Brusle

Dalším velice starým nástrojem využívaným ke zefektivnění pohybu člověka v zimní krajině jsou brusle. Pokud bereme za samozřejmé, že led je kluzký, tak princip fungování bruslí není nijak složitý. Brusle mají ostré hrany, kterými se zařezávají do ledu a tím pádem je v té chvíli umožněn pohyb pouze ve směru nože brusle. Bruslař se tedy odrazí ve směru kolmém na pohyb brusle. Vhodným nakloněním bruslí se poté bruslař pohybuje vpřed. Výhodou bruslení oproti chůzi je, že se ve velké míře zachovává kinetická energie bruslaře a také že pro odraz není nutné, aby noha bruslaře byla v klidu.



Obr. 26: Nože bruslí (https://www.researchgate.net/publication/5243786_Ice_friction_of_flared_ice_hockey_skate_blades).

⁴⁴Telemark je také jméno Norského města kde norští řemeslníci v polovině 19. století vynalezli tradiční klenutí lyže. Tato sjezdová technika je pak také ta originální, neboť v té době ještě neexistovaly vázání s pevnou patou.

Nože bruslí nejsou vybroušeny do tvaru „V“ jak by si možná někdo mohl myslet. Jejich tloušťka je ve všech místech stejná (1 – 4 mm), tím pádem má každá z bruslí dvě hrany (viz obr. 26b). Dále je pak u většiny bruslí zespodu vybroušen žlábek. Čím hlubší (resp. čím menší poloměr žlábků) tím je brusle stabilnější a lépe ovladatelná, ale za cenu snížené rychlosti. Z toho důvodu jsou brusle rychlobruslařů zespodu zcela rovné, krasobruslaři mají zase žlábků velmi hluboké. Hokejisté se pohybují někde mezi těmito dvěma extrémy. Navíc nejsou nože po délce zcela rovné, ale mají vypouklý profil. To zaručuje lepší ovladatelnost.

To, že je vůbec možné na ledě bruslit bylo dlouho vysvětlováno tím, že s rostoucím tlakem klesá hodnota bodu tání vody. Led měl pod působením tlaku roztát a brusle by potom mohla klouzat po tenké vrstvě vody. Toto se však ukázalo jako nedostatečné vysvětlení, protože v uvažované situaci není dosahováno dostatečných tlaků pro bruslení pod $-4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Jiné vysvětlení je založené na skutečnosti, kterou objevil již Michael Faraday a to je fakt, že se na ledu přirozeně vyskytuje mikroskopická vrstva vody (až do $-38\text{ }^{\circ}\text{C}$). Spolu s táním ledu vlivem tření (i když toto tření je relativně malé) při vyšších rychlostech pak vzniká kolem hran bruslí dostatečně silná vrstva vody a brusle po ledě klouže.

Použití v terénu

Nakonec porovnáme výhody a nevýhody zmíněných pomůcek v různých typech prostředí.

Rovinná oblast Pro pohyb v zasněžené rovinné oblasti bude v naprosté většině případů nevhodnější použít běžecské lyže. Alternativou jsou potom sněžnice. Lyže ale budou v podstatě vždy rychlejší než sněžnice a zkušený lyžař také nebude muset vynaložit tolik sil pro uražení stejné vzdálenosti z důvodu nízkého tření mezi lyžemi a sněhem. To znamená, že se pomocí jediného odrazu dostane dál než turista na sněžnicích a také při jízdě z kopce (klidně i mírného) nemusí vynaložit v podstatě žádnou energii. Toto platí v podstatě pro všechny typy sněžné pokrývky, i když pro každý tento typ je nutné zvolit vhodný typ lyží a také je správně připravit (namazat správným typem stoupacího vosku a parafínu).

Přesto sněžnice poskytují určité výhody. Pokud by se např. turista chtěl vydat na delší výpravu, kde by s sebou potřeboval vzít větší množství zásob a nesl by je v batohu, tak by dodatečné zatížení mohlo značně zkomplikovat jízdu na lyžích. Dané běžecské lyže jsou většinou určeny pro relativně úzký interval váhy lyžaře a pokud by byl přetížený, bude mu drhnout mazací komora, což by vedlo k výraznému zhoršení skluzu lyží. To by se ale dalo vyřešit tím, že by zásoby táhl za sebou. Další výhodou sněžnic je, že je to méně komplikovaný nástroj a z toho důvodu i méně náchylný k závadám. To také hraje významnou roli při delších výpravách.

Další výhodou sněžnic je, že se v nich lépe manévruje. Kdyby se turista např. pohyboval v hustém lese, je možné že jízda na lyžích bude značně komplikovaná.

Kopcovitá oblast Tento případ je velmi podobný případu předchozímu. Na lyžích je možné stoupat do kopce v naprosté většině sněžných podmínek, pokud

jsou lyže správně namazané, popř. pokud mají dostatečně vhodný protiskluzový vzor pod vázáním. Pro velmi strmé svahy je pak také možné určité typy lyží opatřit stoupacími pásy, které se táhnou po celé délce lyže. Jízdou z kopce potom lyžař ušetří mnoho sil a času. Výhodou sněžnic je potom jednoduchost použití a menší náchylnost k závadám.

Hory Při pohybu v horských oblastech již velmi záleží na konkrétních podmínkách a jaké cíle má daný turista/horolezec. Nejstrmější svahu, které je na lyžích možné zdolat (za použití stoupacích pásů), mají sklon stoupání někde kolem 30° (viz obr. 27). To je možné ale jen v případě ideálních sněhových podmínek. Pokud je sníh velmi hluboký a čerstvý, tak není dostatečně stabilní pro tento typ stoupání. Pokud je zase moc namrzlý, tak nebude dostatečně vysoké tření mezi pásy a sněhem a stoupání znovu nebude bezpečné nebo vůbec možné.



Obr. 27: Extrémní případ skialpinisty stoupajícího pod úhlem 34°
(<http://straightchuter.com/steep-skinning-technique/>)

Pro strmější svahy nebo v případech, kdy horolezec nemá v úmyslu cestu zpátky sjíždět na lyžích, se potom používá kombinace sněžnic a maček v závislosti na sněhových podmínkách. Pro lezení na ledových stěnách se pak vždy používají specializované mačky.

Zamrzlé vodní plochy Pro pohyb na zamrzlých vodních plochách jsou patrně nejvhodnější brusle, ale to jen v případech, kdy zamrzlá vodní plocha není zároveň zasněžená. Pokud je zasněžená, je nejvhodnější použití lyží.

Úloha V.1 ... ozářená družice

Průměrně jakou část dne stráví ve stínu Země satelit obíhající na nízké oběžné dráze? Uvažujte, že obíhá po kruhové dráze v rovině ekliptiky ve výšce $H = R/10$

nad povrchem, kde R je střední poloměr Země.

Karel myslél na satelity.

Země svým oběhem kolem Slunce za sebou neustále vytváří kužel „zatmění“. Jelikož je ale vzdálenost satelitu od Země o pět řádů menší než k naší hvězdě, aproximujeme sluneční paprsky jako paralelní. Poté spočítáme velikost stíněného úhlu v trojúhelníku, jehož vrcholy jsou střed Země, průsečík dráhy satelitu s oblastí stínu a průsečík kolmice na přímkou Slunce - střed Země, která jde z předchozího bodu, právě s touto přímkou. Platí

$$R = (R + H) \sin \Theta,$$

$$\Theta = \arcsin \frac{R}{R + \frac{R}{10}} \doteq 65,4^\circ.$$

Teď si výsledek správně interpretujeme. Jedná se o úhel, kam nedopadají paprsky, ale skutečně jím prochází satelit každý den? Ze zadání plyne, že obíhá v rovině ekliptiky, tedy na stejné ploše, kde obíhají planety včetně Země kolem Slunce, a v průběhu roku se jeho trajektorie nemění. Nízká oběžná dráha (LEO) navíc nemá ani výrazné výkyvy mezi jednotlivými dny, protože doba oběhu podle třetího Keplerova zákona

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

bude 1,6 hodiny (o něco víc než ISS), takže je mnohem kratší než délka dne. Průměrně tedy v zákrytu stráví satelit dobu úměrnou poměru mezi vypočítaným a přímým úhlem

$$\frac{2\Theta}{2\pi} = \frac{\Theta}{\pi} \doteq 36,3\%.$$

To je v jednom dni přibližně 8 hodin a 43 minut.

Úloha V.2 ... pecka z třešně

Elon Musk plánuje kolonizaci Marsu. Aby se to mohlo stát skutečností, musí tomu předcházet výstavba zásobovacích základen na povrchu Měsíce. Pomozte vyřešit zásadní otázku: jak daleko doletí pecka z třešně, kterou 180 cm vysoký člověk na základně na Měsíci plivne vodorovným směrem? Na Zemi by tato pecka dopadla do vzdálenosti 4,3 m.

Bonus Určete poměr vzdáleností, do kterých tentýž člověk doplivne pecku na Zemi a na Měsíci pod libovolným úhlem vzhledem k vodorovné rovině.

Katarína hledala záminku pro výlet na Měsíc.

Máme danou výšku H , z které flusneme a vzdálenost r_Z , do které dopadne kôstka na Zemi. Z těchto údajů zjistíme počiatočnú rýchlosť flusnutia v_0 . Pomocou tejto rýchlosti zase dostaneme vzdialenosť flusnutia na Mesiaci r_M . Napíšeme si rovnice pre súradnice kôstky x a y

$$x = v_0 t,$$

$$y = H - \frac{1}{2} g t^2.$$

V čase dopadu na Zemi t_Z bude platit

$$0 = H - \frac{1}{2}gt_Z^2,$$

$$r_Z = v_0 t_Z.$$

Pre zemský čas dopadu teda platí $t_Z = \sqrt{\frac{2H}{gz}}$. Pomocou tohto času môžeme vyjadriť $v_0 = r_Z \sqrt{\frac{gz}{2H}}$. Rovnakým spôsobom dostaneme čas dopadu na Mesiaci $t_M = \sqrt{\frac{2H}{g_M}}$. Pre výslednú vzdialenosť r_M dostávame

$$r_M = v_0 t_M = r_Z \sqrt{\frac{2Hgz}{2Hg_M}} = r_Z \sqrt{\frac{gz}{g_M}} \approx r_Z \sqrt{6},$$

Po dosadení čísel tak máme $r_M = 4,3\sqrt{6} \text{ m} \doteq 10,5 \text{ m}$.

Bonus

Pecka se bude ve vodorovném směru pohybovat konstantní rychlostí v_x , protože na ni nepůsobí žádná síla. Síla na ni působí jen ve směru svislém, ve kterém ji urychluje směrem dolů. Rychlost v tomto směru označme v_y . Počáteční úhel při vyplivnutí je α . Pak platí

$$v_x = v_0 \cos \alpha,$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g_i t,$$

kde g_i označuje tíhové zrychlení na Zemi nebo na Měsíci a t je čas od vyplivnutí.

Každou ze složek poloh x a y jsme se rozhodli vyšetřovat zvlášť a když víme, jak se chovají rychlosti, není problém najít závislosti souřadnic na čase

$$x = v_0 \cos \alpha t,$$

$$y = H + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}g_i t^2.$$

Z první rovnice vyjádříme čas a dosadíme do druhé

$$y = H + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g_i}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Získali jsme tak rovnici paraboly, po které se pecka pohybuje. Bod, kam dopadne, určíme položením $y = 0$ a řešením kvadratické rovnice pro x . Dostáváme

$$x_{1,2} = 2v_0^2 \cos \alpha \frac{\sin \alpha \pm \sqrt{\sin^2 \alpha + 2\frac{Hg_i}{v_0^2}}}{g_i}.$$

Protože jsme uvažovali, že pecka je vyplivnuta ve směru rostoucího x , je pro nás důležitý kladný kořen. Hledaný poměr tak je

$$p = \frac{g_M}{g_Z} \frac{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \frac{H g_Z}{v_0^2}}}{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \frac{H g_M}{v_0^2}}}.$$

Zbývá už jen dosadit $v_0 = r_Z \sqrt{\frac{g_Z}{2H}}$. Potom

$$p = \frac{g_M}{g_Z} \frac{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \left(\frac{2H}{r_Z}\right)^2}}{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{g_M}{g_Z} \left(\frac{2H}{r_Z}\right)^2}}.$$

Při volbě $\alpha = 0$ dostaneme stejný výsledek jako v první části.

Úloha V.3 ... pod pokličkou

Poklička tvaru dutého válce s kruhovým průřezem o poloměru 6,00 cm leží ve vodorovném umyvadle. Pod ní se nachází vzduch o atmosférickém tlaku 1 013 hPa. Při umývání nádobí začneme do umyvadla napouštět vodu o pokojové teplotě. Ta se dostává i pod pokličku a tlačuje tak pod ní uzavřený vzduch. V jistém okamžiku začne poklička plavat. Jak vysoko bude v té chvíli hladina vody? Poklička váží 200 g, má výšku 2,00 cm a její objem můžete zanedbat.

Danka myla nádobí.

Označme výšku vody pod poklicí h a mimo poklici H . Objem vzduchu pod poklicí bude

$$V = (a - h) S,$$

kde a je výška poklice a $S = \pi r^2$ je povrch podstavy poklice. Jelikož je teplota při celém ději konstantní (stejně jako počet částic uzavřeného vzduchu), bude platit stavová rovnice v podobě

$$pV = p_a V_0,$$

kde p je tlak vzduchu pod poklicí a $V_0 = aS$ je jeho počáteční objem. Aby byla splněna rovnováha sil, tento tlak musí být roven hydrostatickému tlaku vody na rozhraní se vzduchem v poklici p_h . Ten spočítáme jednoduše jako

$$p_h = p_a + (H - h) \rho g,$$

kde ρ je hustota vody. Dáme-li všechny rovnice (spolu s podmínkou rovnosti tlaků $p = p_h$) dohromady, dostaneme

$$(p_a + (H - h) \rho g) (a - h) S = p_a V_0,$$

což je kvadratická rovnice ve tvaru

$$h^2 - \left(\frac{p_a}{\rho g} + a + H \right) h + aH = 0.$$

Řešením jsou kořeny

$$h = \frac{\left(\frac{p_a}{\rho g} + a + H\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p_a}{\rho g} + a + H\right)^2 - 4aH}}{2},$$

kde správně je ten se znaménkem mínus, protože na počátku jsou obě výšky nulové (neboli $h(H = 0) = 0$).

Dále budeme předpokládat, že výška vody ještě nedosáhla poklice, neboli že platí $H < a$. Následně odvodíme podmínku zvednutí poklice a ověříme, zda k tomu dojde před tím, než voda stoupne až nad poklici.⁴⁵

Za tohoto předpokladu působí na poklici ve vertikálním směru jen tři síly (zanedbáme-li objem stěn), a sice tíhová $F_g = mg$, tlaková od uzavřeného vzduchu $F_p = pS$ a tlaková od atmosféry $F_a = p_a S$. Celková síla ve směru dolů bude

$$F = F_g + F_a - F_p = mg + (p_a - p)S = mg - (H - h)\rho gS,$$

přičemž poklice se zvedne v okamžiku, kdy začne platit $F = 0$, neboli $m = (H - h)\rho S$. Dosadíme z rovnice pro h a dostaneme poměrně komplikovaný výraz, ze kterého po několika úpravách vyjádříme

$$H = \frac{m}{\rho S} \left(1 + \frac{a}{\frac{m}{\rho S} + \frac{p_a}{\rho g}}\right) \approx \frac{m}{\rho S} \left(1 + \frac{a\rho g}{p_a}\right) \doteq 1,78 \text{ cm}.$$

Použili jsme hustotu vody $\rho = 997 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Poklice se zvedne ve chvíli, kdy hladina vody stoupne do výšky $H \doteq 1,78 \text{ cm}$. Jak vidíme, dojde k tomu před tím, než bude celá pod vodou, takže je vše v pořádku.

Zamyslíme-li se ještě nad výsledkem, zjistíme, že kvůli velmi vysoké hodnotě atmosférického tlaku vychází $a\rho g/p_a \ll 1$, takže přibližně platí

$$H \approx \frac{m}{\rho S}.$$

To by odpovídalo situaci, kdybychom vůbec neuvažovali stlačování vzduchu pod poklicí. Nicméně, výsledek by se po zaokrouhlení lišil na třetí platné cifře, takže tato aproximace není odpovídající.

Úloha V.4 ... odpal

Pták Fykosák odpaloval baseballový míč o hmotnosti m pálkou ve tvaru homogenní tyče s délkovou hustotou λ . Předpokládejme, že tyč je upevněna na jednom svém konci, přičemž se okolo tohoto bodu může otáčet. Fykosák na ni může působit buď konstantním momentem síly M , nebo ji může roztáčet s konstantním výkonem P . Po otočení o úhel $\varphi_0 = 180^\circ$ narazí konec tyče do dosud nehybného míče a dojde

⁴⁵Můžeme si všimnout, že pokud se poklice nezvedne v okamžiku, kdy $H = a$, nezvedne se už nikdy. Vztlaková síla bude stále klesat, zatímco tlak vody shora jenom poroste.

k pružné srážce. Při jaké délce tyče l získá míč největší rychlost? Porovnejte obě situace (tj. konstantní M proti konstantnímu P). Jáchym odpaloval věci.

Nejdříve spočítáme úhlovou rychlost tyče před srážkou (označíme ji ω_0), poté vyřešíme srážku. Dosazením za ω_0 následně dostaneme funkci $v(l)$ a najdeme její extrém.

Hmotnost páčky bude $m_p = \lambda l$. Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející koncem tyče potom určíme jako

$$J = \frac{1}{3} m_p l^2 = \frac{1}{3} \lambda l^3.$$

Zabývejme se nyní situací s konstantním výkonem. Kinetická energie tyče v čase t bude $E_k = Pt$. Tento vztah dosadíme do rovnice pro rotační kinetickou energii, odkud si vyjádříme závislost úhlové rychlosti na čase, tj. zapíšeme

$$Pt = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2Pt}{J}}. \quad (15)$$

Nás ovšem zajímá závislost ω na úhlu otočení φ . Celý výraz proto zintegrujeme s výsledkem

$$\varphi = \int \omega dt = \int \sqrt{\frac{2Pt}{J}} dt = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2Pt^3}{J}}.$$

Za běžných okolností bychom ještě potřebovali dopočítat integrační konstantu, ale v tomto případě je zřejmě $\varphi(t=0) = 0$, díky čemuž je tato konstanta nulová. Vyjádříme si čas t v závislosti na úhlu jako

$$t = \left(\frac{9J\varphi^2}{8P} \right)^{\frac{1}{3}},$$

což následně dosadíme do rovnice (15). V dalším kroku tak pro $\varphi_0 = 180^\circ$ získáme úhlovou rychlost ω_0 při odpalu

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\frac{3P\varphi}{J} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{l} \left(\frac{9P\varphi}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ \omega_0 &= l^{-1} \left(\frac{9\pi P}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (16)$$

V případě konstantního momentu síly bude situace trochu jednodušší, protože platí obdoba rovnice síly $M = J\varepsilon$. Otáčení páčky se tak řídí stejnými vztahy jako rovnoměrně zrychlený pohyb a lze psát

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = \frac{M}{2J} t^2, \\ \omega &= \varepsilon t = \frac{M}{J} \sqrt{\frac{2J\varphi}{M}} = \sqrt{\frac{2M\varphi}{J}} = l^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{6M\varphi}{\lambda}}, \\ \omega_0 &= l^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{6\pi M}{\lambda}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Už nyní můžeme vidět, jak se obě situace liší – konstantní výkon vede na vyšší rychlosti pro delší a těžší páčky než konstantní moment síly. Pokračujeme dále vyřešením srážky s míčem. Při ní se zachová jak energie, tak moment hybnosti soustavy. To zapíšeme jako

$$\begin{aligned} J\omega_0 &= J\omega_1 + lmv, \\ J\omega_0^2 &= J\omega_1^2 + mv^2, \end{aligned}$$

kde v je výsledná rychlost míče a ω_1 značí výslednou úhlovou rychlost páčky. Druhá jmenovaná veličina nás vzhledem k zadání příliš nezajímá, proto se jí nemusíme zabírat a rovnou ji z první rovnice dosadíme do druhé, čímž získáme

$$J\omega_0^2 = J\left(\omega_0 - \frac{lm}{J}v\right)^2 + mv^2.$$

Členy $J\omega_0^2$ se nám na obou stranách odečtou, díky čemuž bude v každém zbývajícím členu v alespoň v první mocnině. Kořen $v = 0$ nedává fyzikální smysl, rovnici tedy směle vydělíme v a máme

$$v = \frac{2Jl\omega_0}{l^2m + J} = \frac{2\lambda l^2}{3m + \lambda l}\omega_0.$$

Nyní nezbyvá než dosadit za ω_0 z rovnic (16) a (17), výsledné závislosti zderivovat podle l a tyto položit rovné nule. Začneme s $P = \text{konst}$, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} v &= 2(9\pi P\lambda^2)^{\frac{1}{3}} \frac{l}{3m + \lambda l}, \\ \frac{dv}{dl} &= 2(9\pi P\lambda^2)^{\frac{1}{3}} \frac{3m}{(3m + \lambda l)^2}. \end{aligned}$$

Tato závislost nemá žádný extrém, což můžeme dobře vidět, když si ji vykreslíme do grafu. Pro kladná l je $v(l)$ stále rostoucí funkcí. Vysvětlení je takové, že roztočit delší páčku trvá déle, takže jí postupně předáme více energie. Nakonec se sice nebude pohybovat tak rychle, ale zato bude mít velmi velkou hybnost.

V případě $M = \text{konst}$ platí

$$\begin{aligned} v &= 2\sqrt{6\pi M\lambda} \frac{l^{\frac{1}{2}}}{3m + \lambda l}, \\ \frac{dv}{dl} &= \sqrt{6\pi M\lambda} \frac{(3m - \lambda l)l^{-\frac{1}{2}}}{(3m + \lambda l)^2}. \end{aligned}$$

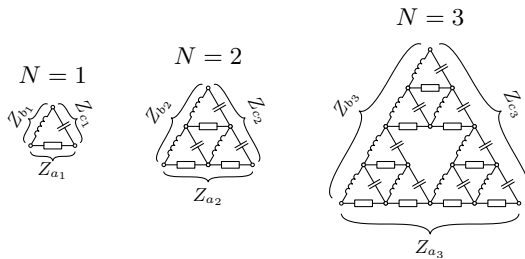
V tomto případě už extrém existuje, konkrétně pro bod $l = 3m/\lambda$. Letmým pohledem do grafu snadno odhalíme, že jde o maximum.

Reálný lidský výkon je bližší druhé možnosti, tzn. člověk dokáže na páčku působit spíše konstantním momentem než s konstantním výkonem. Z tohoto hlediska je pro co nejdelší odpal ideální volit páčky splňující $l = 3m/\lambda$. Délkovou hustotu typicky neznáme, můžeme ji však určit jako $\lambda = M/l$, kde M je hmotnost páčky. Potom dostáváme ideální poměr $M = 3m$.

Poměr hmotností běžné baseballové pálky a míčku je přibližně 5 až 6, což je dvakrát tolik, než kolik jsme spočítali. Nesmíme nicméně zapomínat na to, že náš model je velmi zjednodušující a neodpovídá přesně skutečným fyziologickým možnostem člověka. Delší pálka má navíc jiné, pro tuto úlohu nerelevantní výhody, například větší dosah a stabilitu. Dále bychom samozřejmě mohli započítat i typicky nenulovou počáteční rychlost míče.

Úloha V.5 . . . střídavý trojúhelník

Postavíme si konečný Sierpiňského trojúhelník stupně N (tedy pro $N = 1$ to bude jen trojúhelník, pro $N = 2$ to budou už čtyři trojúhelníky atd.). Na spodních stranách budou vždy rezistory o odporu $R = 150 \Omega$, na levých stranách cívky o indukčnosti $L = 0,4 \text{ H}$ a na zbylých stranách kondenzátory s kapacitou $C = 20 \mu\text{F}$. Mezi levým a pravým dolním rohem trojúhelníku měříme impedanci. Úhlová frekvence zdroje je $\omega = 50 \text{ s}^{-1}$. Najděte rekurentní vztahy, které tuto impedanci vyčíslí, a určete její hodnotu pro $N = 7$. Nalezněte rekurentní vztah pro situaci, kdy bychom cívky a kondenzátory nahradili odpory R a vyčíslete ji pro $N = 15$.



Obr. 28: Schéma obvodu.

Honza má rád fraktály.

Tuto úlohu bychom mohli řešit standardním středoškolským způsobem, ale množství aritmetiky, které bychom museli provést, by bylo zbytečně veliké. Místo toho použijeme pokročilejší, ale velmi užitečnou metodu, která nám problém výrazně zjednoduší.

Metoda komplexní impedance

Jak název napovídá, budeme používat komplexní čísla. Nejprve se zaměříme na reprezentaci střídavého napětí. Jeho průběh můžeme popsat následujícím vztahem.

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \delta) .$$

Užitím Eulerova vzorce pro komplexní exponenciálu $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ můžeme tento vzorec přepsat na

$$u(t) = \text{Re } \bar{u}(t) = \text{Re } \bar{U}_0 e^{i\omega t} ,$$

kde $\operatorname{Re} z$ je reálná část komplexního čísla, $\bar{u}(t)$ je komplexní napětí a \bar{U}_0 je komplexní amplituda napětí.

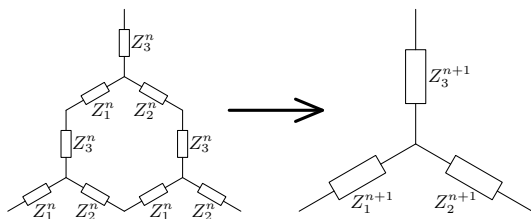
Pokud mezi sebou násobíme dvě komplexní čísla z_1 a z_2 , absolutní hodnota výsledku bude součinem absolutních hodnot z_1 a z_2 . Argument výsledku⁴⁶ bude součtem argumentů z_1 a z_2 . Maximální hodnota napětí tedy bude $U_{\max} = |\bar{U}_0|$ a počáteční fázový posun bude $\delta = \arg(\bar{U}_0)$.

Pokud připustíme i komplexní impedanci, dostaneme podobné chování – absolutní hodnota komplexní impedance nám dá poměr maximální hodnoty napětí a maximální hodnoty proudu a argument nám dá fázový posuv proudu vůči napětí. Zbývá pouze najít způsob, jak komplexní impedanci spočítat.

To provedeme tak, že cívky a kondenzátory nahradíme odpory s imaginární impedancí. Cívky budou mít impedanci $Z_L = i\omega L$ a kondenzátory $Z_C = -\frac{i}{\omega C}$. Hodnotu odporu měnit nebudeme – bude mít reálnou impedanci $Z_R = R$.

Řešení obvodu

Klíčovou úvahou je fakt, že libovolnou iteraci obvodu můžeme zjednodušit na konfiguraci hvězda. Předpokládejme, že se nacházíme v n -té iteraci a že známe impedance Z_1^n, Z_2^n, Z_3^n , kde horní index neznačí mocninu, ale číslo iterace. Vezmeme tři kopie tohoto obvodu a postavíme z nich iteraci $n + 1$, kterou převedeme do tvaru hvězdy s rezistory o impedancích $Z_1^{n+1}, Z_2^{n+1}, Z_3^{n+1}$, viz obrázek 29.



Obr. 29: Zjednodušení n -té iterace obvodu.

Dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} Z_1^{n+1} + Z_3^{n+1} &= Z_1^n + Z_3^n + \frac{1}{\frac{1}{Z_1^n + Z_3^n} + \frac{1}{Z_1^n + 2Z_2^n + Z_3^n}}, \\ Z_2^{n+1} + Z_3^{n+1} &= Z_2^n + Z_3^n + \frac{1}{\frac{1}{Z_2^n + Z_3^n} + \frac{1}{Z_2^n + 2Z_1^n + Z_3^n}}, \\ Z_1^{n+1} + Z_2^{n+1} &= Z_1^n + Z_2^n + \frac{1}{\frac{1}{Z_1^n + Z_2^n} + \frac{1}{Z_1^n + 2Z_3^n + Z_2^n}}. \end{aligned}$$

⁴⁶Argumentem komplexního čísla nazýváme orientovaný úhel α mezi reálnou osou a vektorem komplexního čísla. Argument spočítáme jako $\alpha = \arctg\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right)$.

Pravou stranu soustavy můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} Z_1^{n+1} + Z_3^{n+1} &= Z_1^n + Z_3^n + \frac{(Z_1^n)^2 + 2(Z_1^n Z_3^n + Z_1^n Z_2^n + Z_2^n Z_3^n) + (Z_3^n)^2}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}, \\ Z_2^{n+1} + Z_3^{n+1} &= Z_2^n + Z_3^n + \frac{(Z_2^n)^2 + 2(Z_1^n Z_3^n + Z_1^n Z_2^n + Z_2^n Z_3^n) + (Z_3^n)^2}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}, \\ Z_1^{n+1} + Z_2^{n+1} &= Z_1^n + Z_2^n + \frac{(Z_1^n)^2 + 2(Z_1^n Z_3^n + Z_1^n Z_2^n + Z_2^n Z_3^n) + (Z_2^n)^2}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}. \end{aligned}$$

Po vyřešení soustavy a několika úpravách dostaneme rekurzivní vztah

$$\begin{aligned} Z_1^{n+1} &= \frac{3Z_1^n}{2} + \frac{Z_2^n Z_3^n}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}, \\ Z_2^{n+1} &= \frac{3Z_2^n}{2} + \frac{Z_1^n Z_3^n}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}, \\ Z_3^{n+1} &= \frac{3Z_3^n}{2} + \frac{Z_2^n Z_3^n}{2(Z_1^n + Z_2^n + Z_3^n)}. \end{aligned}$$

V dalším kroku dopočítáme počáteční podmínky pro náš rekurzivní vztah. V první iteraci máme konfiguraci trojúhelník. Použijeme tedy transfigurační vzorec, abychom dostali hodnoty impedancí rezistorů v konfiguraci hvězda. Tyto vzorce se pro komplexní impedanci nebudou nijak lišit, protože „předstíráme“, že cívky a kondenzátory jsou pouze rezistory, jenom za jejich odpory na konci výpočtu dosadíme příslušné imaginární hodnoty. Dostaneme

$$\begin{aligned} Z_1^1 &= \frac{i\omega RL}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \doteq (-2,991\ 15 + 0,457\ 83i)\ \Omega, \\ Z_2^1 &= \frac{-i\frac{R}{\omega C}}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \doteq (149,557 - 22,891i)\ \Omega, \\ Z_3^1 &= \frac{\frac{L}{C}}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \doteq (3,052\ 2 + 19,941\ 0i)\ \Omega. \end{aligned}$$

Nyní už máme vše potřebné pro vyčíslení libovolné iterace obvodu. Pokud bychom však měli ručně spočítat impedanci sedmé iterace, byl by to dlouhý a nepříjemný výpočet. Doporučujeme si na to napsat skript, např. v Pythonu, který podporuje aritmetiku komplexních čísel. Po chvilce počítání dostaneme výsledek

$$\begin{aligned} Z_1^7 &\doteq (230 + 510i)\ \Omega, \\ Z_2^7 &\doteq (1\ 640 - 210i)\ \Omega, \\ Z_3^7 &\doteq (220 + 540i)\ \Omega. \end{aligned}$$

Celkovou impedanci obvodu získáme součtem

$$Z = Z_1^7 + Z_2^7 \doteq (1\ 870 + 300i)\ \Omega.$$

Komplexní impedanci můžeme podle diskuse výše interpretovat následovně. Zapišme ji v goniometrickém tvaru

$$Z = |Z| e^{i \arg(Z)} \doteq 1890 e^{0,159i} \Omega.$$

Okamžitou hodnotu proudu můžeme popsat podobně jako okamžitou hodnotu napětí (tj. komplexně). Platí pro ni

$$\begin{aligned} i(t) &= \operatorname{Re} \bar{i}(t) = \operatorname{Re} \bar{I} e^{i\omega t}, \\ \bar{I} &= \frac{\bar{U}}{Z} \doteq \frac{\bar{U} e^{0,159i}}{1890 \Omega}. \end{aligned}$$

Podle pravidel pro násobení komplexních čísel můžeme vidět, že poměr amplitud napětí a proudu bude roven

$$\frac{U_{\max}}{I_{\max}} = |Z| \doteq 1890 \Omega,$$

a fázový posun φ bude

$$\varphi \doteq 0,159.$$

Napětí tedy předbíhá proud a celý obvod se chová jako cívka s rezistorem.

Obvod pouze s odpory

Pokud všechny součástky nahradíme rezistory o odporu R , situace se velmi zjednoduší. Ze tří rekurentních vztahů dostaneme jeden, konkrétně

$$R^{n+1} = \frac{5}{3} R^n.$$

Přes vzorec pro transfiguraci opět dopočítáme R^1 jako

$$R^1 = \frac{1}{3} R.$$

V tomto případě můžeme rekurzivní vzorec převést na explicitní vyjádření odporu n -té iterace

$$R^n = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} R = \frac{1}{5} \left(\frac{5}{3}\right)^n R,$$

což po dosažení vyjde jako

$$R^{15} \doteq 425 R.$$

Toto je odpor jedné části, pro celkový odpor mezi dvěma sousedními vrcholy (všimněme si, že nyní je již celý trojúhelník symetrický) máme podobně jako v případě komplexních impedancí

$$R_c^{15} = R^{15} + R^{15} \doteq 851 R \doteq 128 \text{ k}\Omega.$$

Úloha V.P ... teplý asteroid

Vymyslete co nejvíce fyzikálních důvodů, proč by asteroid mohl mít vyšší teplotu než okolí.

Karel přemýšlel o Fermiho paradoxu.

Nejprve se musíme zamyslet nad tím, co budeme považovat za teplotu okolí asteroidu. Představme si absolutně černou, dokonale vodivou kouli, nacházející se v konstantní vzdálenosti r od Slunce. Energie záření, kterou tato koule přijme od Slunce za jednotku času, je rovna

$$P_1 = \frac{L}{4\pi r^2} S = \frac{L}{4\pi r^2} \pi R^2,$$

kde $L = 3,86 \cdot 10^{26}$ W je zářivý výkon Slunce, S je plocha, na kterou dopadá světlo, a R poloměr koule. Předpokládejme, že koule má teplotu T_0 . Podle Stefan-Boltzmannova zákona bude koule vyzařovat energii s výkonem

$$P_0 = \sigma S T_0^4,$$

kde σ je známá konstanta. Za dostatečně dlouhý čas se teplota koule ustálí na rovnovážné hodnotě, která odpovídá situaci, kdy bude stejná hodnota výkonu přijatého v dané vzdálenosti od Slunce a výkonu vyzařovaného. Tato teplota je dána vztahem

$$T = \left(\frac{P_1}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{L}{16\pi \sigma r^2} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Právě tuto teplotu dále považujeme za teplotu okolí. Kvůli čemu by mohl asteroid mít nějakou jinou? V první řadě jsme při předchozím výpočtu předpokládali, že koule pohltí všechno přicházející záření. U asteroidu tomu tak nebude - teplota bude záležet na odrazivosti povrchu, tzv. albedu A . Výkon přijatý asteroidem tak bude

$$P_2 = P_1 (1 - A),$$

a teplota (spočítaná analogicky jako v předchozím případě)

$$T = \left(\frac{P_1 (1 - A)}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{L (1 - A)}{16\pi \sigma r^2} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Pro představu o velikosti vlivu tohoto efektu můžeme vypočítat teplotu asteroidu ve vzdálenosti $r = 1$ au. Typický rozměr asteroidu je cca $R = 0,5$ km a albedo $A = 0,1$. Po dosazení vychází $T = 271$ K, pro dokonale vodivou, absolutně černou kouli o stejných parametrech by to bylo 278 K. Pro skutečný asteroid je navíc situace ještě složitější. Jednak nemá albedo úplně stejné na všech místech povrchu, a také se nejedná o dokonale kulaté těleso. Velkou roli hrají nerovnosti, které způsobují teplotní rozdíly (ve stínu je teplota menší než na sluníčku).

V předchozích úvahách jsme počítali s nekonečně vodivým asteroidem. V případě asteroidu s konečnou vodivostí bychom museli řešit rovnici vedení tepla. Pokud

se omezíme pouze na její jednorozměrný případ, kdy zkoumáme pouze změny teploty podél jedné přímky v asteroidu, má tvar

$$\chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t},$$

kde t je čas, x vzdálenost a χ označuje tepelnou difuzivitu materiálu. Rovnice v podstatě říká, že tepelná energie v objemu V se musí zvýšit o tolik energie, kolik přes povrch přiteče. Pro řešení potřebujeme ještě hraniční podmínku na povrchu

$$-K \frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon \sigma T^4 = (1 - A) \varepsilon(t),$$

kde ε je časově závislý tok záření vzhledem k místní normále (dále předpokládáme jeho harmonický průběh) a ε označuje infračervenou emisivitu. Cílem při řešení rovnice je najít teplotu jako funkci času a hloubky. My zde rovnicí nebudeme řešit a uvedeme jen výsledek, podrobné řešení viz.⁴⁷ Zajímá nás hlavně závislost povrchové teploty na čase, pro niž dostaneme

$$T(0, t) = T_{\text{eq}} + \frac{(1 - A) \varepsilon_1}{4 \varepsilon \sigma T_{\text{eq}}^3} \frac{1}{1 + 2\Theta + 2\Theta^2} e^{2\pi f t + \varphi_{\text{th}}},$$

kde f je frekvence otáčení asteroidu

$$\Theta = \frac{\sqrt{\pi f K C \rho}}{4 \pi \varepsilon \sigma T_{\text{eq}}^3}$$

je tepelný parametr a φ_{th} , pro které platí

$$\text{tg } \varphi_{\text{th}} = - \frac{\Theta}{1 + \Theta},$$

značí tepelné zpoždění. Tvar řešení odpovídá periodickým změnám, kdy vyšších teplot dosahuje přivrácená strana, odvrácená naopak nižších. Vůbec nejvyšší teploty dosáhne bod na asteroidu chvíli po jeho poledni. Rozdíl mezi teplotami obou stran bude tím menší, čím rychleji bude asteroid rotovat. Pro extrémní případ vázané rotace by byl tedy nejvyšší. Roli bude hrát také excentricita dráhy asteroidu, způsobující změny toku záření vzhledem k normále. V perihelu bude teplota samozřejmě nejvyšší. Vzhledem k tomu, že se vzdálenost tělesa od Slunce mění nejvíce právě v perihelu, lze kolem něj očekávat také největší změny teploty s časem.

Výše zmíněné efekty budou pravděpodobně zdaleka nejvýznamnější. Zamysleme se ale i nad dalšími:

- skleníkový efekt: V případě větších těles typu planet často hraje důležitou roli. Vzhledem k nízkým hmotnostem není však u asteroidů možné, aby si udržely atmosféru, proto tento jev můžeme vyloučit.

⁴⁷<https://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/ashk/povetron-2008-06.pdf>

- částice slunečního větru: V současné době bude tento efekt opravdu zanedbatelný, v raných fázích vývoje sluneční soustavy byl však sluneční vítr mnohem silnější a teoreticky mohlo docházet k ohřevu při dopadu jeho částic a dále k indukčnímu ohřevu při průchodu nabitých částic elektricky vodivým materiálem planetek.⁴⁸
- impakty: Teplu by mohlo vznikat také při vzájemných srážkách, pokud by se na něj přeměnila část kinetické energie těles. Srážky by však musely probíhat při relativně malých rychlostech, aby se asteroid nerozpadl.
- radioaktivní rozpad: Jako zdroj tepla by mohl posloužit nějaký rozpadající se radioaktivní prvek, obsažený v materiálu asteroidu.⁴⁹ Pro přibližný odhad teplotního rozdílu tímto způsobeným uvažujeme asteroid o poloměru $R = 1$ km, který je celý složený z radioaktivního U^{238} . Jeho aktivita je $A = 12,4 \text{ Bq} \cdot \text{mg}^{-1}$. Objemový výkon P_V spočteme jako

$$P_V = A\rho E,$$

kde $\rho = 19000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je hustota a $E = 4,27 \text{ MeV}$ energie uvolněná při jednom rozpadu. Celkový výkon tedy je

$$P = \frac{4}{3}\pi R^3 A\rho E.$$

Výslednou teplotu získáme jako

$$T = \left(\frac{P + P_1}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Číselně vychází 288 K, což je o 10 K víc než vyšlo pro neradioaktivní asteroid. Skutečné asteroidy navíc nejsou celé z uranu, proto tento efekt bude ve skutečnosti ještě mnohem menší.

- slapový ohřev

Konečně, velmi horký vzhledem ke vzdálenějšímu okolí se asteroid samozřejmě stane po vstupu do (například zemské) atmosféry, kde se vlivem tření zahřeje až na teplotu několika tisíc stupňů.

Úloha VI.1 ... Superman v akci

Lex Luthor zajal Lois Lane a vyhodil ji z letadla ve výšce h . Superman se za ní rozletí a v nějaké výšce ji chytí. Předpokládejme, že Lois dokáže přežít zrychlení maximálně 10 g. V jaké nejnižší výšce ji může Superman chytit, aby ji stihl zachránit?

Martin vzpomínal na mládí.

⁴⁸<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0019103589901875>

⁴⁹<https://aasnova.org/2022/02/23/meteorites-reveal-radioactive-heating-in-asteroids>

V prvním úseku padá Lois volným pádem, který lze popsat pomocí pohybových rovnic

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2, \\ v_y = -gt.$$

Pokud byla chycena Supermanem ve výšce H , padala po dobu T a umíme určit její aktuální rychlost v

$$H = h - \frac{1}{2}gT^2, \\ v = -gT = -g\sqrt{2g(h - H)}.$$

Nyní ji musí Superman zastavit na zbylém úseku délky H , aniž by překročil zrychlení $a = 10g$. Dostáváme sadu nových pohybových rovnic

$$y' = H - vt + \frac{1}{2}aT'^2, \\ v'_y = -v + at.$$

K získání závislosti výšky použijeme sadu podmínek – v čase T' musí být rychlost Lois nulová a přesně v tomto čase se musí nacházet v nulové výšce $y'(T') = 0$, takže

$$0 = H - vT' + \frac{1}{2}aT'^2, \\ 0 = -v + aT'.$$

Vyřešením rovnic najdeme potřebnou výšku

$$H = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} = \frac{1}{2} \frac{2g(h - H)}{a} = \frac{g}{a + g} h = \frac{1}{11} h.$$

Z výsledku je zřejmé, že pro libovolnou výšku h dokáže Superman Lois zachránit, pokud ji zachytí ve výšce alespoň $\frac{h}{11}$.

Úloha VI.2 ... generační hrozba

Představte si, že by existovala kometa, která by ohrožovala Zemi jednou za generaci, přičemž by v tomto okamžiku byla ve svém perihelu. V jaké vzdálenosti od Země bude taková kometa v afelu a jaká bude délka hlavní poloosy a relativní excentricita její dráhy? Neuvažujte jiné gravitační vlivy než od Slunce a předpokládejte, že jedna generace má $g = 20$ let.

Karel zase ohrozil civilizaci. A opakovaně.

Řešení úlohy postavme na 3. Keplerově zákoně. Víme, že Země oběhne Slunce jednou za $T = 1$ rok a že obíhá Slunce s velkou poloosou $a_Z = 1$ au. Třetí Keplerův zákon pak upravíme tak, abychom vypočítali hlavní poloosu komety a

$$\frac{a^3}{a_Z^3} = \frac{g^2}{T^2} \Rightarrow a = \left(\frac{g}{T}\right)^{\frac{2}{3}} a_Z \doteq 7,4 \text{ au}.$$

Nyní již víme, že hlavní poloosa bude mít délku zhruba 7,4 au. Vzhledem k tomu, že jsme znali zadání na jednu platnou cifru, tak odpověď nemůžeme udávat více než na dvě.

Jaká bude vzdálenost od Slunce v afelu a_a ? Víme, že platí $a_p + a_a = 2a$, přičemž máme zadáno, že vzdálenost v perihelu je stejná jako hlavní poloosa oběhu Země $a_p = a_z$ (zanedbáváme excentricitu oběhu Země). Dostáváme tedy

$$a_a = 2a - a_p = \left(\frac{g}{T}\right)^{\frac{2}{3}} a_z - a_p = \left(\left(\frac{g}{T}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) a_z \doteq 14 \text{ au}.$$

Po zaokrouhlení jde o přibližnou vzdálenost 14 au od Slunce v afelu. Jaká bude vzdálenost od Země? To hodně záleží na přesnosti opakování hrozby. Obecně můžeme říct, že půjde minimálně o vzdálenost o 1 au menší a maximálně o 1 au větší. Pokud by se ale v perihelu dostala kometa do blízkosti Země (tedy po zaokrouhlení 0 au), pak by mělo jít o maximální vzdálenost odpovídající dvěma hlavním poloosám $2a \doteq 15$ au, protože po 10 letech by měla být Země na stejném místě. Co se ale týče reálnosti tohoto výsledku, potom bychom zjistili, že při takovém přiblížení Zemi (a Měsíci) s nejvyšší pravděpodobností dojde ke změně orbitálních parametrů komety a její dráha bude jiná. Nalezení řešení by se výrazně zkomplikovalo.

Poslední částí je výpočet excentricity ε , kterou můžeme získat ze vztahů $a_a = a(1 + \varepsilon)$ či $a_p = a(1 - \varepsilon)$. Vyjdeme-li například z druhého zmíněného, dostaneme

$$\varepsilon = 1 - \frac{a_p}{a} = 1 - \frac{a_p}{\left(\frac{g}{T}\right)^{\frac{2}{3}} a_z} = 1 - \left(\frac{T}{g}\right)^{\frac{2}{3}} \doteq 0,86.$$

Excentricita komety, která se vrátí jednou za generaci, bude zhruba 0,86.

Úloha VI.3 ... povětrná bublinka

Bublifikem vytvoříme malou mýdlovou bublinku. Jakou rychlostí bude padat k zemi? Bublinka má vnější poloměr R a plošnou hustotu s .

Karel dělal bublinky ve vaně.

Na vzduchovou bublinku působia primárne tri sily, a to tiažová F_g , vztlaková F_v a odporová sila vzduchu F_o . Keďže bublinka je veľmi ľahká, tak zmenu hmotnosti vzduchu vo vnútri bubliny nemôžeme zanedbať. Budeme predpokladať, že vzduch vo vnútri bublinky je rovnaký ako mimo nej. Čo však rovnaké nie je, je tlak p v jej vnútri. Tlak vo vnútri bubliny je väčší o tzv. kapilárny tlak p_k určený vzťahom

$$p_k = \frac{4\sigma}{R},$$

a teda máme vzťah pre tlak

$$p = p_a + p_k,$$

kde p_a je atmosférický tlak v okolí bublinky.

Pre plyny platí stavová rovnica v tvare

$$pV = nR_u T,$$

kde V je objem plynu, n je počet mólov, R_u je univerzálna plynová konštanta a T je teplota vzduchu v Kelvinoch. Hustotu plynov vieme určiť ako

$$\rho = \frac{pM_v}{R_u T},$$

kde M_v je konštanta molárnej hmotnosti plynu. Ak si predstavíme guľovú oblasť vzduchu s objemom $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, na ktorej povrch umiestnime tenkú blanu bez zmeny objemu tak, aby platila stavová rovnica, potom v oboch prípadoch sa počet mólov musí zmeniť, pričom n_b je nový počet mólov vo vnútri bubliny a teda aj nová hustota vo vnútri bubliny ρ_b . Táto zmena sa udiala v rámci vytvorenia bubliny. Musí tak platiť tento vzťah

$$\frac{p}{n_b} = \frac{p_a}{n},$$

a zo vzťahov vyššie dostaneme hustotu vzduchu v bubline

$$\rho_b = \rho_a \frac{p_a + p_k}{p_a} = \rho_a \left(1 + \frac{4\sigma M_v}{R\rho_a R_u T} \right).$$

Hmotnosť vzduchu v bubline je tak

$$m_v = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_b = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a \left(1 + \frac{4\sigma M_v}{R\rho_a R_u T} \right).$$

Hmotnosť blany bubliny je jednoducho $m_b = 4\pi R^2 s$. Celková hmotnosť bubliny je teda $m_c = m_b + m_v$. V rovnováhe platí pre pôsobenie síl

$$F_o = F_g - F_v.$$

Pre odporovú silu budeme uvažovať Newtonov vzťah pre odpor $F_o = \frac{1}{2}CS\rho_a v^2$, kde C je koeficient aerodynamického odporu pre guľu, S je účinný prierez (v našom prípade $S = \pi R^2$) a v je rýchlosť bubliny.

Kombináciou a dosadením do vzťahov vyššie máme

$$\frac{1}{2}C\pi R^2 \rho_a v^2 = 4\pi R^2 \left(s + \frac{R}{3} \left(\frac{4\sigma M_v}{RT R_u} \right) \right) g,$$

odkiaľ pre rýchlosť dostávame

$$v = \sqrt{\frac{8g}{C\rho_a} \left(s + \frac{4\sigma M_v}{3R_u T} \right)} = \sqrt{\frac{8g}{C} \left(\frac{s}{\rho_a} + \frac{4\sigma}{3\rho_a} \right)}.$$

Úloha VI.4 . . . rychlý poločas

Jaká je pravděpodobnost, že se z jednoho molu radioaktivní látky během jednoho poločasu rozpadu rozpadnou tři čtvrtiny původního počtu atomů? Obvykle by se to mělo stát až za dva poločasy rozpadu. Kvůli čemu bychom mohli takovou situaci pozorovat?
Karel pořád slýchá o Černobyli.

Najdůležitějšíou částou úlohy je uvědomit si následovně – makroskopický popis horvori o rozpade polovice částic za polčas rozpadu, čo mikroskopicky znamená, že každá částica má pravdepodobnosť 50% rozpadnutia sa za polčas rozpadu. Z týchto dvoch popisov je fundamentálny popis mikroskopický, pričom makroskopický popis je len jeho dôsledkom na veľkom počte částic. Ak sa navzájom částice rozpadom neovplyvňujú, rozpady jednotlivých částic sú nezávislé udalosti. Toto neplatí napríklad v prípade štiepenia uránu v jadrových reaktoroch, kde rozpad jedného jadra uránu vytvorí neutróny, ktoré štiepia ďalšie jadrá v tzv. reťazovej reakcii.

Našou úlohou je teda vyriešiť nasledujúci kombinatorický problém: *Majme N částic. Aká je pravdepodobnosť, že sa za daný čas rozpadne $\frac{3}{4}N = wN$ částic, ak pravdepodobnosť rozpadu každej z týchto částic je $p = 0,5$?*

Potrebujeme, aby sa rozpadlo wN částic a nerozpadlo $N(1-w)$ částic. To sa dá modelovať binomickým rozdelením. Pravdepodobnosť tohto javu je teda

$$P = \binom{N}{wN} p^{wN} p^{(1-w)N},$$

kde

$$\binom{N}{wN} = \frac{N!}{(wN)!(N-wN)!}$$

je binomický koeficient. V našom prípade $N = 1 \text{ mol} = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ částic, čo je však nesmierne veľké číslo a priame dosadenie pomocou kalkulačky tak povedie k výsledku $P = 0$, čo by sme očakávali. Normálne sa predsa za polčas rozpadu nerozpadnú tri štvrtiny látky. Pokúsme sa teda vyjadriť výsledok v tvare $P = 10^{-r}$

$$\begin{aligned} r &= -\log \left(\frac{N!}{(wN)!(N-wN)!} \frac{1}{2^{wN}} \frac{1}{2^{(1-w)N}} \right) = \\ &= -\log N! + \log((wN)!) + \log((N-wN)!) + (wN + (1-w)N) \log 2. \end{aligned}$$

Pre faktoriál použijeme Stirlingovu aproximačnú formulu

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \Rightarrow \log k! \approx \frac{1}{2} \log(2\pi k) + k \log\left(\frac{k}{e}\right) \approx k \log k - k \log e.$$

Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu

$$\begin{aligned} r &\approx -N \log N + wN \log wN + (1-w)N \log(1-w)N + \\ &\quad + N \log e - wN \log e - (1-w)N \log e + N \log 2 = \\ &= wN \log w + (1-w)N \log(1-w) + N \log 2 = \\ &= N(w \log w + (1-w) \log(1-w) + \log 2) \doteq 0,0568N. \end{aligned}$$

Tu je dobré mať na pamäti presnosť našej aproximácie, ktorá má chybu rádu v člene $\log N$, ktorý sme vynechali. Po dosadení za počet častíc dostávame finálny výsledok

$$P \approx 10^{-3,42 \cdot 10^{22}}.$$

Jedná sa o číslo s $3,42 \cdot 10^{22}$ nulami za desatinnou čiarkou a teda prakticky udalosť, ktorá nenastane. Toto sa však môže zmeniť, ak máme veľmi malý počet častíc. Pravdepodobnosť rovná šanci výhry jackpotu v športke 1 : 7 000 000 nastáva podľa nášho vzťahu pre súbor „až“ 120 častíc. Šanca pozorovať takýto jav je vyššia, ak rozpad jednej častice ovplyvňuje častice okolo, ako napríklad v už spomínanom jadrovom rozpade alebo v prípade stimulovanej emisie v laseroch.

Taktiež je dôležité si uvedomiť, že sme sa pýtali na rozpad presne daného množstva častíc. V prípade, ak by toto bola náhodná veličina, tak s rovnomerným rozdelením by sme dostali pravdepodobnosť $P = \frac{1}{N} = 10^{-22,8}$. Vidíme, že aj táto hodnota je pomerne malé číslo, no náš výsledok je v úplne inej „kategórii malosti“. Inou, lepšie položenou otázkou by bolo, ako veľká je pravdepodobnosť, že sa rozpadne viac ako 3/4 látky. Tu by bolo treba nasčítať všetky príspevky dokopy, čo je suma obsahujúca rádovo N členov. Potom sa dá prejsť od sčítania k integrovaniu

$$P\left(k > \frac{3}{4}N\right) = N \int_{\frac{3}{4}}^1 10^{-N(w \log w + (1-w) \log(1-w) + \log 2)} dw,$$

čo sa však nedá rozumne vyintegrovať. Pre našu úvahu je však postačujúci nasledujúci horný odhad. S rastúcim w sa pravdepodobnosť rozpadu na presne daný počet častíc znižuje, teda horný odhad pravdepodobnosti rozpadu na viac ako 3/4 častíc dostaneme ako

$$P\left(k > \frac{3}{4}N\right) < (1-w)NP\left(w = \frac{3}{4}, N = 1 \text{ mol}\right) \approx 10^{-3,42 \cdot 10^{22}} \cdot 10^{24} \approx 10^{-3,42 \cdot 10^{22}}.$$

Vidíme, že pri našej presnosti odhadu sa na výsledku vôbec nič nezmenilo. Úloha sa dá vyriešiť aj zo znalosti, že rádioaktívne rozpady sa riadia Poissonovým rozdelením, ktoré sa dostáva ako limita binomického rozdelenia pre veľký počet častíc (čo sme v istom zmysle vlastne vykonali). Pre určenie pravdepodobnosti rozpadu viac ako 3/4 látky sme si však veľmi nepomohli, keďže Poissonovo rozdelenie v našom prípade neposkytuje veľmi priateľivú kumulatívnu distribučnú funkciu.

Úloha VI.5 ... leť, raketo, leť

Postavili jsme malou raketu s hmotností $m_0 = 3 \text{ kg}$, z níž 70 % tvoří palivo. Výtoková rychlost spalín je $u = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a jejich hmotnostní tok je $R = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Raketa je vybavena stabilizačními prvky, takže se nevychyluje z dráhy a startuje z klidu kolmo vzhůru. Předpokládejte, že odporová síla vzduchu je přímo úměrná rychlosti, $F_o = -bv$, kde $b = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, v je rychlost rakety a znaménko minus znamená, že síla působí proti směru pohybu. V jaké výšce nad povrchem se bude raketa nacházet v čase $T = 25 \text{ s}$ od zažehnutí motoru?

Jindra dostal za domácí úkol dopraviť satelit na nízku obežnú dráhu.

Na raketu působí tři síly – urychlující síla motoru, odporová síla vzduchu a tíhová síla. Hmotnost rakety m se v čase mění podle vztahu

$$m(t) = m_0 - Rt = m_0 \left(1 - \frac{Rt}{m_0} \right).$$

Síla motoru je dána Meščerského rovnicí $F_m = Ru$. Druhý Newtonův zákon pro pohyb rakety říká

$$m(t) \ddot{x} = Ru - m(t)g - b\dot{x},$$

kde $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení, x je výška nad povrchem a tečky nad x značí derivace podle času. Dosadíme za $m(t)$ a dostaneme lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_0} \frac{1}{1 - \frac{Rt}{m_0}} \dot{x} = \frac{Ru}{m_0} \frac{1}{1 - \frac{Rt}{m_0}} - g. \quad (18)$$

Tu můžeme chápat i jako diferenciální rovnici prvního řádu pro proměnnou \dot{x} , protože chybí člen x . Po jejím vyřešení výsledek zintegrujeme a dostaneme závislost polohy na čase. Zatím ale nechme rovnici ležet a podívejme se, zda v úloze není nějaký chyták.

Prvním chytákem je, že počáteční tah motoru $F_m = Ru = 20 \text{ N}$ není dostatečný k tomu, aby zvedl raketu ze země. Tíhová síla držící raketu na zemi $F_g(t=0) = m_0g = 29,43 \text{ N}$ je větší. Raketa se vznese, až když její hmotnost po vyčerpání části paliva klesne pod $m_1 = Ru/g = 2,04 \text{ kg}$. To se stane v čase $t_1 = (m_0 - m_1)/R = 9,61 \text{ s}$. Do té doby bude stát na zemi s běžícím motorem. Soudruzi z NDR při návrhu rakety udělali chybu.

Hmotnost rakety bez paliva je $m_r = 0,9 \text{ kg}$. Druhým chytákem je, že raketa spotřebuje všechno palivo už v čase $t_2 = (m_0 - m_r)/R = 21 \text{ s}$. My však chceme spočítat výšku rakety v čase $T = 25 \text{ s}$. Pro pohyb v posledních čtyřech sekundách letu musíme použít rovnici

$$m_r \ddot{x} = -b\dot{x} - m_r g. \quad (19)$$

Na raketu působí pouze tíhová síla směrem dolů a odporová síla vzduchu proti směru pohybu. Hmotnost rakety se nemění, protože už se nespoteřebává palivo.

Jelikož pohyb rakety začne až při hmotnosti $m_1 = 2,04 \text{ kg}$ v čase $t_1 = 9,61 \text{ s}$ a do té doby raketa stojí na zemi, upravíme rovnici (18) na tvar

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_1} \frac{1}{1 - \frac{R(t-t_1)}{m_1}} \dot{x} = \frac{Ru}{m_1} \frac{1}{1 - \frac{R(t-t_1)}{m_1}} - g.$$

V rovnici je příliš mnoho písmenek, proto provedeme substituci

$$\tau = 1 - \frac{R(t-t_1)}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} = -\frac{R}{m_1} \frac{d}{d\tau},$$

pomocí které nahradíme časové derivace

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{R}{m_1} x', \\ \ddot{x} &= \left(\frac{R}{m_1} \right)^2 x''. \end{aligned}$$

Čárka značí derivaci podle τ . Všimněte si, že τ je bezrozměrná proměnná, takže x , x' i x'' mají rozměr délky. Okamžiku vzletu rakety $t = t_1$ odpovídá bezrozměrný čas $\tau = 1$. S rostoucím reálným časem t bude τ klesat. Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$x'' - \frac{b}{R\tau} x' = \frac{m_1 u}{R\tau} - \frac{gm_1^2}{R^2}.$$

Rovnici můžeme zjednodušit ještě víc, pokud odstraníme rozměr z veličiny x . Zavedeme substituci

$$x = \frac{m_1 u}{R} z.$$

Počátečním podmínkám $x(\tau = 1) = 0$ a $x'(\tau = 1) = 0$ odpovídají podmínky $z(\tau = 1) = 0$ a $z'(\tau = 1) = 0$. Diferenciální rovnice bude

$$z'' - \frac{b}{R\tau} z' = \frac{1}{\tau} - \frac{gm_1}{Ru}.$$

Označíme bezrozměrné parametry

$$p = \frac{b}{R} = 0,5, \quad q = \frac{m_1 g}{Ru} = 1,$$

a dostaneme přehlednou diferenciální rovnici závislou na dvou vnitřních parametrech p a q

$$z'' - \frac{p}{\tau} z' = \frac{1}{\tau} - q.$$

Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

$$z'' - \frac{p}{\tau} z' = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_H = A\tau^p,$$

kde A je integrační konstanta, jejíž přesnou hodnotu zjistíme z počátečních podmínek. Poté uhodneme partikulární řešení (tato rovnice je jednoduchá, řešení se dá uhadnout)

$$z'_P = \frac{q\tau}{p-1} - \frac{1}{p}.$$

Celkové řešení rovnice je součet homogenního řešení a partikulárního řešení

$$z' = z'_H + z'_P = A\tau^p + \frac{q\tau}{p-1} - \frac{1}{p} = A\tau^{\frac{1}{2}} - 2\tau - 2.$$

Jelikož konstanty $p = 0,5$ a $q = 1$ mají v našem případě takové krásné hodnoty, rovnou jsme za ně dosadili. Z počáteční podmínky $z'(1) = 0$ určíme konstantu A

$$0 = A - 2 - 2 \quad \Rightarrow \quad A = 4.$$

Závislost bezrozměrné polohy z na čase je

$$z = \int z' d\tau,$$

$$z = \frac{8}{3}\tau^{\frac{3}{2}} - \tau^2 - 2\tau + B,$$

kde B je integrační konstanta. Z další počáteční podmínky $z(1) = 0$ určíme konstantu B

$$0 = \frac{8}{3} - 1 - 2 + B \Rightarrow B = \frac{1}{3}.$$

Bezrozměrná poloha a rychlost rakety jsou

$$z = \frac{8}{3}\tau^{\frac{3}{2}} - \tau^2 - 2\tau + \frac{1}{3},$$

$$z' = 4\tau^{\frac{1}{2}} - 2\tau - 2.$$

Normální polohu a rychlost můžeme z bezrozměrných veličin dostat jako

$$x = \frac{m_1 u}{R} z,$$

$$v = \dot{x} = -u z'.$$

Poněkud neintuitivně raketa letí vzhůru, pokud je z' záporné. Palivo dojde v okamžiku $t_2 = 21$ s, čemuž odpovídá bezrozměrný čas $\tau_2 = 1 - R(t_2 - t_1)/m_1 = 0,442$. Při vyčerpání paliva jsou poloha a rychlost rakety

$$z_2 = 0,0377 \Rightarrow x_2 = 154 \text{ m},$$

$$z'_2 = -0,225 \Rightarrow v_2 = 45,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Abychom zjistili výšku rakety v čase $T = 25$ s, musíme vyřešit rovnici (19)

$$m_r \ddot{x} = -b\dot{x} - m_r g,$$

$$m_r \int_{v_2}^{v(T)} \frac{d\dot{x}}{b\dot{x} + m_r g} = - \int_{t_2}^T dt,$$

$$\frac{m_r}{b} \ln \left(\frac{bv(T) + m_r g}{bv_2 + m_r g} \right) = -(T - t_2),$$

$$v(T) = \left(v_2 + \frac{m_r g}{b} \right) e^{-\frac{b(T-t_2)}{m_r}} - \frac{m_r g}{b}.$$

Po dosazení za hmotnost $m_r = 0,9$ kg a počáteční rychlost $v_2 = 45,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ vyjde rychlost v čase $T = 25$ s jako $v(T) = 0,847 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Rychlost je kladná, tím pádem raketa pořád stoupá a nemusíme řešit nějaké převrácení rakety při pádu a s ním spojené změny odporového součinitele b .

Výšku spočítáme integrací rovnice pro rychlost

$$v(t) = \left(v_2 + \frac{m_r g}{b} \right) e^{-\frac{b(t-t_2)}{m_r}} - \frac{m_r g}{b},$$

$$\int_{x_2}^{x(T)} dx = \int_{t_2}^T \left(\left(v_2 + \frac{m_r g}{b} \right) e^{-\frac{b(t-t_2)}{m_r}} - \frac{m_r g}{b} \right) dt,$$

$$x(T) = x_2 + \frac{m_r \left(v_2 + \frac{m_r g}{b} \right)}{b} \left(1 - e^{-\frac{b(T-t_2)}{m_r}} \right) - \frac{m_r g}{b} (T - t_2).$$

Číselně vyjde výška rakety v čase $T = 25$ s jako $x(T) = 242$ m. Rychlost rakety je v tomto okamžiku malá, $v = 0,847 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, raketa se tudíž nachází těsně pod bodem obratu a za chvíli začne padat dolů.

Úloha VI.P . . . přivalový déšť

Je dobré schovávat se před deštěm v lese? Vytvořte vhodný model popisující tuto problematiku. Uvažte například hustotu olistění a intenzitu a délku deště. Popište, za jak dlouho od začátku deště začnou kapky z listů dopadat na zem, za jak dlouho po skončení deště v lese přestane pršet a podobně.

Lucka běžela lesem a totálně zmokla.

Úvod

Začněme definicí veličin, které budeme při řešení používat. Déšť můžeme popsat jako objemový tok q kapek, z nichž každá má objem V_k . Zřejmě se pohybují terminální rychlostí, kterou lze spočítat z Newtonova zákona odporu.

Tento model je velmi zjednodušený, ve skutečnosti je situace mnohem složitější. Objemy kapek nejsou stejné, místo toho podléhají nějakému rozdělení (můžeme si tipnout, že normálnímu). Stejně tak rychlosti – ty navíc nemusí být kolmé k zemi a dále mohou být ovlivněny hustotou a vlhkostí atmosféry, směrem foukání větru a podobně. Vliv těchto jevů však (vzhledem k přesnosti výsledného odhadu) zanedbáme. Všechny výše definované veličiny samozřejmě závisí i na čase. Předpokládejme však, že déšť začne v čase 0 a následně bude konstantní až do času t , ve kterém najednou skončí.

Druhou částí modelu jsou stromy. Prozkoumáme jak jehličnaté, tak listnaté, přičemž se omezíme pouze na u nás běžně se vyskytující druhy. Pro jednoduchost se budeme zabývat oběma typy zvlášť, tj. nebudeme uvažovat smíšené lesy. Představíme si nekonečnou rovinu, která je rovnoměrně pokryta podobně velkými stromy stejného druhu. Jediným důležitým parametrem takového lesa je počet stromů na jednotku plochy, který označíme n_s . Další veličiny definujeme až později podle konkrétních stromů.

Homogenní les

Základním principem, z kterého vyjdeme, je zachování hmotnosti, v tomto případě vody. Veškerá voda, která na les dopadne, se buď absorbuje (vzduchem, listy a podobně), nebo spadne na zem (před tím se může ještě dočasně zachytit v prostředí).

Zpočátku uvažujme, že koruny všech stromů splývají a tvoří všude stejně vysokou vrstvu s rovnoměrnou hustotou listů. Tím vznikne jakási „kapacita“, která se bude postupně naplňovat vodou. Označíme-li průměrný počet listů jednoho stromu N_1 , na jednotku plochy bude připadat $n_1 = N_1 n_s$ listů. Každý z nich zvládne zadržet vodu o objemu $V_1 = \sigma S_1$, kde σ je konstanta a S_1 plocha listu. Všechny listy nejsou stejně velké, nás ale zajímá celková kapacita, takže můžeme počítat s průměrnou hodnotou S_1 .

Hodnota σ bude dále záviset na materiálu povrchu listu (důležitá bude velikost tření mezi listem a vodou), povrchovém napětí vody, sklonu listu a dalších parametrech. Nicméně přesný výpočet by byl minimálně na samostatnou úlohu, proto se spokojíme s tím, že σ odhadneme (resp. změříme). Listy mají různé tvary,

tedy pro každý druh stromu bude hodnota σ trochu jiná. Sklony jednotlivých listů typicky nejsou stejné, ale to není důležité, protože σ neplánujeme počítat.

Můžeme říci, že V_1 je konstanta pro daný druh stromu a výraz σS_1 způsobem, jak ji lépe odhadnout.

Všimněme si, že tato úvaha funguje i pro jehličnany. V tomto případě však bude množství zadržené vody úměrné délce listu l_1 , ne jeho ploše. Nemusí to být úplně pravda (některé jehlice jsou zploštělé), jde to ale schovat do konstanty λ (která má stejný význam jako σ , jen jinou jednotku). Jedna jehlice tak zadrží objem $V_1 = \lambda l_1$ vody.

Celkové množství vody na jednotku plochy, které dokáže homogenní vrstva listů zadržet, bude v prvním přiblížení $Q = n_1 V_1$. Tato kapacita se zaplní za čas

$$\tau = \frac{Q}{q} = \frac{n_1 V_1}{q}. \quad (20)$$

Pokud déšť začne v čase 0, první kapky dopadnou na zem v čase τ . Padat přestanou stejně, jako kdyby tu les nebyl, neboli v t . Předpokládáme, že déšť trvá dostatečně dlouho, tj. $\tau < t$. Pokud by tomu tak nebylo, na zem nezačne pršet nikdy.

Je jasné, že tento model má mnoho zřejmých nedostatků. Nyní se ještě pokusíme odhadnout neznámé konstanty, abychom měli alespoň představu o číselném výsledku, a problémy modelu budeme řešit až v další části.

Odhadněme nejdříve parametry deště. Typicky platí, že čím je intenzivnější, tím rychleji skončí. Trvalý déšť dosahuje hodnot v řádu nižších jednotek $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$, zatímco krátké, ale intenzivní přeháňky mívají až desetkrát vyšší hodnoty. Extrémní situace typu přívalových dešťů uvažovat nebudeme.

Bohužel žádná oficiální stupnice neexistuje. Proto si zavedeme vlastní, a sice

$$q = (2; 5; 20) \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1} \doteq (5,6; 14; 56) \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Vektor jsme použili čistě pro zjednodušení zápisu.

Nejčastějším stromem je u nás s více než polovičním zastoupením⁵⁰ smrk, proto bude náš zástupce jehličnanů. Z listnatých stromů mají zastoupení nejvyšší buk a dub (okolo 7%), jako zástupce zvolíme dub.

Pro odhad V_1^s jsme vzali několik smrkových větviček a zvážili je. Poté jsme je pořádně namočili do vody a zvážili znovu. Jejich hmotnost se změnila z 13 g na 22 g, takže rozdíl byl 9 g při celkovém počtu jehlic ~ 1800 , což nám dává $V_1^s \sim 5,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$. Uvědomme si však, že tento odhad je přinejlepším řádový.

Dále jsme vzali 15 listů dubu a opakovali jsme stejný postup. Rozdíl hmotností byl 14 g (z 9 g na 23 g), takže máme $V_1^d \sim 9,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$. Z těchto listů jsme vybrali ten se střední velikostí a změřili jsme jeho plochu. Dostali jsme $S_1^d \doteq 52 \text{ cm}^2 = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, platí tedy $\sigma^d = V_1^d / S_1^d \sim 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

⁵⁰<https://cs.wikipedia.org/wiki/Les>

Je možné, že jsme zvolili ne úplně průměrné listy, a proto bude lepší⁵¹ počítat přímo s veličinou σ^d místo V_1^d . U smrku takový problém nehrozí (jehlice se zdály být všechny stejně velké), u něj si vystačíme s V_1^s .

Pro měření plochy listů se používá veličina LAI,⁵² která udává celkovou plochu listů na plochu země. U dubu se běžně pohybuje mezi 2,5 a 4, použijeme hodnotu 3. Opět, toto je jen velmi přibližný odhad, protože skutečná hodnota závisí na ohromném množství faktorů. Pro představu uvádíme článek,⁵³ ze kterého jsme čerpali my.

Můžeme spočítat hodnotu $Q^d = n_1^d V_1^d = n_1^d S_1^d \sigma^d \sim 5,4 \cdot 10^{-4}$ m. Využili jsme toho, že LAI má význam $n_1 S_1$. Nyní nezbývá než dosadit do (20). Pro dub dostaneme

$$t_1^d = \frac{n_1^d V_1^d}{q} = \frac{n_1^d V_1^d}{q} = (960; 390; 96) \text{ s.}$$

To znamená, že při velmi mírném dešti dopadnou první kapky na zem po čtvrt hodině a pořádný slejvák pocítíme už za necelé dvě minuty.

Hodnoty LAI u smrku jsou v průměru vyšší,⁵⁴ např. kolem 7. Bohužel, v tomto případě nám tato veličina nepřijde úplně jasně definovaná, protože jehlice jsou v zásadě jednodimenzionální.

Pro přesnější odhad vyjdeme ze skutečnosti, že lesy okolo Plešného jezera mají 7,3 t jehlic na hektar.⁵⁵ Výše jsme ukázali, že 1 800 jehlic váží 13 g a zachytí 9 g vody. Pomocí jednoduché trojčlenky dostaneme $Q^s \sim 5,0 \cdot 10^{-4}$ m a $n_1^s \sim 10^5 \text{ m}^{-2}$. Dosazením do (20) získáme

$$t_1^s = (900; 360; 90) \text{ s,}$$

což je vzhledem ke všem nepřesnostem, kterých jsme se při výpočtech dopustili, v podstatě stejně jako u dubu.

Homogenní les podrobněji

Nyní se zaměříme na některá zanedbání předchozího modelu. Jako první spočítáme, kolik vody se může vypařit. Pokud teplotu při dešti odhadneme na 20 °C, maximální hmotnost vody ve vzduchu bude⁵⁶ $17,3 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$. Jednoduchým převodem jednotek zjistíme, že v takovém případě bude $1,7 \cdot 10^{-5}$ objemu prostoru zabírat voda.

To není vůbec málo – pokud bychom předpokládali vrstvu zcela nasyceného vzduchu o výšce několika desítek metrů, blížíme se k vrstvě vody o výšce 1 mm, což odpovídá půl hodině nejslabšího deště. Nicméně v lesích je zpravidla velká

⁵¹Správně bychom vůbec neměli používat výrazy typu $V_1^d \sim \dots$ a $S_1^d \sim \dots$, protože neplatí obecně, ale jen pro naši konkrétní skupinu listů. Nicméně jejich podíl, σ^d , by už měl být obecný a (v rámci dostatečně velké nejistoty) platný pro všechny duby.

⁵²Zkratka znamená Leaf Area Index, česky index listové plochy.

⁵³<https://www.biorxiv.org/content/10.1101/2021.08.05.454476v3.full>

⁵⁴https://www.agriculturejournals.cz/web/jfs.htm?type=article&id=112_2018-JFS

⁵⁵https://www.infodatasys.cz/public/Biologia_61_s523.pdf

⁵⁶https://www.engineeringtoolbox.com/maximum-moisture-content-air-d_1403.html

vlhkost vzduchu, takže i když by se během deště zvýšila na maximální hodnotu, spotřebuje se tím jen malá část z tohoto množství vody.

Dále se zamysleme nad vypařováním. Pravděpodobně nebude mít žádný vliv to, za jak dlouho dopadnou první kapky na zem. Může krátkodobě snížit intenzitu deště, ale to je tak všechno.

Absorbce vody listy je v tomto smyslu podobná – i kdyby měla měřitelný efekt, bude probíhat velmi pomalu, takže se projeví maximálně na intenzitě. Míra této absorbce se pro různé druhy rostlin výrazně liší, každopádně lze předpokládat, že pro stromy, o které se zajímáme, bude prakticky zanedbatelná.

Model kapacity listů má zásadní nedostatek v tom, že vodní kapky se při dopadu na listy či jehlice odrazí či rozprsknou do všech stran. Důsledkem toho je, že některé dopadnou na zem už na začátku deště. Můžeme však říci, že se zajímáme o to, za jak dlouho bude intenzita deště v lese srovnatelná s původní intenzitou. Velká většina odražených či rozprsknutých kapek se zachytí na nějakém jiném listu či jehlici a dál vše pokračuje podle původních předpokladů.

Ještě jsme neodpověděli na to, za jak dlouho po skončení deště přestanou padat kapky z listů na zem. Podle odvozeného modelu by mělo platit, že k tomu dojde prakticky okamžitě. Nicméně ve skutečnosti tomu tak určitě nebude. Jednak proto, že reálný déšť neskončí najednou, ale spíš postupně slábne. Za druhé, listy s vodou jsou velmi nestabilní a i lehký poryv větru stačí k narušení rovnováhy a pádu dalších několika kapek.

Déšť v lese tedy bude ustávat zhruba stejně, jako déšť mimo les. Rozdíl bude v tom, že v lese se i po relativně dlouhé době bude moci stát, že se najednou zvedne vítr a shodí několik kapek. Pokud bychom si měli tipnout, intenzita deště bude klesat exponenciálně, stejně jako intenzita náhlých pádů zbytků vody, které se ještě drží na listech. Vzhledem k povaze jevu a množství proměnných, na kterých závisí, se bohužel nedá odhadnout konkrétní časový rámec.

Lokálně heterogenní les

Dosud jsme uvažovali, že koruny stromů splývají v jednu homogenní vrstvu. Ve skutečnosti tomu tak ale není – podíváme-li se nahoru, na některých místech spatříme mnoho listů nad sebou, zatímco na jiných bude prosvítat obloha. Pojdme to napravit a počítat s náhodným rozložením listů v prostoru.

Proč náhodným? Protože je to nejlepší možnost, již lze rozumně spočítat. Stromy a rostliny obecně se až podivuhodně přesně řídí jednoduchými matematickými pravidly. Například, u mnoha rostlin si můžeme všimnout, že jejich listy vyrůstají ze stonku podle Fibonacciho čísel. Větve jehličnanů jsou už na první pohled velmi pravidelné. Nejvíce náhodně vypadají listnaté stromy, ale i u nich je možné vysledovat některé základní vzory.

Bohužel k tomu, abychom s tím mohli počítat, bychom nejdříve potřebovali tato pravidla přesně matematicky popsat, což nemá být obsahem této úlohy. Náhoda je druhá nejlepší možnost. Především u listnatých stromů nebudeme s tímto

přístupem moc daleko od skutečnosti.

Představme si úsek koruny s vodorovnou plochou S . Podle značení výše v ní bude $n_S = n_1 S$ listů. Dále uvažujme, že úsek rozdělíme podle svislé osy na vrstvy, tj. tělesa s podstavou S a nějakou (malou a pro všechny vrstvy stejnou) výškou. Očíslujeme je od nejvrchnější (s indexem 1) po nejspodnější (s indexem h).

V každé vrstvě by mělo být přibližně stejně listů, konkrétně $n_v = n_S/h$. To znamená, že v každé vrstvě bude plocha o velikosti⁵⁷ $S_p = n_v S'_1$ zcela pokryta listy, zatímco plocha $S - S_p$ bude kompletně prázdná. My chceme zjistit, co vznikne překrytím mnoha vrstev.

V některých částech S nebude ani jeden list. Celkovou plochu všech těchto částí dohromady označíme S_0 . V jiných bude jeden, v dalších dva nad sebou a tak dále. Jim odpovídající plochy potom označíme S_1, S_2 apod.

Z této definice je vidět, že součet všech dílčích ploch se rovná původní ploše S , neboli

$$\sum_{i=0}^h S_i = S,$$

kde předpokládáme, že nad sebou může být maximálně tolik listů, kolik vrstev uvažujeme (spoiler – nakonec to zobecníme pro $h \rightarrow \infty$). Pro lepší popis situace definujeme funkci

$$f(i) = \frac{S_i}{S},$$

kteřá vyjadřuje, jaký podíl z S má nad sebou právě i listů. Z předchozích dvou rovnic vyplývá

$$\sum_{i=0}^h f(i) = \frac{1}{S} \sum_{i=0}^h S_i = 1,$$

takže $f(i)$ má i jiný význam – vyjadřuje pravděpodobnost, že přesně nad námi je právě i listů. My však půjdeme ještě dál a tento fakt označíme za definici funkce f . Díky tomu můžeme použít pravidla pro skládání pravděpodobností. Nyní označme k jako část plochy S , která by byla zakryta listem, pokud bychom započítali pouze první vrstvu, neboli $k = S_p/S$. Pro každou vrstvu potom platí, že s pravděpodobností k je v ní v bodě nad námi list (a s pravděpodobností $1 - k$ je v ní ten stejný bod prázdný). Pro všechny vrstvy najednou to bude

$$f(i) = \binom{h}{i} k^i (1 - k)^{h-i}.$$

Na tomto výrazu není nic překvapivého, jedná se o klasické binomické rozdělení. Všimněme si, že takto definovaná funkce f splňuje

$$\sum_{i=0}^h f(i) = \sum_{i=0}^h \binom{h}{i} k^i (1 - k)^{h-i} = (k + (1 - k))^h = 1.$$

⁵⁷Veličina S'_1 není plocha listu (to by byla S_1). Místo toho jde o průmět plochy S_1 do vodorovné roviny. Zřejmě platí $S'_1 = \alpha S_1$, kde $\alpha < 1$ je nějaká konstanta průměrující sklon všech listů.

To už by samo o sobě mohlo stačit, ale není to úplně fyzikální výsledek. Navíc, jak uvidíme dále, budeme potřebovat sečíst hodnoty f pro více různých i , což teď nedokážeme. Pojdme proto zkusit najít nějaké lepší vyjádření.

Vyjdeme ze Stirlingovy aproximace faktoriálu

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

kterou dosadíme do vzorce pro binomický koeficient

$$\begin{aligned} \binom{h}{i} &= \frac{h!}{i!(h-i)!} \approx \frac{\sqrt{2\pi h} \left(\frac{h}{e}\right)^h}{\sqrt{2\pi i} \left(\frac{i}{e}\right)^i \cdot \sqrt{2\pi (h-i)} \left(\frac{h-i}{e}\right)^{h-i}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h^h}{i^i (h-i)^{h-i}} \sqrt{\frac{h}{i(h-i)}}. \end{aligned}$$

Nyní provedeme limitu $h \rightarrow \infty$, čímž pošleme tloušťky jednotlivých vrstev k nule. Listy se přeci mohou nacházet v libovolných výškách, ne jen v nějakých diskretních vrstvách. Teoreticky by mohlo dávat smysl omezit minimální tloušťku vrstvy na tloušťku listu, aby se nemohlo stát, že se listy překryjí. Nicméně, jak uvidíme dále, v podstatě na tom nezáleží, protože použité aproximace budou přibližně platné už pro $h \gg K$.

Veličinu K můžeme chápat jako k , které nezávisí na počtu vrstev. Pro k totiž platí

$$k = \frac{S_p}{S} = \frac{n_v S_1'}{S} = \frac{n_s S_1'}{hS} = \frac{n_l S S_1'}{hS} = \frac{n_l S_1'}{h},$$

takže s $h \rightarrow \infty$ půjde k k nule. Definujme proto $K = kh = n_l S_1'$. Potom můžeme hodnotu K chápat jako „průměrný počet listů nacházejících se nad plochou, kterou zabírá jeden list“. Pokud se nad tímto tvrzením trochu zamyslíme, zjistíme, že K vlastně neříká nic jiného, než kolik listů průměrně uvidíme, podíváme-li se přímo nad sebe.⁵⁸ K je vlastně jen hodnota LAI vynásobená parametrem sklonu listů α .

Vraťme se ale k limitě $h \rightarrow \infty$. Nejdříve upravíme výraz pro f výše odvozenou aproximací binomického koeficientu a dosazením za k

$$\begin{aligned} f(i) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h^h}{i^i (h-i)^{h-i}} \sqrt{\frac{h}{i(h-i)}} \left(\frac{K}{h}\right)^i \left(1 - \frac{K}{h}\right)^{h-i} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h^{h-i}}{i^i (h-i)^{h-i}} \sqrt{\frac{h}{i(h-i)}} K^i \left(1 - \frac{K}{h}\right)^{h-i} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \sqrt{\frac{h}{h-i}} \left(\frac{K}{i}\right)^i \left(\frac{1 - \frac{K}{h}}{1 - \frac{i}{h}}\right)^{h-i}. \end{aligned}$$

⁵⁸Přesněji řečeno kolik listů průměrně protne každá svislá přímka.

Pro $h \gg i$ bude druhá odmocnina rovna jedné. Poslední člen je trochu trikový

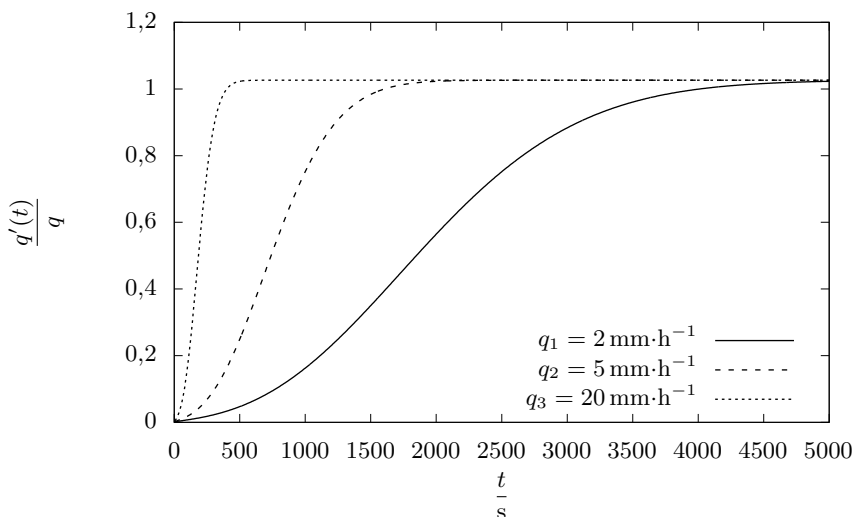
$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{K}{h}}{1 - \frac{i}{h}} \right)^{h-i} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{K}{h}\right)^h \left(1 - \frac{i}{h}\right)^i}{\left(1 - \frac{i}{h}\right)^h \left(1 - \frac{K}{h}\right)^i} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{e^{-K} \left(1 - \frac{i^2}{h}\right)}{e^{-i} \left(1 - \frac{Ki}{h}\right)} = e^{i-K}.$$

Přitom jsme využili následujících dvou limit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^b = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{ab}{x} = 1.$$

Celkově máme

$$f(i) \approx \frac{1}{e^{K\sqrt{2\pi i}}} \left(\frac{eK}{i}\right)^i.$$



Obr. 30: Poměr intenzity deště v dubovém lese ku počáteční intenzitě deště v závislosti na čase. Poměr samotný závisí na počáteční intenzitě podle funkce (21).

Fyzikální význam tohoto výsledku je jasný – můžeme spočítat, jaká část kapacity koruny bude v určitém čase zaplněna. Uvažujme plochu S_j definovanou tak, že v každém jejím bodě je nad sebou právě j listů. To znamená, že v dané ploše se nachází $n_{S_j} = jS_j/S'_1$ listů. Kapacita těchto listů se zaplní za čas

$$t_j = \frac{n_{S_j} V_1}{q S_j} = \frac{j V_1}{q S'_1}.$$

V čase t_j budou zaplněny všechny plochy S_i pro $i \leq j$, takže jimi bude moci protékat dešť v původní intenzitě q . Ostatní plochy, tj. ty s $i > j$, se ještě budou

zaplňovat a žádná voda jimi protékat nebude. Celkovou intenzitu deště, který projde korunou a dopadne na zem, tak můžeme v čase t_j vyjádřit jako

$$q'(t_j) = \sum_{i=0}^j \frac{qS_i}{S},$$

kde velikost plochy S_i je právě $S_i = f(i)S$. Obecný výpočet sumy ale není tak snadný, navíc bychom se museli potýkat s tím, že t_j je definován pouze pro diskrétní hodnoty j , takže by se intenzita skokově měnila. Přejdeme tedy ke spojitému času a sumu aproximujeme integrálem

$$q'(t) \approx q \int_0^{t\eta} f(x) dx \approx \frac{q}{e^K \sqrt{2\pi}} \int_0^{t\eta} \left(\frac{eK}{x}\right)^x x^{-\frac{1}{2}} dx, \quad (21)$$

kde jsme pro zjednodušení definovali konstantu $\eta = qS'_1/V_1$. Tento integrál nemá analytické řešení, to však nevadí, můžeme jej spočítat numericky. Pro dub odhadněme $\alpha^d \sim 0,7$, potom z výše uvedené hodnoty $LAI^d = 3$ vyplývá $K^d \sim 2,1$. Dále spočteme hodnoty η pro různé intenzity deště

$$\eta = \frac{qS'_1}{V_1} = \frac{qK}{n_1V_1} = \frac{qK}{Q} = \frac{K}{\tau},$$

$$\eta^d = \frac{K^d}{\tau^d} \sim (2,2; 5,4; 22) \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

Do grafu 30 jsme vynesli poměr q'/q v závislosti na čase pro dub pro všechny tři uvažované hodnoty q . Vidíme, že při velmi mírném dešti bude plné intenzity dosaženo až po přibližně hodině a půl, zatímco v případě silného deště již po necelých deseti minutách.

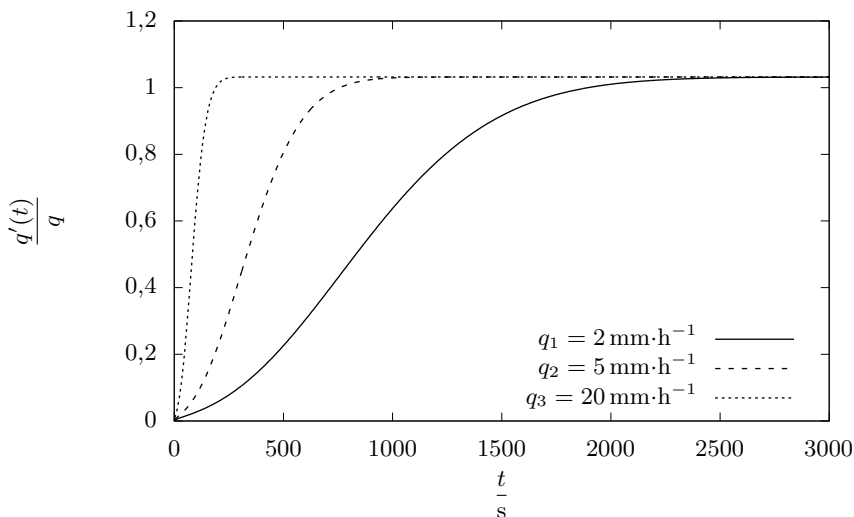
Podíl intenzit se asymptoticky blíží hodnotě o něco málo větší než 1. To je samozřejmě špatně, ve skutečnosti by se měl blížit právě jedničce. Problém je v tom, že vzorec pro integrál je pouze aproximací přesné sumy. To by se dalo řešit normalizací q' . Znamenalo by to numericky spočítat její hodnotu v nekonečnu a celou funkci jí vydělit.

Odhad pro smrk bude opět trochu složitější. Výše jsme zmínili, že LAI bude vyšší než u dubu, realistická hodnota je kolem 7. Sklon jehlic bude pravděpodobně větší než u listů, jelikož na rozdíl od nich směřují všemi směry. Zvolme $\alpha^s \sim 0,5$, potom máme $K^s \sim 3,5$.

Dále upravíme vzorec pro η tak, že do něj dosadíme z definice $K = n_1S'_1$, a dostaneme

$$\eta^s = \frac{K^s}{\tau^s} \sim (3,9; 9,7; 39) \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

Výsledky numerického integrálu jsme vynesli do grafu 31. Můžeme si všimnout, že vypadá v podstatě stejně jako graf pro dub. Pro lepší porovnání jsme vytvořili ještě graf 32, kde jsme vykreslili závislosti pro oba druhy stromů. Rovnou jsme je také nanormovali, aby byly lépe porovnatelné.



Obr. 31: Poměr intenzity deště ve smrkovém lese ku počáteční intenzitě deště v závislosti na čase. Poměr samotný závisí na počáteční intenzitě podle funkce (21).

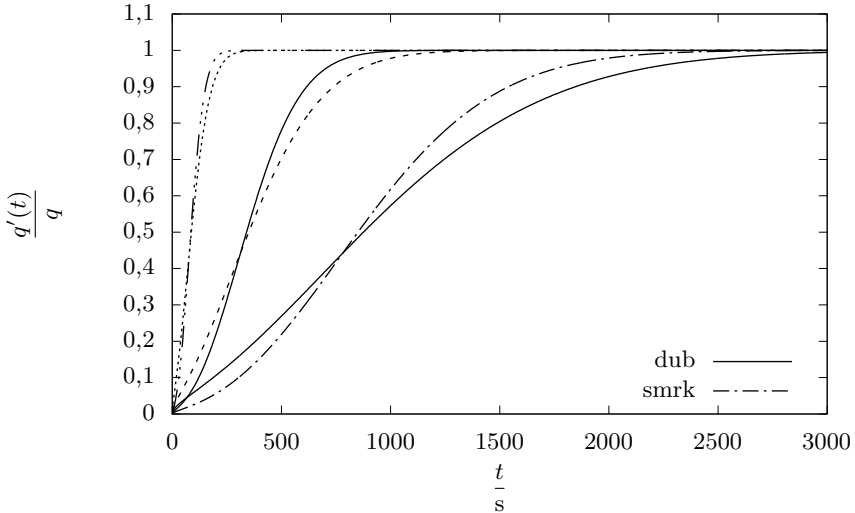
Funkce $q'/q(t)$ závisí na parametrech K a τ . Druhý jmenovaný vlastně jen lineárně škáluje čas. Lze očekávat, že při dvakrát větším τ se ke stejné intenzitě dostaneme za dvakrát delší dobu.

Parametr K popisuje strmost rozdělení – při velkém K bude na většině plochy (relativně) stejně tlustá vrstva listů. Potom bude chvíli trvat, než se tato kapacita zaplní, ale až k tomu dojde, intenzita se začne prudce zvyšovat. Limitně velká hodnota K by vedla k téměř uniformnímu rozdělení počtu listů. Naopak pro malé K nastanou velké rozdíly mezi jednotlivými oblastmi – nástup intenzity bude rychlejší, ale bude trvat déle, než se zaplní nejvíce extrémní oblasti. Podrobněji to můžeme vidět v grafu 33.

Výsledkem této kapitoly je, že v některých místech lesa začne pršet prakticky už na začátku deště, zatímco v jiných až později. Průměrnou intenzitu deště v lese v čase t pak vyjadřuje funkce $q'(t)$. Trochu nepříjemný je fakt, že $q'(t)$ dříve či později dosáhne původní hodnoty q , a to v libovolně hustém lese. Tento problém se pokusíme vyřešit v dalších kapitolách.

Heterogenní les

V předchozí části jsme při odvozování funkce q' vyšli z předpokladu, že hustota listů je sice náhodná, ale v celém lese se řídí tím stejným rozdělením. Ve skutečnosti tomu tak není – hustota listů typicky klesá s rostoucí vzdáleností od středů stromů.



Obr. 32: Hodnoty z grafů 30 a 31, které byly nanormovány a zobrazeny přes sebe.

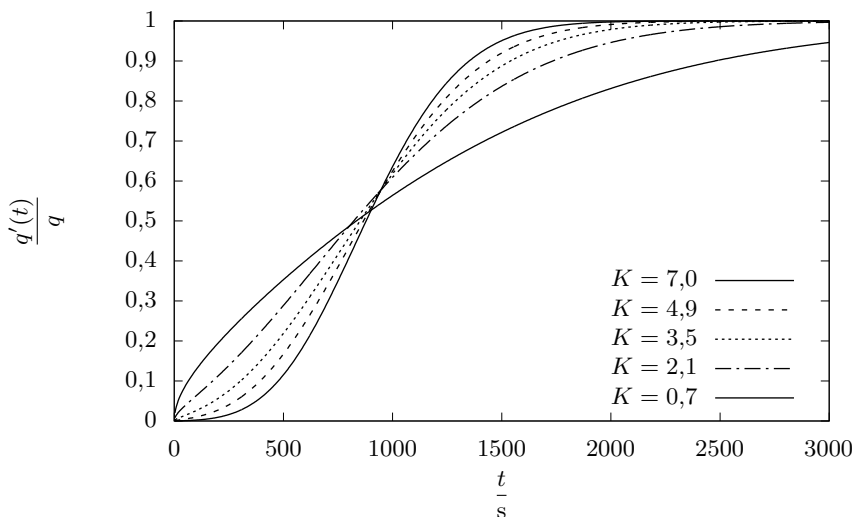
Řešení tohoto problému je principiálně jednoduché. Na některých místech hustotu zvýšíme, na jiných ji zase stejným způsobem snížíme. To provedeme tak, že jak K , tak Q vynásobíme nějakým koeficientem, např. ρ . Tím pádem K přejde na ρK a Q resp. τ na ρQ resp. $\rho\tau$. Všiměme si, že $\eta = K/\tau$ zůstane konstantní.

V grafu 34 jsme zobrazili poměr intenzit pro různé hodnoty ρ při fixních hodnotách ostatních parametrů. Je vidět, že průběh je vždy stejný, pro vyšší hodnoty ρ jen vše trvá delší dobu.

Zajímavé je, že pro ρ můžeme vidět, že intenzita se viditelně změní až za přibližně půl hodiny od začátku deště. To je způsobeno tím, že listů je již tolik, že na každém místě jich je více než nějaký minimální počet. Přesněji řečeno, místa s menším než tímto počtem jsou statisticky velmi nepravděpodobná. Tato základní vrstva způsobí, že všude, kde je takto vysoká vrstva ρ , bude alespoň první půl hodinu sucho.

V oblastech s vysoce podprůměrným počtem listů bude situace přesně opačná – intenzita deště tam bude už od začátku nenulová, navíc bude velmi rychle stoupat. Nicméně v tomto případě není jasné, zda je zvolený model dostatečně přesný. Vzhledem k tomu, že jsme jej odvodili pomocí pravděpodobností s celkem netriviálními předpoklady o rozumném rozložení listů, je možné, že pro takto malé hustoty již nebude fungovat.

Rozložení hodnot parametru ρ v prostoru bude samozřejmě náhodné. Můžeme se ale pokusit najít závislost ρ na podílu plochy s danou hodnotou ρ ku celkové



Obr. 33: Poměr intenzity deště ve smrkovém lese ku počáteční intenzitě deště v závislosti na čase pro různé hodnoty parametru K při intenzitě $q_1 = 2 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$.

ploše lesa. Přesný výpočet nedává příliš smysl, proto se pokusíme jen o kvalitativní odhad.

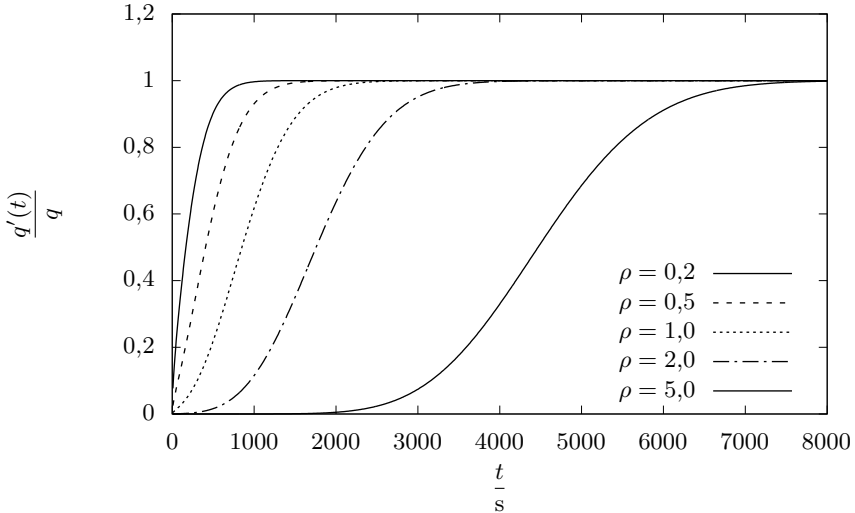
Pro smrk očekáváme relativně málo izolovaných míst s velmi velkými hodnotami ρ (středů stromů), obklopených velkými plochami s průměrnými až lehce podprůměrnými hodnotami. Směrem od středů stromů bude ρ klesat, bohužel nedokážeme odhadnout jak přesně. Někde se také mohou objevit oblasti s prakticky nulovým ρ , ty jsou ale spíše výjimečné.

U dubu a listnatých stromů obecně naopak očekáváme daleko menší rozdíly. Tyto stromy nemají tak pravidelnou strukturu jako smrky, lze tedy předpokládat, že hodnoty ρ nebudou výrazně kolísat.

Reálný les

V předchozí kapitole jsme dále zpřesnili model, čímž jsme na některých místech výrazně prodloužili dobu, po kterou si můžeme užívat sucha. Ještě ale zbývá vyřešit jeden zásadní problém – voda (někdy) teče horizontálně.

Dosud jsme počítali s tím, že tam, kde se kapky deště poprvé dotknou listů, také spadnou. Někde to bude hned, jinde až později, ale jednou k tomu přeci jen dojde. Kapka ale samozřejmě nikdy nemůže spadnout z listu tam, kde na něj původně dopadla. Místo toho steče k okraji a až odtud pokračuje dál. Nicméně předpokládali jsme, že v průměru zůstává na přibližně (plus minus jeden list) stále stejném místě v průmětu do vodorovné roviny.



Obr. 34: Poměr intenzity deště ve smrkovém lese ku počáteční intenzitě deště v závislosti na čase pro různé hodnoty parametru ρ při intenzitě $q_1 = 2 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$. Na rozdíl od předchozích grafů jsou zde ve funkci q' hodnoty K a Q nahrazeny za ρK a ρQ . Pro $\rho = 1,0$ platí $K = 3,5$ a $Q = Q^s = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

V úvahu připadají dva efekty způsobující horizontální proudění vody. Zaprvé, listy nemusí být uspořádány úplně náhodně. Jak již bylo zmíněno, smrký mají jasně viditelnou pravidelnou strukturu. U listnatých stromů by zase stačilo, kdyby se většina listů skláněla směrem od kmenu. Vliv takového uspořádání se odhaduje jen velmi těžko. V krajním případě (například kdyby všechny listy mířily od středu stromu) by na zem pod stromem teoreticky nedopadla ani jedna kapka, takže by někde přšelo hodně a jinde zase vůbec.

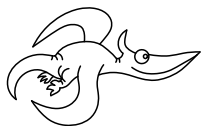
Druhý jev funguje i pro zcela náhodně směřující listy, vychází totiž z nerovnoměrné distribuce listů. Uvažujme dvě oblasti, jednu s velmi vysokým ρ , druhou s výrazně nižším. Dále předpokládejme, že oblasti spolu těsně sousedí a ρ se tak mění prakticky skokově. Každý list na rozhraní pošle veškerou vodu buď do své oblasti, nebo do té vedlejší. Celkové množství vody v oblasti, ze které list pochází, se v prvním případě zachová, ve druhém však klesne. Každý list na rozhraní je příležitostí, jak se z oblasti může dostat voda. Více listů v oblasti znamená více listů na rozhraní, tedy i větší pravděpodobnost odtoku vody.

Výsledkem bude nenulový horizontální tok vody ve směru záporného gradientu ρ . Jelikož ρ téměř vždy klesá s rostoucí vzdáleností od středu stromu, voda poteče tímto směrem. Přesný výpočet není nemožný, nicméně je mimo rámec této úlohy, jejíž vzorové řešení je už tak minimálně dvakrát delší, než by mělo být.

Dodejme ještě, že vliv obou jevů bude výrazně záviset na hustotě lesa. Ve velmi

řídkém lese budou mezi stromy velké prostory neboli oblasti s nulovým ρ . Stromy navíc budou mít listy i na stranách, což povede ke specifickému uspořádání, které bude dále směřovat vodu pryč ze středu stromů. Naopak v hustém lese budou koruny jednotlivých stromů splývat, což vytvoří téměř homogenní vrstvu, kterou jsme definovali v druhé kapitole. Celkový vliv obou efektů tu bude výrazně slabší.

Pro schovávání se před deštěm se tak mnohem více hodí diskrétní stromy než spojitý les.



Zadání experimentálních úloh

Úloha I.E ... Kdy už budou ty těstoviny?

14 bodů

Změřte závislost času začátku varu vody na jejím množství v nádobě. Měření opakujte několikrát pro alespoň pět různých objemů. Dbejte přitom na konzistentnost podmínek, zejména kritérium varu a počáteční teplotu vody, nádoby a sporáku. Výslednou závislost se pokuste vysvětlit. (řešení str. 112)

Úloha II.E ... řídký nebo hustý líh

13 bodů

Změřte závislost hustoty roztoku lihu ve vodě na jeho objemové koncentraci ve vodě. Zahaďte pro srovnání i měření čistého lihu a čisté vody.

Pozor na správné směšování lihu s vodou – nezapomínejte na to, že objem slité vody a lihu není přesně součtem jejich původních objemů. (řešení str. 116)

Úloha III.E ... až moc sladký čaj

12 bodů

Změřte stáčení polarizační roviny v závislosti na koncentraci cukru v roztoku.

(řešení str. 119)

Úloha IV.E ... užitečná mince

12 bodů

Změřte alespoň tři fyzikální vlastnosti nejmenší platné mince měny státu, ve kterém žijete. Makroskopické rozměry považujeme za jednu veličinu. Hodnotíme nejen přesnost měření a podrobnost popisu, ale i originalitu při výběru veličin.

(řešení str. 123)

Úloha V.E ... už to fičí

13 bodů

Změřte moment setrvačnosti válce (vůči jeho hlavní ose) a koule (vůči ose procházející jejím středem) tím, že je budete pouštět z nakloněné roviny.

(řešení str. 131)

Úloha VI.E ... minutovka

12 bodů

Sestavte zařízení, které dokáže co nejpřesněji odměřit jednu minutu. Při konstruování nesmíte pro kalibraci používat žádné měřidlo času. Po sestavení použijte stopky na změření toho, jak je vaše minuta přesná.

Bonus Odměřte deset minut.

(řešení str. 136)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I.E ... Kdy už budou ty těstoviny?

Změřte závislost času začátku varu vody na jejím množství v nádobě. Měření opakujte několikrát pro alespoň pět různých objemů. Dbejte přitom na konzistentnost podmínek, zejména kritérium varu a počáteční teplotu vody, nádoby a sporáku. Výslednou závislost se pokuste vysvětlit. *Dodův boj se sporákem na koleji.*

Jednoduchý model

Ohrev vody je činnost, ktorú bežný človek vykoná aj niekoľkokrát denne. Väčšinou chceme, aby voda zovrela čo najskôr, či už pri varení večerných cestovín, rannej kávy alebo čaju. Zjednodušene môžeme popísať ohrev vody pomocou kalorimetrickej rovnice

$$Q = mc\Delta T = mc(T_f - T_i) ,$$

kde Q je teplo dodané vode, m je hmotnosť vody, c je merná tepelná kapacita vody a ΔT je rozdiel počiatocnej T_i a koncovej teploty T_f , pričom predpokladáme, že pri koncovej teplote voda ešte nevrie. Dodané teplo sa dá jednoducho určiť ako súčin výkonu kanvice a času ako

$$Q = Pt = UIt = \frac{U^2}{R}t ,$$

kde sme využili vzťah pre výkon v elektrickom obvode pre súčiastku pod napätím U , ktorou tečie prúd I a má elektrický odpor R . Všetko teplo Q nezohrieva len vodu, no ešte musíme zohriať aj varné teleso, ktorému dodáme teplo

$$Q = C(T_f - T_i) ,$$

kde C je tepelná kapacita varného telesa. Ak by sme túto sústavu považovali za uzatvorenú (žiadne odparovanie vody) a tepelne izolovanú, výsledný vzťah pre čas varenia by po dosadení za hmotnosť vody z objemu $m = \rho V$ vyzeral

$$t = \frac{C(T_f - T_i) + \rho vc(T_f - T_i)}{\frac{U^2}{R}} . \quad (22)$$

Ak predpokladáme, že v priebehu varenia sa jednotlivé veličiny nemenia dostávame lineárnu závislosť času na objeme.

Postup merania a použité pomôcky

Meranie sme vykonávali pre rýchlovarnú kanvicu s objemom povoleným na ohrev vody medzi polovicou a celým litrom s deklarovaným výkonom $P = 1\,000\text{ W}$ s použitím vody z kohútika. Objem vody v kanvici sme merali s dvomi rôznymi hrnčkami, ktorých vlastný objem sme určili s pomocou kuchynských váh ako $V_1 = 145\text{ ml}$, $V_2 = 330\text{ ml}$, kde chybu merania objemu pre oba hrnčky počas experimentu odhadujeme na $\Delta V_0 = 10\text{ ml}$.

Pri prepočte sme vzhľadom na presnosť použili hustotu vody $\rho = 1,00\text{ g}\cdot\text{ml}^{-1}$. Čas sme merali od spustenia kanvice po automatické vypnutie kanvice vnútorným termostatom pomocou hodiniek s presnosťou $\Delta t = 1\text{ s}$.

Pred začiatkom merania sme napustili všetku potrebnú vodu do veľkého hrnca a počkali, kým sa jej teplota vyrovnala s teplotou v miestnosti. Teplota použitej vody a vzduchu bola priebežne monitorovaná a pohybovala sa v medziach od $T_i = 22\text{ }^\circ\text{C}$ do $T_f = 24\text{ }^\circ\text{C}$.

Pred začiatkom merania nebola kanvica aspoň pol dňa použitá, bola tak izbovej teploty. Z hrnca sme do nej naliali potrebný objem vody a tú nechali variť. Z kanvice sme po jej vypnutí vyliali vodu a hneď na to sme ju dôkladne vypláchli studenou vodou (s teplotou približne $19\text{ }^\circ\text{C}$). Následne sme do kanvice znovu napustili studenú vodu a nechali 10 minút stáť. Túto vodu sme vyliali a po ďalších piatich minútach státi na vzduchu sme začali ďalšie meranie.

Výsledky merania

Namerané hodnoty sú uvedené v tabuľke 4 spolu s poradovým číslom merania N v prvom stĺpci. Chyba merania objemu bola určená ako $\Delta V = \sqrt{n}\Delta V_0$, kde n je počet hrnčiek vody, ktoré tvorili daný objem.

Tab. 4: Namerané časy t potrebné na zovretie objemu V vody.

N	$\frac{V}{\text{ml}}$	$\frac{t}{\text{s}}$
7	145 ± 10	115
1	330 ± 10	208
4	475 ± 14	246
2	660 ± 14	316
5	805 ± 17	372
3	990 ± 17	472
6	$1\,135 \pm 20$	520

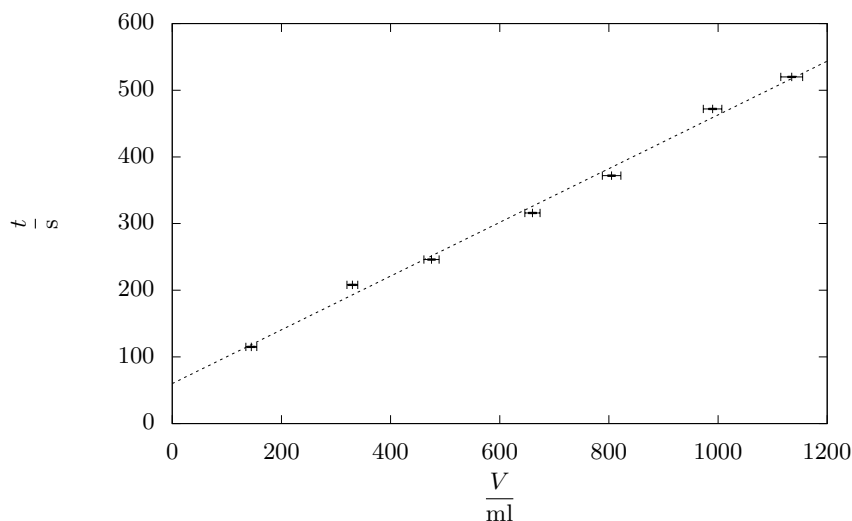
Túto závislosť sme následne preložili lineárnou závislosťou $t = a + bV$ a hodnoty koeficientov boli určené pomocou programu *Gnuplot* metódou najmenších štvorcov $a = (69 \pm 9)\text{ s}$, $b = (0,403 \pm 0,014)\text{ s}\cdot\text{ml}^{-1}$. Nameraná závislosť spolu s lineárnou závislosťou je vynesená v grafe 35.

Diskusia

Ak zohľadníme chyby merania, tak nameraná závislosť dobre zodpovedá lineárnemu fitu. Nepresnosť merania je daná, či už presnosťou merania objemu, ktorá by šla zlepšiť priamym vážením jednotlivých použitých objemov, ale aj použitím odmerného valca.

Chybu merania času, ktorá je daná presnosťou merania hodinkami, v skutočnosti prevyšuje chyba daná počiatočnou teplotou a teplotou na konci merania. Voda v čase zopnutia termostatu vreľa v celom objeme niekoľko sekúnd, v závislosti od množstva vody 5 – 15 s.

Ak prevedieme nepresnosť merania teploty, ktorá je asi jeden stupeň, na vplyv určenia času využitím (22) a zanedbaním tepla dodaného kanvici, tak máme $\delta t = t \frac{\Delta T}{T_f - T_i} \approx 0,013t$. Pri nami meraných časoch ide o hodnotu 1,5 – 7 s. Presnosť merania sa dá zvýšiť využitím digitálneho teplomera so sondou priamo vo varenej vode a detekciou bodu varu ako prechodu od narastajúcej teploty (v našom prípade lokálne blízko lineárneho priebehu) na konštantnú závislosť počas samotného varu. v tomto prípade je ale nutné do fitovania zahrnúť rôznu počiatočnú teplotu vody.



Obr. 35: Závislosť doby varenia vody na jej objeme.

Najproblematickejšie je kvantifikovať vplyv počiatočnej teploty kanvice. Vidíme, že teplo dodané kanvici zodpovedá asi $a/b = 150$ ml vody, neistota jeden stupeň v počiatočnej teplote tak bude zodpovedať asi dvom sekundám.

Máme za to, že naším postupom merania sme zabezpečili homogenitu počiatocnej teploty práve v tomto ráde. Určiť túto teplotu je však náročné, keďže časti kanvice z rozdielnych materiálov sa voči tepelným zmenám chovajú rôzne a majú tak jemne odlišné počiatocné teploty.

Na záver sa pozrime na javy, ktoré by sme museli zohľadniť pri presnejšom meraní, či inej konfigurácii. Vyjdeme z rovnice (22) a prediskutujeme jednotlivé veličiny.

- *Tepelná kapacita* je vo všeobecnosti závislá na teplote. v našom intervale teplôt sa merná kapacita vody pohybuje v rozmedzí $4\,180 - 4\,216 \text{ kJ}\cdot\text{kg}\cdot\text{K}^{-1}$. Vzhľadom na povahu merania – meriame vždy medzi dvomi konkrétnymi teplotami – by táto premenlivosť nemala mať priamy vplyv. Primárne nás zaujíma celkové teplo, ktoré vode musíme dodať, nie prerozdelenie tohto tepla do jednotlivých teplotných podintervalov.
- *Tepelný výkon zdroja* je taktiež závislý na teplote prostredníctvom závislosti elektrického odporu varného telesa. S rastúcou teplotou odpor klesá až do dosiahnutia stálej hodnoty pri pracovnej teplote. v prvých sekundách je tak výkon kanvice výrazne vyšší ako neskôr.
- *Tepelné straty* sú ďalším dôležitým javom. Jedná sa hlavne o straty *vedením tepla* z kanvice do okolia a *skupenské teplo* stratené pri *vyparovaní vody*. Oba tieto javy sú výraznejšie, čím je teplota vody vyššia. Môžeme preto očakávať, že v prípade väčších objemov vody, ktoré strávia na vyšších teplotách viac času budú straty vyššie a doba varenia sa výrazne predĺži. Extrémnym prípadom môže byť situácia, keď máme príliš slabý zdroj tepla a veľa vody, teda jej teplota sa ustáli na hodnote dokonca pod bodom varu. v tomto prípade nás „zachráni“ obvykle výpar vody pri teplote pod bodom varu – postupné znižovanie objemu vody posunie rovnováhu k vyšším teplotám. Vyparovanie vody však môže mať vplyv aj pri obvyklých situáciách – pri varení vody tak skončíme s menším množstvom vody ako sme začali. Tomuto vieme zabrániť použitím pokrievky, na ktorej vyparená voda spätne kondenzuje. Oproti odokrytému hrncu tak voda zovrie výrazne rýchlejšie. Zaujímavým prípadom sú tlakové hrnce – vzhľadom na uzatvorenosť sústavy dochádza počas varenia k zvyšovaniu tlaku a tak aj k posunu teploty varu k vyšším hodnotám a predĺženie doby potrebnej na zovretie – to však v tomto prípade obvykle nie je naším cieľom.

Záver

Premerali sme závislosť doby varenia vody na jej objeme v rýchlvarnej kanvici. Nameraná závislosť je lineárna, pričom asi minúta varenia je spotrebovaná na ohriatie samotnej kanvice. V našom prípade sme nepozorovali zmenu závislosti vplyvom tepelných strát pri vyšších objemoch.

¹Water - Specific Heat. The Engineering ToolBox [online]. Dostupné z: https://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-capacity-water-d_660.html

Úloha II.E . . . řídký nebo hustý líh

Změřte závislost hustoty roztoku líhu ve vodě na jeho objemové koncentraci ve vodě. Zařaďte pro srovnání i měření čistého líhu a čisté vody.

Pozor na správné směřování líhu s vodou – nezapomínejte na to, že objem slité vody a líhu není přesně součtem jejich původních objemů.

Karel si říkal, že by si účastníci mohli trochu čichnout.

Teorie

Vlastnosti směsí ethanolu a vody je dobré znát z mnoha praktických důvodů, například pro ředění pálenky či jiných alkoholických nápojů. Při práci s takovými roztoky si připomeňme, že je často považujeme za ideální. To znamená, že předpokládáme, že jejich mezimolekulové interakce mají konstatní vazebnou energii nezávislou na roztoku. Překvapivě mnoho roztoků se chová jako ideální, což nám výrazně zjednodušuje situaci.

Zmiňované mezimolekulové interakce hrají důležitou roli v mísení kapalin. Ty jsou mísitelné, pokud mají přibližně podobné mezimolekulové interakce se stejnými vazebnými energiemi. Např. hexan má mnohem více mezimolekulových interakcí než voda, proto se tyto dvě látky nemísí.

Mnoho nízkých alkoholů tvoří azeotropické směsi s vodou právě z tohoto důvodu. Hmotnost vody a ethanolu se při smíšení zachovává, objem nikoliv. Pokud však koncentrace vody klesne pod určitou mez, začnou molekuly alkoholu interagovat zase jen s alkoholovými molekulami, což znamená, že přestane platit předpoklad ideální kapaliny.

Situace se dá velmi zjednodušeně přirovnat k mísení písku a kamení. Písek zaplní volná místa mezi kameny čili výsledný objem nebude pouhým součtem objemů původně oddělených materiálů. Obdobně ethanol a voda mají různě veliké molekuly a dochází zde k podobnému jevu.

Možný postup měření

Pokus lze provést několika způsoby. Nám postačí kuchyňská váha, odměrný válec (nejlépe s rozlišením alespoň 1 ml), pipeta, denaturovaný líh a voda. Při měření budeme předpokládat, že použitý ethanol je čistý, a do výpočtu nezahrneme objem dalších příměsí. Na toto zjednodušení bychom ale budeme muset pamatovat při vyhodnocení výsledků experimentu.

Do odměrného válce s denaturovaným ethanolom budeme postupně přidávat vodu, přičemž budeme sledovat hmotnost a objem roztoku. Z naměřených hmotností, objemů a ze znalostí původního objemu čistého ethanolu můžeme spočítat jeho objemovou koncentraci v roztoku a hustotu roztoku jako

$$\varphi = \frac{V_{\text{líh}}}{V_{\text{směs}}}, \quad \rho = \frac{m_{\text{směs}}}{V_{\text{směs}}}.$$



Obr. 36: Pomůcky – zleva technický líh, kuchyňská váha s přesností na 1 g, odměrný válec s objemem 200 ml a rozlišením 2 ml a pipeta pro 10 ml s rozlišením 1 ml.

Při zpracování chyb vyjdeme z toho, že relativní chyby se sčítají kvadraticky.

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\rho_m}{\sigma_m}\right)^2 + \left(\frac{\rho_V}{\sigma_V}\right)^2},$$

kde $\sigma_m = 1$ g, $\sigma_V = 2$ ml a V označuje objem celé směsi. Obdobně pro chybu objemové koncentrace platí

$$\frac{\sigma_\varphi}{\varphi} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{V_{\text{směs}}}}{V_{\text{směs}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{V_{\text{líh}}}}{V_{\text{líh}}}\right)^2},$$

kde $V_{\text{líh}}$ označuje objem čistého lihu, v našem případě 50 ml.

Výsledky měření

V grafu na obrázku 37 jsou vyneseny spočítané hodnoty společně s těmi tabulkovými² pro teplotu 20 °C.

Diskuze

V grafu 37 je vidět, že hodnoty naměřené v domácích podmínkách se příliš neliší od těch tabulkových. Při vyhodnocování musíme brát v potaz, že sledovaná závislost je poměrně komplexní a náchylná na další neměřené či zanedbané parametry. Takovým parametrem je zřejmě i teplota. V některých případech mísení tekutin může docházet k teplotním změnám (např. při ředění kyselin se uvolňuje velké množství tepla). Podstatný vliv na závislost má přítomnost dalších látek v roztoku, příkladem mohou být různé příměsi v denaturovaném ethanolu (různé směsi uhlovodíku jako solventní nafta, petrolej, technický benzín, barviva a atd.). Podobně mohou hustotu ovlivňovat i rozpuštěné soli v použité kohoutkové vodě. V případě extrémně vysoké koncentrace solí v roztoku může dokonce dojít k oddělení fází. Tento

²Tabellen für das Labor – Ethanol-Water Mixtures – Steffen's Chemistry Pages. Steffen's Wissensblog – nützliches und unnützes Wissen [online]. Copyright © 2021 Steffen [cit. 02.10.2021]. Dostupné z: <https://wissen.science-and-fun.de/chemistry/chemistry/density-tables/ethanol-water-mixtures/>.

Tab. 5: Naměřené hodnoty objemů a hmotností, ze kterých jsme spočítali hustoty a objemové koncentrace roztoků včetně chyb.

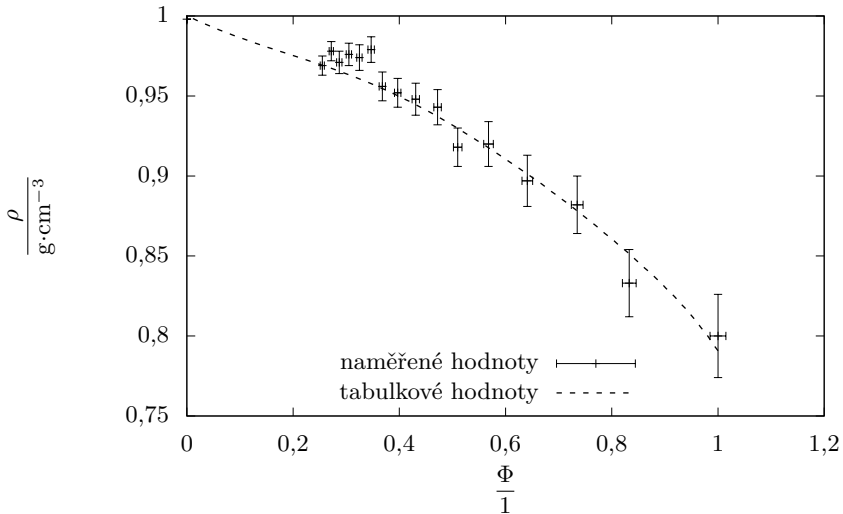
$\frac{V_{\text{H}_2\text{O}}}{\text{ml}}$	$\frac{V}{\text{ml}}$	$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{\varphi}{10^{-3}}$	$\frac{\sigma_\varphi}{10^{-3}}$	$\frac{\rho}{\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}}$	$\frac{\sigma_\rho}{\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}}$
0	50	40	1 000	40	0,80	0,04
10	60	50	833	8	0,83	0,03
20	68	60	735	7	0,88	0,03
30	78	70	641	6	0,90	0,03
40	88	81	568	6	0,92	0,02
50	98	90	510	5	0,92	0,02
60	106	100	472	5	0,94	0,02
70	116	110	431	4	0,95	0,02
80	126	120	397	4	0,95	0,02
90	136	130	368	4	0,96	0,02
100	144	141	347	3	0,98	0,02
110	154	150	325	3	0,97	0,01
120	164	160	305	3	0,98	0,01
130	174	169	287	3	0,97	0,01
140	184	180	272	3	0,98	0,01
150	196	190	255	3	0,97	0,01

proces se nazývá vysolování a využívá se v organické chemii. To naštěstí nebyl při našem experimentu problém.

Naopak to, že se část ethanolu a vody během měření odpaří, má na výsledek tak malý vliv, že jej můžeme zanedbat. Podobně nepodstatný vliv na měření má i tlak vzduchu.

Závěr

V rámci experimentu se nám podařilo naměřit hodnoty odpovídající těm tabulkovým. Došli jsme k závěru, že pro eliminaci nepřesností měření by bylo dobré používat náčiní s co nejvyšším rozlišením, pracovat s co nejčistším ethanolom a v prostředí se stabilní teplotou. Také by bylo vhodné použít destilovanou vodu namísto té kouhotkové pro maximální omezení dalších možných příměsí.



Obr. 37: Naměřená závislost hustoty roztoku lihu ve vodě na objemové koncentraci proložená tabulkovými hodnotami.

Úloha III.E . . . až moc sladký čaj

Změřte stáčení polarizační roviny v závislosti na koncentraci cukru v roztoku.

Káta nemá ráda slazený čaj.

Teorie

Světlo je součástí spektra elektromagnetického vlnění, které se skládá ze dvou na sebe kolmých složek – elektrického a magnetického pole. Ty jsou zároveň kolmé na směr šíření světla. Pro naše účely se zaměříme pouze na vektor elektrického pole. Pokud bychom sledovali paprsek světla vycházející ze zářivky nebo Slunce, zjistili bychom, že vektor el. pole zabírá libovolný směr kolmý na šíření záření. O takovém záření řekneme, že je nepolarizované, neboli že nemá preferovaný směr, ve kterém probíhají oscilace elektrického pole. Oproti tomu polarizované světlo má pouze jeden přesně udaný směr, ve kterém může elektrická část světla kmitat.

Získat polarizované světlo můžeme získat dvěma způsoby, buď zpolarizujeme nepolarizované světlo nebo použijeme zdroj polarizovaného světla. K polarizaci světla použijeme polarizační fólii, která byla řešitelům zaslána poštou. Polarizační fólie má tu vlastnost, že propuští pouze tu část záření, jejíž směr kmitání odpovídá směru polarizační roviny fólie. Pokud na polarizační fólii posvítíme světlem polarizovaným kolmo na směr polarizační roviny fólie, žádné světlo neprojde. Zdrojem monochromatického polarizovaného světla jsou pak např. lasery nebo většina LCD obrazovek.

Opticky aktivní látky umí stáčet rovinu polarizovaného světla, a to buď v kladném, či záporném směru. Úhel stočení je určen následujícím vztahem

$$\alpha = cl [\alpha] ,$$

kde l je dráha světla v roztoku, c je koncentrace chirální látky³ s jednotkami $\text{g}\cdot\text{ml}^{-1}$ a $[\alpha]$ je specifická rotace rozpuštěné látky.

Jednotkou specifické rotace je $[[\alpha]] = ^\circ\text{dm}^{-1}\cdot\text{ml}\cdot\text{g}^{-1}$. Jedná se o poměrně nezvyklou jednotku, jelikož žádné její složky nejsou uvedeny v základním tvaru. Důvodem je fakt, že se jedná o veličinu používanou hlavně v chemických oborech, kde se tyto konvence nedodržují a používají se jednotky, které jsou praktičtější pro experiment.

Měření

Základem našeho měření je laser, který by měl teoreticky vydávat již polarizované světlo o vlnové délce (638 ± 5) nm. Jelikož se nejedná o laser laboratorní kvality, můžeme očekávat, že záření, které vydává, bude pouze částečně polarizované, což napravíme vložením polarizační fólie mezi laser a kádinku. Světlo z laseru necháme dopadat kolmo na stěnu kádinky o objemu 1 l. V ní budeme připravovat vodný roztok sacharózy. Světlo dále prochází skrz druhou polarizační fólii a dopadá na terčík, kde měříme stočení úhlu polarizace. Při otáčení druhé polarizační fólií hledáme úhel, při kterém světlo kompletně nebo alespoň co nejvíce vymizí. Světlo v roztoku urazí vzdálenost 1 dm.

Jako první provedeme měření pouze s čistou vodou; začínáme s objemem $V_0 = 500$ ml a změříme rovinu polarizace polarizační fólie, neboli úhel, oproti kterému budeme odčítat další měření. Následně přidáme cukr o hmotnosti $m_c = 25$ g. Tím se hladina zvedne, ale jelikož laser vstupuje do kádinky horizontálně, nemění se vzdálenost, kterou paprsek musí projít. Změnu objemu a tedy i koncentrace roztoku nelze spočítat jako součet původního objemu a objemu přidaného krystalického cukru, vztah je složitější. Budeme tedy přímo měřit i změnu objemu po přidání cukru.

Po přidání cukru je potřeba směs dostatečně promíchat, aby se všechno rozpustil. Následně znovu změříme rovinu polarizace na terčíku pomocí polarizační fólie. Tento proces zopakujeme celkem 16krát, tudíž výsledná hmotnost cukru v roztoku je 400 g. Nyní odečteme úhel ze všech 16 měření. To můžeme udělat ručně pomocí úhlooměru nebo můžeme terčík naskenovat a změřit pomocí libovolného programu (např. GIMP 2). Určíme hodnotu, vůči které budeme výsledky odčítat, tedy buď vůči 1. měření (čistá voda) nebo vůči společné přímce (např. GIMP 2 měří nejbližší úhel vůči vodorovné nebo svislé čáře). My si zvolíme měření pomocí programu GIMP 2. Úhel budeme měřit s přesností na jednotky stupňů.

Naměřená data jsou vyznačena v tabulce 1.

kde m je hmotnost rozpuštěného cukru, V je celkový objem roztoku, c je vypočítaná koncentrace cukru a σ_c je absolutní odchylka koncentrace c . Hodnota α_0

³Stručně řečeno, chirální látky jsou ty látky, jejichž molekuly nejsou zrcadlově symetrické. Právě toto porušení symetrie má za důsledek stáčení polarizace světla procházejícího takovou látkou nebo jejím roztokem.

Tab. 6: Tabulka naměřených hodnot

$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{V}{\text{ml}}$	$\frac{c}{\text{g}\cdot\text{ml}^{-1}}$	$\frac{\sigma_c}{\text{g}\cdot\text{ml}^{-1}}$	$\frac{\alpha_0}{^\circ}$	$\frac{\alpha}{^\circ}$
0	500	0,000	0,000	68	0
25	520	0,048	0,002	65	2
50	540	0,093	0,003	63	5
75	560	0,135	0,003	61	7
100	570	0,175	0,004	59	9
125	590	0,214	0,004	56	11
150	600	0,250	0,005	52	16
175	620	0,285	0,005	49	19
200	630	0,317	0,005	46	21
225	650	0,346	0,006	44	23
250	670	0,373	0,006	42	25
275	690	0,401	0,006	39	28
300	700	0,429	0,006	37	30
325	720	0,455	0,007	35	33
350	730	0,479	0,007	33	34
375	750	0,503	0,007	31	37
400	760	0,526	0,007	29	38

označuje úhel, ve kterém jsme pozorovali minimální intezitu světla. Abychom zjistili o kolik stupňů se v každém měření stočila rovina polarizace (v tabulce α), odečteme od každého měření hodnotu naměřenou v prvním měření (tedy zjistíme jak se změnila rovina polarizace oproti měření s čistou vodou.). Rovina polarizace se stáčela proti směru hodinových ručiček, tedy fyzikálně řečeno v kladném směru. Úhel stáčení rostl s narůstající koncentrací.

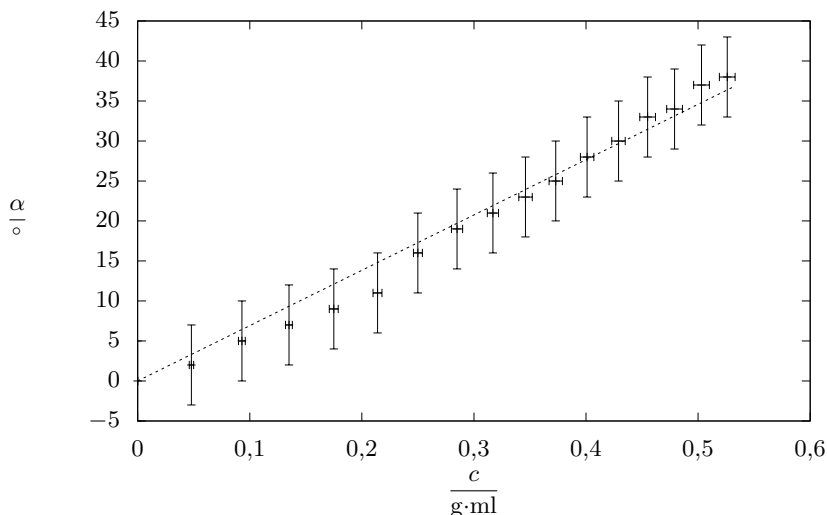
Podle teorie by úhel, o který se rovina polarizace stočí, měl být přímo úměrný koncentraci chirální látky. Naměřená data tedy budeme prokládat funkcí $\alpha(c) = kc$, kde parametr k odpovídá konstantě úměrnosti, tedy $k = l[\alpha]$. Získáme takto hodnotu $k = (75 \pm 2)^\circ \text{ml}\cdot\text{g}^{-1}$. Naměřená hodnota specifické rotace tedy bude $[\alpha] = (75 \pm 2)^\circ \text{dm}^{-1}\cdot\text{ml}\cdot\text{g}^{-1}$, protože délka dráhy paprsku v roztoku byla $l = 1 \text{ dm}$.

Chyby měření

Pro výpočet nejistoty měření koncentrace jsme využili přenosu chyb u dělení. Výsledná nejistota tudíž bude

$$\frac{\sigma_c}{c} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2},$$

kde $\sigma_m = 1 \text{ g}$ a $\sigma_V = 15 \text{ ml}$ odpovídají rozlišovací schopnosti použitých nástrojů. Pro chybu měření stočení roviny polarizace použijeme hodnotu $\sigma_\alpha = 5^\circ$. Úhломěr



Obr. 38: Závislost stočení polarizační roviny α na koncentraci c .

je sice schopen větší přesnosti, ale je třeba zohlednit i kvalitu polarizační fólie a faktu, že lidské oko, kterým pozorujeme intenzitu světla na terčičku, má pro naše účely velmi nízkou přesnost.

Diskuze

V průběhu experimentu je důležité, aby se jednotlivé části soustavy vůči sobě neposunuly. To by způsobilo systematickou chybu měření. Hlavním zdrojem nejistoty měření bylo určování okamžiku, kdy bylo polarizátorem blokováno nejvíce světla. To je způsobeno omezenou citlivostí lidského oka vůči malým rozdílům intenzity světla. Použitím detektoru světla nebo obyčejné fotodiody bychom odstranili systematickou při měření, čímž bychom získali přesnější výsledky. Poté do experimentu vstupují nepřesnosti způsobené měřicími přístroji – váhou a odměrným válcem.

Na internetu⁴ lze dohledat optickou chiralitu sacharózy $[\alpha]_D^{20} = 66^\circ \text{dm}^{-1} \cdot \text{cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$ pro teplotu 20°C a světlo vydávané sodíkovou výbojkou, tedy pro vlnovou délku 589 nm . Experiment probíhal za přibližně stejné teploty, ale použili jsme světlo o jiné vlnové délce, což také mohlo ovlivnit výsledek experimentu.

Závěr

V experimentu se nám podařilo ověřit, že mezi stočením polarizační roviny a koncentrací roztoku platí přibližně přímá úměra.

⁴<https://en.wikipedia.org/wiki/Sucrose>

Úloha IV.E . . . užitečná mince

Změřte alespoň tři fyzikální vlastnosti nejmenší platné mince měny státu, ve kterém žijete. Makroskopické rozměry považujeme za jednu veličinu. Hodnotíme nejen přesnost měření a podrobnost popisu, ale i originalitu při výběru veličin.

Karel chtěl, aby účastníci pozorovali peníze.

Teorie

V této úloze se budeme zabývat charakteristikami českých jednorozměrných mincí, pro mince jiné nominální hodnoty či měny by však měření probíhala obdobně.⁵ První důležitou částí úlohy je samozřejmě výběr veličin, které budeme měřit. Možností je velmi mnoho, ať už nás zajímají vlastnosti tepelné, elektrické, optické či mechanické. Mnoho z nich by však vyžadovalo použití nákladného laboratorního vybavení, které není samozřejmostí. V tomto řešení se proto zaměříme především na vlastnosti mechanické, a to konkrétně makroskopické rozměry a objem, hmotnost, hustotu a moment setrvačnosti. K těmto veličinám přidáme ještě jednu, jejíž měření je náročnější, leč stále proveditelné, a to tepelnou kapacitu.

Pro měření makroskopických rozměrů využijeme posuvného měřítka. Jedná se o měření přímé, o to více tedy budeme dbát na kvalitu jeho provedení. Při opakování měření použijeme různé mince – jednak se tak vyhneme chybě, kdy by na minci například byla vada či nečistota, ale také tím ověříme, že je rozumné mince považovat za identické. Zjišťovat budeme dva parametry, a to poloměr mince d a její tloušťku h . Můžeme předpokládat, že mince je váleček, jehož objem určíme pomocí vzorce

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h.$$

Víme však, že se nejedná o váleček dokonalý. Tento odhad tedy porovnáme s přímým měřením. To provedeme tak, že do odměrného válce nalijeme dobře definované množství vody, přisypeme co nejvíce mincí, zjistíme rozdíl ve výšce hladin a vypočítáme jejich objem. Vyšší přesnosti můžeme dosáhnout, máme-li k dispozici přesnou pipetu. V takovém případě nalijeme do válce vodu přesně po některou z rysek, přisypeme mince a pomocí pipety odebereme (a tím naměříme) vodu tak, aby sahala opět přesně po danou rysku. V tomto řešení budeme využívat právě metodu s pipetou.

Hmotnost mince změříme opět přímo pomocí váhy. Je dobré si pamatovat, že nemáme-li k dispozici přesnou váhu, můžeme vyšší přesnosti dosáhnout použitím většího množství mincí. Známe-li hmotnost i objem mince, dokážeme určit její hustotu jako

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

⁵Jistým předpokladem je tedy že je mince kulatá a homogenní – například dánské koruny mají uprostřed zpravidla díru a mince Eura nebo česká padesátikoruna jsou vyrobeny ze dvou různých materiálů, padesátipencová mince je výrazně sedmiúhelníková. . . U takovýchto mincí by bylo třeba upravit jisté předpoklady.

Další měřenou veličinou je moment setrvačnosti J , konkrétně moment setrvačnosti vzhledem k ose mince. Aby bylo měření v domácích podmínkách technicky proveditelné, provedeme na několika místech předpoklad, že mince je dokonalý válec. Hodnotu J zkusíme také vypočítat ze vzorce⁶

$$J = \frac{1}{2} m \frac{d^2}{4},$$

oba výsledky pak porovnáme. Využijeme k tomu metodu kyvů, kdy minci zavěsíme ve výšce l nad jejím hmotným středem, mírně vychýlíme a následně změříme dobu kyvu T . Moment setrvačnosti určíme jako⁷

$$J = ml \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - l \right).$$

Experiment provedeme tak, že na obvod mince kapkou lepidla z tavné pistole přilepíme nit, za kterou minci v požadované výšce pověsíme (výška l je rovna součtu délky nitě a poloměru mince – zde předpokládáme, že mince je válcem, jehož těžiště leží v jeho středu).

Poslední měřenou veličinou je tepelná kapacita. K jejímu zjištění potřebujeme kalorimetr, který není složité si doma vyrobit. Jde především o to, abychom měli co nejlépe odizolovanou nádobu o známé tepelné kapacitě, čehož lze dosáhnout jednoduše – vložíme malou zavařovací sklenici do izolačním materiálem (např. polystyrenem) vystlané PET lahve, jejíž vrchol jsme předtím odřízli jako jistou pokličku.⁸ Takto vyrobený kalorimetr musíme nejdříve zkalibrovat, tedy například do kalorimetru o známé (pokojové) teplotě t_{kalor} nalít dobře definované množství vody o jiné známé teplotě t_v a změřit, na jaké teplotě t_{end} se systém ustálí. Pro výpočet kapacity kalorimetru C lze použít vzorec

$$C = \frac{(t_{\text{end}} - t_v) c_v m_v}{t_{\text{kalor}} - t_{\text{end}}},$$

kde $c_v = 4182 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ je měrná tepelná kapacita vody a m_v množství vody do kalorimetru nalité. Při měření měrné tepelné kapacity mincí do kalorimetru nalijeme ohřátou vodu o teplotě t_v a hmotnosti m_v , změříme, na jaké teplotě t_K se celý systém ustálí, a následně do něj vložíme mince o známé teplotě t_m (nejjednodušší je vybrat teplotu pokojovou nebo teplotu $T = 0^\circ\text{C}$, které dosáhneme ve vodě s rozpouštějícím se ledem) a hmotnosti m_m . Opět změříme, na jaké teplotě t_{end} se systém ustálí, a výslednou měrnou tepelnou kapacitu mincí c_m pak určíme pomocí rovnice pro teplo (nesmíme zapomenout zahrnout všechny části systému)

$$c_m = \frac{(t_K - t_{\text{end}}) (C + c_v m_v)}{(t_{\text{end}} - t_m) m_m}.$$

⁶https://cs.wikipedia.org/wiki/Moment_setrvačnosti

⁷Tento vzorec byl odvozen z rovnice pro fyzické kyvadlo a Steinerovy věty.

⁸Velmi hezký návod lze nalézt např. na <http://fyzweb.cz/clanky/index.php?id=162>.

Výsledky měření

Naměřené hodnoty průměru d , výšky h , objemu V a hmotnosti m jsou uvedeny v tabulce 7. Ve sloupci pro objem jsou hodnoty naměřené pro dvacet mincí, hmotnost byla měřena pro deset mincí. V předposledním řádku je uvedena vypočtená průměrná hodnota, v posledním příslušná směrodatná odchylka.

Tab. 7: Naměřené hodnoty d , h a $10m$.

	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{h}{\text{mm}}$	$\frac{20V}{\text{cm}^3}$	$\frac{10m}{\text{g}}$
1	20,00	1,90	9,6	36,11
2	20,00	1,95	9,8	36,12
3	20,00	1,95	9,9	36,14
4	20,10	1,90	9,7	36,12
5	20,00	1,95	9,5	36,06
6	20,00	1,90	9,7	36,06
7	20,00	1,95	9,7	36,06
8	20,05	1,95	9,9	36,11
9	20,00	1,95	9,6	36,00
10	20,00	1,90	9,8	36,03
$E(x)$	20,02	1,93	9,72	36,08
$\text{var}(x)$	0,03	0,03	0,13	0,05

Všechny naměřené hodnoty jsou zatíženy chybou použitého měřidla. Pro průměr d a tloušťku h to je $\sigma_{\text{posuv}} = 0,05 \text{ mm}$, pro hmotnost $\sigma_{\text{váha}} = 0,01 \text{ g}$ a pro objem $\sigma_{\text{pipeta}} = 0,1 \text{ ml}$. Pro určení výsledné odchylky σ zkombinujeme tuto systematickou chybu σ_B s nalezenou směrodatnou odchylkou σ_A

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}.$$

Výsledné hodnoty průměru, tloušťky a hmotnosti jedné mince jsou

$$d = 20,02(6) \text{ mm},$$

$$h = 1,93(6) \text{ mm},$$

$$V = 0,486(8) \text{ cm}^3,$$

$$m = 3,608(5) \text{ g}.$$

Z naměřených hodnot d a h můžeme vypočítat hodnotu objemu pro dokonale válcovitou minci. Tato hodnota je

$$V_{\text{teor}} = 0,61(2) \text{ cm}^3.$$

Chyba byla vypočítána ze zákona pro šíření nejistot⁹ jako

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{2V}{d}\sigma_d\right)^2 + \left(\frac{V}{h}\sigma_h\right)^2}.$$

⁹Viz např. https://fykos.cz/_media/rocnik30/serial/serial3.pdf.

Tab. 8: Naměřené hodnoty padesáti period kyvu pro tři různé délky závěsu l .

	l_1	l_2	l_3
	$\frac{50T}{s}$		
1	27,05	20,86	15,79
2	27,07	20,84	15,15
3	26,97	20,63	15,90
4	26,84	20,57	15,73
5	26,92	20,67	16,01
6	26,88	20,59	
7	26,83	20,54	
8	26,82	20,52	
9	26,94	20,57	
10	26,83	20,71	
$E(x)$	26,9	20,7	15,7
$\text{var}(x)$	0,1	0,1	0,3

Pomocí naměřeného objemu a hmotnosti můžeme vypočítat hustotu mince

$$\rho = 7,4(1) \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}.$$

Chyba byla určena pomocí vzorce

$$\sigma_\rho = \sqrt{\left(\frac{\rho}{m}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\rho}{V}\sigma_V\right)^2}.$$

Při měření momentu setrvačnosti vůči hlavní ose byly použity tři délky závěsu (měřeno od středu mince k závěsnému bodu), a to $l_1 = 6,5$ cm, $l_2 = 3,9$ cm a $l_3 = 1$ cm. Se závěsy délek l_1 a l_2 bylo provedeno deset měření doby padesáti period, s nejkratším závěsem l_3 bylo z důvodu technické obtížnosti provedeno pouze pět měření. Všechny naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 8. Data jsou zatížena chybou odpovídající reakční době člověka, kterou zde odhadujeme na $\sigma_T = 0,2$ s (nepřesnost stopek $\sigma_{T_0} = 0,01$ s je vůči této hodnotě zanedbatelná). V posledních dvou řádcích jsou, stejně jako v předchozí tabulce, uvedeny průměrné hodnoty a příslušné směrodatné odchylky. Se započtením systematické chyby měřidla jsou doby jedné periody pro různé délky závěsu rovny

$$T_{l_1} = 0,538(4) \text{ s},$$

$$T_{l_2} = 0,413(5) \text{ s},$$

$$T_{l_3} = 0,314(8) \text{ s}.$$

Ze známých hodnot m , l a T nyní můžeme určit moment setrvačnosti J vůči hlavní ose mince. Tyto hodnoty a jim příslušející chyby jsou zapsány v tabulce 9. Chyby byly vypočteny pomocí vzorce

$$\sigma_J = \sqrt{\left(\frac{J}{m} \sigma_m\right)^2 + \left(2ml \frac{gT}{4\pi^2} \sigma_T\right)^2 + \left(\left(m \frac{gT^2}{4\pi^2} - 2ml\right) \sigma_l\right)^2}.$$

Očekáváme, že moment setrvačnosti by měl být jediná hodnota shodná pro různá

Tab. 9: Vypočtené hodnoty momentu setrvačnosti a jim příslušející chyby pro různé délky závěsu.

l cm	J kg·m ²	σ_J kg·m ²
6,5(1)	$1,64 \cdot 10^{-6}$	$3,4 \cdot 10^{-7}$
3,9(1)	$4,76 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$
1,0(1)	$5,25 \cdot 10^{-7}$	$4,7 \cdot 10^{-8}$

měření, vypočteme jej proto jako aritmetický průměr všech získaných výsledků. Chybu odhadneme jako kombinaci aritmetického průměru chyb a směrodatné odchylky. Výslednou hodnotou je

$$J = 9(7) \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Tuto hodnotu můžeme také vypočítat pomocí modelu mince = válec, v tom případě je moment setrvačnosti roven

$$J_{\text{teor}} = 1,8(1) \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Poslední měřenou veličinou je měrná tepelná kapacita. Podle návodu si sestavíme kalorimetr, který zkalibrujeme.

Naměřené hodnoty $t_{\text{k calor}}$, t_v , t_{end} , m_v a z nich vypočtené hodnoty C jsou uvedeny v tabulce 10. Nepřesnost použitého odporového teploměru je $\sigma_t = 0,1^\circ\text{C}$, nepřesnost váhy je pro účely tohoto měření velmi malá a můžeme ji proto zanedbat. Výpočet chyb se nám velmi zjednoduší, budeme-li rozdíly $(t_{\text{end}} - t_v)$ a $(t_{\text{k calor}} - t_{\text{end}})$ považovat za přímo měřené veličiny s nejistotou¹⁰ $\sigma_{\Delta t} = \sqrt{0,02}^\circ\text{C} \doteq 0,14^\circ\text{C}$. Chybu pak určíme jako

$$\sigma_C = C \sigma_{\Delta t} \sqrt{\left(\frac{1}{t_{\text{end}} - t_v}\right)^2 + \left(\frac{1}{t_{\text{k calor}} - t_{\text{end}}}\right)^2}.$$

Tepelnou kapacitu kalorimetru určíme jako aritmetický průměr všech výsledků. Ten je roven

$$C = 59(2) \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}.$$

¹⁰Tato nejistota vznikne jako $\sigma_{\Delta t} = \sqrt{2}\sigma_t$.



Obr. 39: Fotografie rozloženého kalorimetru. Vlevo – tepelná izolace stojící na váze, uprostřed – nádobka kalorimetru, vpravo – izolované víko s kuchyňským teploměrem.

Tab. 10: Naměřené hodnoty pro kalibraci a z nich vypočtená kapacita kalorimetru.

$\frac{t_{\text{kalor}}}{\text{°C}}$	$\frac{t_v}{\text{°C}}$	$\frac{t_{\text{end}}}{\text{°C}}$	$\frac{m_v}{\text{g}}$	$\frac{C}{\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$	$\frac{\sigma_C}{\text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$
21,3	61,0	50,4	39,70	60,48	0,85
21,3	57,8	49,2	43,81	56,47	0,96
21,3	55,5	47,7	48,19	59,54	1,1
21,3	52,5	45,7	48,28	56,27	1,2
21,3	50,0	43,3	47,28	60,22	1,3

Uvedená chyba je určena jako kombinace průměru jednotlivých chyb a směrodatné odchylky. Nyní již máme vše potřebné k tomu, abychom mohli určit měrnou tepelnou kapacitu mincí. K měření bylo využito vždy dvacet mincí, jejich hmotnost byla $m_m = 72,16$ g (tato hodnota je v rámci výpočtu chyby považována za přesnou). Naměřené hodnoty t_K , t_m , t_{end} , m_v a vypočtené hodnoty c_m jsou uvedeny v tabulce 11. Chyby byly vypočteny pomocí vzorce

$$\sigma_{c_m} = \sqrt{\left(\frac{c_m}{t_K - t_{\text{end}}}\sigma_{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{c_m}{t_{\text{end}} - t_m}\sigma_{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{(t_K - t_{\text{end}})}{(t_{\text{end}} - t_m)m_m}\sigma_C\right)^2}.$$

Výslednou hodnotu a její nejistotu získáme stejně jako v případě tepelné kapacity kalorimetru, tedy

$$c_m = 490(40) \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}.$$

Tab. 11: Naměřené hodnoty výpočet měrné tepelné kapacity mincí.

t_K °C	t_m °C	t_{end} °C	m_v g	c_m J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹	σ_{c_m} J·K ⁻¹
50,5	22,1	47,1	40,45	429	18
47,5	22,1	44,2	43,08	494	22
51,5	22,2	47,3	39,47	519	18
60,2	22,3	55,1	38,55	474	14
59,2	22,5	54,3	39,25	476	14
56,8	22,5	51,5	37,32	544	16
56,0	22,6	51,5	41,10	497	16
54,2	22,6	50,0	41,04	489	17
55,0	22,7	50,1	36,71	526	16
51,6	22,8	47,9	41,13	471	19

Diskuse

Při měření makroskopických rozměrů neočekáváme výraznější chyby nebo rozdíly mezi mincemi – to, že jsou nerozlišitelné, je jedna ze základních vlastností mincí. Toto jsme také měřením ověřili – rozdíly se pohybují maximálně v řádu jedné desetiny milimetru, mohou být způsobeny například nečistotou nebo lehkou korozí některé z mincí. Obdobná situace nastává u hmotnosti, rozptyl naměřených hodnot je zde také v rámci jedné desetiny gramu, což mohou zapříčínovat stejné faktory. Náš předpoklad, že všechny mince jsou navzájem stejné a tedy nezáleží na tom, kterou konkrétní minci k měření využijeme (platí zejména pro moment setrvačnosti, ostatní veličiny měříme pro větší množství mincí), je tedy oprávněný. Naměřené hodnoty můžeme porovnat s tabulkovými hodnotami uváděnými Českou národní bankou¹¹ *materiál ocel galvanicky pokovená niklem, magnetická, kulatá, hmotnost 3,6 g, průměr 20 mm, síla 1,85 mm, hrana vroubkovaná, 80 vroubků, tolerance v obsahu niklu – 0,5 %, v hmotnosti ±0,15 g, v průměru ±0,1 mm a v síle ±0,13 mm*. Vidíme, že hmotnost i průměr odpovídají velmi dobře, při měření tloušťky pak muselo dojít ke drobné systematické chybě, ať už vlivem vadného měřidla či rozlišovacích schopností experimentátora. Je nepravděpodobné, že by všechny měřené mince (každé měření probíhalo na jiné minci) byly znečištěné či zkorodované stejným způsobem.

Prvních větších nepřesností si můžeme všimnout při měření objemu. Jedním z problémů je malé množství použitých mincí – bylo-li by jich použito například 100, byl by jejich objem pětkrát větší, což by nám umožnilo měřit pětkrát přesněji (tj. s pětkrát menší chybou). Další problém spočívá v tom, že voda smáčí stěny skleněné nádoby, a určení přesné výšky hladiny je proto obtížné. Tento problém lze do jisté míry omezit použitím užší nádoby, neboť v té se výška hladiny s objemem mění výrazněji. V neposlední řadě pak na mincích mohou zůstat při-

¹¹<https://www.cnb.cz/cs/bankovky-a-mince/mince/1-kc/>

chycené vzduchové bublinky nebo naopak kapky vody z předešlého měření, což též ovlivňuje celkovou změnu objemu. Až zarážející rozdíl panuje mezi změřenou hodnotou $V = 0,486(8) \text{ cm}^3$ a hodnotou vypočtenou s předpokladem, že mince je válec, $V_{\text{teor}} = 0,61(2) \text{ cm}^3$. Pravděpodobně to ukazuje na to, že okraje mince jsou poměrně vystouplé z jejího profilu a tloušťka středu mince je asi o 1/5 menší, představa dokonalého válce tedy není zcela oprávněná. Co se týče hustoty, i přes nepřesnosti měření jsme získali hodnotu blízkou hustotě oceli $\rho_o = 7,8 \text{ g}\cdot\text{cm}^3$. Rozdíl může být kromě chyb v měření způsoben i malým množstvím niklu, jímž je mince potažena.

Aproximaci dokonalého válce neodpovídá ani moment setrvačnosti. Výsledná naměřená hodnota $J = 9(7) \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ se výrazně liší od hodnoty pro válec s hmotností a rozměry mince, $J_{\text{teor}} = 1,8(1) \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, a to i přes značně vysokou nejistotu experimentálního výsledku. Odhad je nižší než experimentální hodnota, což znamená že možným vylepšením by mohl být model sestavený ze dvou částí – středového válce a rozšířeného okraje tvaru mezikružjí. K jeho výpočtu však nemáme dostatek informací, nedokážeme uspokojivě rozdělit hmotnost těchto dvou částí. Dále vidíme, že hodnoty naměřené pro různé délky závěsu se též poměrně výrazně liší. To může znamenat velkou chybu měření, která mohla nastat hned několika způsoby. Jednak jde o samotné počítání kyvů, kde mohl lidský faktor selhávat, neboť kyvy probíhaly velmi rychle, kvůli čemuž bylo obtížné neudělat chybu v jejich počítání. Navíc se často do pohybu mince dostala jistá forma rotace kolem svislé osy, která výsledky mohla výrazně ovlivnit (obecně při pootočení měříme moment setrvačnosti vůči jiné ose, vždy kolmé ke směru pohybu). Této rotaci nešlo úplně zamezit – pokud bychom použili tužší lanko, již bychom nemohli zanedbat jeho hmotnost tak jako u nitě. Jak bylo zmíněno, k připevnění mince k niti bylo použito lepidlo, konkrétně z tavné pistole. Jeho vliv na výsledky byl zanedbán, neboť jeho hmotnost (získaná jako rozdíl hmotností mince před nalepením a po nalepení) byla typicky 0,01 – 0,02 g, což je v poměru s ostatními nepřesnostmi měření nicotná hodnota.

Při kalibraci kalorimetru je dobré si uvědomit, že neměříme pouze tepelnou kapacitu nádoby, ale také kvantifikujeme běžné tepelné ztráty, které soustava vykazuje (odpařování vody, ohřev dalších částí kalorimetru, tepelnou kapacitu teploměru). Pokud tedy samotné měření provedeme podobným způsobem jako kalibraci (tj. obdobné časové prodlevy u stejných úkonů, stejná doba na ustálení teploty), do značné míry tím vliv těchto nežádoucích efektů potlačíme. Pro zajímavost, teoretická hodnota tepelné kapacity skleněné nádoby používané jako vnitřní nádoba kalorimetru je asi $52 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$, naměřená hodnota $C = 59(2) \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ tak dává smysl, neboť kvůli ostatním tepelným ztrátám očekáváme hodnotu právě o něco vyšší než samotnou tepelnou kapacitu nádoby. Při měření bychom pravděpodobně dosáhli přesnějších výsledků při použití většího množství mincí (změna teploty by byla výraznější a méně by se projevila např. nejistota teploměru i menší tepelné ztráty). Celkově však dostáváme hodnotu blízkou hodnotě měrné tepelné

kapacity oceli $c_o = 450 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, ze které by mince měly být vyrobeny.¹² Mince jsou galvanicky pokoveny niklem, ten však kvůli svému malému množství nebude mít na tepelnou kapacitu velký vliv.

Závěr

Experimentálně byly změřeny makroskopické rozměry a základní fyzické charakteristiky mince

$$\begin{aligned}d &= 20,02(6) \text{ mm} , \\h &= 1,93(6) \text{ mm} , \\V &= 0,486(8) \text{ cm}^3 , \\m &= 3,608(5) \text{ g} .\end{aligned}$$

Dále byl u mince změřen moment setrvačnosti vůči její hlavní ose

$$J = 9(7) \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

a měrná tepelná kapacita

$$c_m = 490(40) \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} .$$

Úloha V.E . . . už to fičí

Změřte moment setrvačnosti válce (vůči jeho hlavní ose) a koule (vůči ose procházející jejím středem) tím, že je budete pouštět z nakloněné roviny.

Karel si říkal, že by účastníci mohli koulet.

Teória

Pri pohybe telesa v tiažovom poli prebieha premena potenciálovej tiažovej energie na iné formy energie. V našom prípade budeme sledovať dynamiku telies. Všetky telesá charakterizuje tzv. moment zotrvačnosti I , teda charakteristika rotácie telesa voči určitej ose. Pri pohybe valca, resp. gule po naklonenej rovine pri nenulových rozmeroch a hmotnosti bude prítomná kinetická a rotačná energia telesa. V prípade, že teleso pustíme pri nulovej rýchlosti a zároveň neprešmykuje, tak pre vzťah energie môžeme v tomto priblížení písať

$$mg\Delta h = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} ,$$

kde Δh je prekonaný výškový rozdiel, v rýchlosť ťažiska telesa a ω uhlová rýchlosť otáčania okolo danej osi.

V odstavci vyššie sme vyslovili podmienku na to, aby teleso neprešmykovalo na našej naklonenej rovine, a teda aby sa celý čas pohybovalo valivým pohybom. Táto

¹²Samozrejme, ocel je sohrnným názvom pro mnoho různých slitin železa obohaceného o uhlík, hodnota je tedy pouze orientační, neboť přesné poměry neznáme.

podmienka pre jedno otočenie okolo vlastnej osi dáva dokopy rýchlosť v a uhlovú rýchlosť ω . Musí tak byť splnená rovnica

$$v = \omega r,$$

a to v oboch prípadoch, kde r predstavuje polomer gule a v prípade valca je r polomer podstavy.

V domácich podmienkach však vieme rýchlosť objektu merať pomerne obtiažne. Avšak vzdialenosť (resp. dĺžku) naklonenej roviny a čas, za ktorý sa dostane teleso z jedného konca na druhý vieme merať pomerne jednoducho. V prípade homogénneho valca a gule tak popisujeme ich pohyb rovnomerne zrýchleným pohybom. Pre prejdenu dráhu, resp. dĺžku s naklonenej roviny s nulovou počiatočnou rýchlosťou máme $s = \frac{1}{2}at_f^2$, kde a je zrýchlenie, ktorým teleso zrýchluje a t_f čas, za ktorý teleso prejde po rovine. Pre maximálnu dosiahnutú rýchlosť na konci roviny platí

$$v_f = at_f = \frac{2s}{t_f}.$$

S využitím podmienky valivého pohybu a dosadením vzorcov pre tento rovnomerne zrýchlený pohyb dostávame

$$2mg\Delta h = mv_f^2 + \frac{Iv_f^2}{r^2} = \left(\frac{2s}{t_f}\right)^2 \left(m + \frac{I}{r^2}\right),$$

odkiaľ si vyjadríme moment zotrvačnosti ako

$$I = mr^2 \left(\frac{gt_f^2 \Delta h}{2s^2} - 1 \right).$$

Meranie

Ako naklonenú rovinu sme zobrali hladkú drevenú dosku. Ako prvé sme odmerali rozmery valca. Priemer valca sme odmerali pomocou posuvného meradla a odtiaľ sme určili jeho polomer ako $r_V = (13,27 \pm 0,05)$ mm. Výška valca bola $H_V = (75,25 \pm 0,10)$ mm. Pomocou digitálnych váh sme odmerali jeho hmotnosť ako $m_V = (25,5 \pm 0,1)$ g.

Pásovým meradlom sme určili dĺžku naklonenej roviny. Výsledná hodnota bola $s_V = (44,9 \pm 0,2)$ cm. Ako hodnotu tiažového zrýchlenia sme brali hodnotu $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Drevenú dosku sme podložili malými drevenými hranolmi aby sme dosiahli nenulovú hodnotu Δh . Túto hodnotu sme znova odmerali pomocou posuvného meradla. Merali sme pri každom pustení telesa čas t_f a výsledky sú v tabuľke 12. Štatistickú chybu jedného merania času sme určili ako $\sigma_t = 0,20$ s podľa reakčného času človeka.

Tab. 12: Meranie času pre prejdeie valca po naklonenej rovine $\Delta h = (12,5 \pm 0,3)$ mm.

Meranie	$\frac{t_f}{s}$	Meranie	$\frac{t_f}{s}$
1	2,31	11	2,26
2	2,15	12	2,17
3	2,37	13	2,44
4	2,18	14	2,25
5	2,43	15	2,13
6	2,18	16	2,21
7	2,40	17	2,30
8	2,34	18	2,37
9	2,16	19	2,17
10	2,27	20	2,13

Priemerný čas tak bol $t_v = (2,26 \pm 0,10)$ s, kde sme ako chybu uviedli štatistickú odchýlku súboru, ktorá bola mierne menšia ako reakčná doba pozorovateľa, čo je jedným zo zdrojov štatistickej chyby.

$$\sigma_I = I \sqrt{\frac{\left(\frac{2\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta h}}{\Delta h}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_s}{s}\right)^2}{\left(\frac{gt_f^2 \Delta h}{2s^2} - 1\right)^2} + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_r}{r}\right)^2}$$

Pre valec tak máme hodnotu momentu zotrvačnosti

$$I_v = (2,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Pre idelizovaný valec s hmotnosťou M a polomerom R je moment zotrvačnosti popísaný rovnicou

$$I_{vId} = \frac{1}{2}MR^2,$$

kde po dosadení našich nameraných hodnôt dostaneme $I_{vId} = (2,25 \pm 0,02) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

Odchýlku sme vypočítali ako $\sigma_{Id} = \frac{1}{2}MR^2 \sqrt{\left(\frac{2\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2}$.

V druhom prípade sme použili guľu z tvrdej gumy. Počiatok sme mali mierne posunutý a teda pre dĺžku dráhy máme $s_g = (44,1 \pm 0,2)$ cm. Polomer sme odmerali pomocou posuvného meradla a jeho hodnota bola $r_g = (21,32 \pm 0,05)$ mm. Hmotnosť sme zmerali opäť pomocou digitálnych váh a táto hodnota bola $m_g = (37,4 \pm 0,1)$ g. Postupovali sme rovnako ako v predchádzajúcom prípade a púšťali sme guľu po naklonenej rovine a merali sme čas, za ktorý sa dostane na spodný koniec. Použili sme tú istú konfiguráciu. Namerané časy sú v tabuľke 13.

Priemerný čas tak bol $t_g = (2,14 \pm 0,11)$ s, kde sme ako chybu uviedli štatistickú odchýlku súboru dát, ktorá bola iba mierne menšia ako reakčná doba pozorovateľa. Pre guľu tak máme hodnotu momentu zotrvačnosti

$$I_g = (7,5 \pm 1,8) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Tab. 13: Meranie času pre prejdeie gule po naklonenej rovine $\Delta h = (12,5 \pm 0,3)$ mm.

Meranie	$\frac{t_f}{s}$	Meranie	$\frac{t_f}{s}$
1	2,19	11	2,21
2	2,03	12	2,31
3	2,12	13	2,14
4	2,01	14	2,15
5	2,04	15	2,07
6	2,35	16	2,04
7	2,31	17	1,97
8	2,10	18	2,02
9	2,18	19	2,22
10	2,15	20	2,23

Pre idealizovanú guľu s hmotnosťou M a polomerom R je moment zotrvačnosti popísaný rovnicou

$$I_{\text{gId}} = \frac{2}{5}MR^2.$$

kde po dosadení našich nameraných hodnôt dostaneme $I_{\text{gId}} = (6,80 \pm 0,04) \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

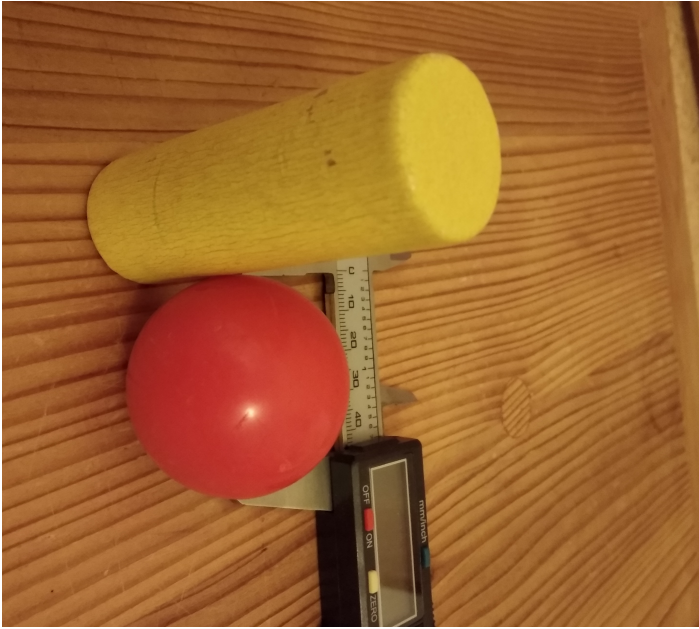
Odchýlku sme vypočítali ako $\sigma_{\text{Id}} = \frac{2}{5}MR^2 \sqrt{\left(\frac{\Delta\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2}$.

Diskusia

V rámci merania sme počítali s vicerými idealizáciami a bolo prítomných viacero faktorov ovplyvňujúcich presnosť merania. Vychádzali sme zo ZZE, ktorý neobsahoval počítanie s energetickými stratami. Zanedbávali sme odporovú silu vzduchu a rovnako sme zanedbali aj valivý odpor. Povrchy neboli dokonale hladké, čo malo za následok absorpciu energie a mohlo to tak systematicky posunúť počítanú hodnotu momentu zotrvačnosti smerom nahor. Taktiež objekty boli vyrobené z dreva a gumy, čo nie sú ideálne materiály pre minimalizáciu odporu.

V oboch prípadoch sme predpokladali rovnomerné zrýchľovanie telies. To však môže platiť iba v prípade dokonalo hladkého povrchu a homogénneho rozloženia hmoty v telese. Taktiež povrchy telies mali takmer určite isté nerovnosti. V prípade valčeka bola na jeho povrchu istá vrstva farby, ktorá je z iného materiálu než samotný drevený valček. Taktiež hrany podstav neboli dokonale ostré ale skôr zaoblené, čo môže znamenať menšiu skutočnú hodnotu momentu zotrvačnosti. V prípade gule je možné že nemusela byť dokonale tvarom symetrická. Systematickú chybu stopiek sme zanedbávali oproti schopnosti registrovať bod dosiahnutia konca roviny. Meranie by sa vedelo spresniť detailnejšou analýzou pomocou spracovania videom alebo väčším množstvom pokusov.

Pre porovnanie nameraných hodnôt sme použili model, dokonalého valca a gule. V oboch prípadoch sú namerané hodnoty od nami odhadnutých posunuté smerom



Obr. 40: Použité pomôcky: Valec a guľa.

nahor ale zároveň v rámci nami vypočítanej odchýlky. Posunutie tejto hodnoty smerom nahor nie je prekvapivé a taktiež mierne očakávané kvôli stratám energie pri pohybe. Naše odhady majú odchýlku v oboch prípadoch menšiu ako 1%. Taktiež sme zanedbávali ich neideálny tvar avšak odhadujeme, že nám to dáva dobrý odhad pre skutočnú hodnotu momentov zotrvačnosti, ktoré ale nepoznáme.

Pre určenie parametru naklonenej roviny Δh sme predpokladali, že všade v miestnosti je dokonale rovná podlaha. Preto sme mierne nadhodnotili jej chybu $\sigma_{\Delta h}$ oproti presnosti posuvného meradla, aby zodpovedala prípadným nerovnostiam na vyššie uvedené hodnotu. Jej relatívna chyba je ale dosť malá oproti ostatným veličinám, čo nám ospravedľňuje tento krok a celkovo nám príliš nezmení finálnu hodnotu odchýlky. Prípadné naindukovanie náboja na povrchu sme zanedbávali.

Záver

Namerali sme momenty zotrvačnosti valca a gule, ktoré sme mali k dispozícii a porovnali ich s odhadom podľa jednotlivých tvarov. Merali sme časy, za ktoré telesá prejdú po naklonenej rovine a zaznamenali ich do tabuľky 1 a 2. Pre valec sme namerali hodnotu

$$I_v = (2,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 .$$

Porovnali sme to s odhadovanou hodnotou

$$I_{\text{vId}} = (2,25 \pm 0,02) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2 .$$

Pre guľu sme namerali

$$I_{\text{g}} = (7,5 \pm 1,8) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2 .$$

Ďalej sme tiež porovnali s odhadovanou hodnotou

$$I_{\text{gId}} = (6,80 \pm 0,04) \cdot 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2 .$$

Diskutovali sme faktory, ktoré vstupovali do modelu a výpočtov.

Úloha VI.E ... minutovka

Sestavte zariadení, ktoré dokáže čo najpresnejšie odmerať jednu minútu. Pri konštruovaní nesmíte pro kalibráciu používať žiadne meridlo času. Po sestavení použijete stopky na zmeranie toho, ak je vaša minúta presná.

Bonus Odměřte deset minut.

Matěj vždy dorazí na nádraží maximálně minútu před odjezdem vlaku. A to i když má vlak půl hodiny zpoždění.

Kyvadlo teoreticky

Asi najprirodzenejšia voľba je merať počet kyvů kyvadla. Tento spôsob jsme vybrali, pretože je oproti jiným způsobům lehce realizovatelný v domácím prostředí a lze ho jednoduše teoreticky popsat.

Pro jednoduchost se budeme snažit přiblížit se co nejbliže k modelu matematického kyvadla, tj. k hmotnému bodu na nehmotném závěsu délky¹³ $l \doteq 89 \text{ cm}$. Jako závaží použijeme petangovou kouli o poloměru $r \doteq 3,6 \text{ cm}$ a hmotnosti $m \doteq \doteq 0,71 \text{ kg}$.

Začneme s druhou impulsovou větou

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(ml^2\dot{\theta})}{dt} = ml^2\ddot{\theta},$$

kde θ je okamžitá úhlová výchylka kyvadla od svislého směru (dvě tečky nad proměnnou značí druhou časovou derivaci této proměnné) a M je celkový moment síly působící na kyvadlo. Na kyvadlo působí celkem tři síly – tíhová, odporová a síla závěsu, která ale nevstupuje do výpočtu momentu sil. Provedeme-li rozbor sil, zjistíme, že moment síly vytvořený tíhovou silou je roven

$$M_g = -mgl \sin(\theta) .$$

Budeme uvažovat pouze malé výchylky do 5° , lze tedy použít aproximaci $\sin(x) \approx \approx x$. S odporovou silou to je složitější. O tom, jaký vzorec použít, rozhoduje, zda

¹³Závěs má délku 85 cm, ale připočteme ještě poloměr koule r , takže se po zaokrouhlení dostaneme na 89 cm.

je kolem kyvadla laminární nebo turbulentní proudění vzduchu. To lze přibližně určit výpočtem Reynoldsova čísla

$$\text{Re} = \frac{\rho du}{\mu} = \frac{\rho \cdot d \cdot \sqrt{2gl(1 - \cos \theta_0)}}{\mu} \doteq 1300,$$

kde $\rho \doteq 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je hustota vzduchu, d je tzv. charakteristický rozměr tělesa, který shora odhadneme průměrem koule $2r$, u je rychlost proudění, kterou dopočítáme pomocí zákona zachování energie.¹⁴ Dále $\mu \doteq 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ je dynamická viskozita vzduchu a $\theta_0 \doteq 5^\circ$ je počáteční výchylka.

Reynoldsovo číslo je bezrozměrná veličina, která nám pomáhá předvídat způsob proudění. Nízké Reynoldsovo číslo implikuje laminární proudění, vysoké naopak turbulentní. Jako hraniční hodnota se uvádí $\text{Re} = 2000$, pracujeme tedy s laminárním prouděním a odporovou sílu můžeme počítat pomocí Stokesova zákona

$$F_o = 6\pi\mu r v = 6\pi\mu r l \dot{\theta}.$$

Všimněme si, že odporová síla bude vždy působit kolmo na směr závěsu. Velikost momentu síly vyvolaného touto silou tedy spočteme jako

$$M_o = F_o l = 6\pi\mu r l^2 \dot{\theta}.$$

Nyní sestavíme pohybovou rovnici

$$M = M_o + M_g, \\ ml^2 \ddot{\theta} = -6\pi\mu r l^2 \dot{\theta} - mgl\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{6\pi\mu r}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Dostali jsme rovnici harmonického oscilátoru s tlumením. Ta obecně nemá jednoznačné řešení, pokud neuvedeme počáteční podmínky. Budeme uvažovat, že je kyvadlo v čase $t = 0 \text{ s}$ v klidu, vychýleno o úhel θ_0 od svislého směru. Za těchto podmínek dostaneme jednoznačné řešení¹⁵

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{3\pi\mu r}{m} t} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{3\pi\mu r}{m}\right)^2} t\right).$$

Kyvadlo tedy bude kmitat kolem své stabilní polohy podle očekávání, avšak amplituda kmitů bude vlivem tření exponenciálně klesat. Dosadme do exponenciály čas deseti minut

$$e^{-\frac{3\pi\mu r}{m} \cdot 600 \text{ s}} \doteq 99,5 \%$$

Můžeme vidět, že během desetiminutového měření se amplituda vlivem odporových sil prostředí prakticky nezmění. Dále po dosazení zjistíme, že

$$\frac{g}{l} \gg \left(\frac{3\pi\mu r}{m}\right)^2.$$

¹⁴ Opět bereme maximální rychlost, kterou může kyvadlo mít.

¹⁵ Pokud sami neumíte řešit diferenciální rovnice, můžete na to použít nějaký software, např. Wolfram Alpha.

Člen na pravé straně nerovnosti proto můžeme zanedbat. Dostáváme tak

$$\theta(t) \doteq \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Jinými slovy, na odporu vzduchu vůbec nezáleží.

Perioda kyvadla bude

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

takže pro počet kmitů za čas t dostaneme

$$N_{\text{kmit}} = \frac{t}{T} = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Jelikož však budeme počítat kyvy,¹⁶ výsledný vzorec bude

$$N_{\text{kyv}} = \frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}},$$

což nám dává přibližně 63 kyvů na jednu minutu a 634 kyvů na deset minut.

Příprava experimentu a průběh měření

Jako závaží kyvadla jsme volili petangovou kouli a jako závěs dva provázky, protože mají oproti kouli zanedbatelnou hmotnost a můžeme použít model matematického kyvadla. Relativně vysoká hmotnost koule zároveň potlačila vliv odporu prostředí. Kouli jsme pomocí nemalého množství izolepy připevnili k provázkům. Kyvadlo jsme následně přivázali k madlu skříně. Bylo třeba smyčku zajistit izolepou, aby se závěs neprotácel, a přilepit dvířka od skříně, protože by je kývání mohlo rozhýbat.

Pro měření jsme si naprogramovali stopky. S prvním stiskem klávesy začnou měřit a s každým dalším přidají číslo a čas záznamu. Kyvadlo jsme vychýlili zhruba o $d = l \sin(5^\circ) \doteq 8$ cm a nechali ho volně kývat. Při prvním průletu stabilní polohou jsme spustili stopky a při každém dalším jsme provedli záznam. Takto jsme naměřili 634 kyvů odpovídajících času 10 minut.

Oproti běžným stopkám v mobilu nám tyto stopky ulehčí práci tím, že počítají kyvy za nás a umožňují export dat pro jejich další analýzu.

Výsledky měření

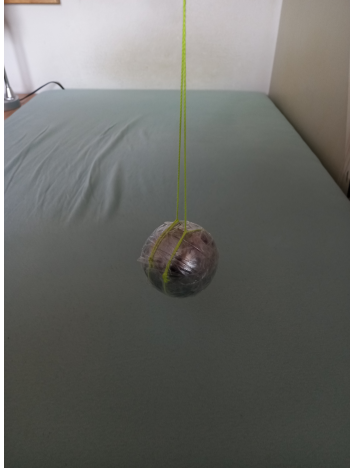
Jak si později ukážeme, můžeme na desetiminutové měření nahlížet jako na deset nezávislých minutových měření. Celé měření si rozdělíme na deset úseků, každý 63 kyvů dlouhý.

Dobu 634 kyvů jsme změřili jako 602,8 s. Pokud provedeme statistiku na naměřená data, získáme výsledek

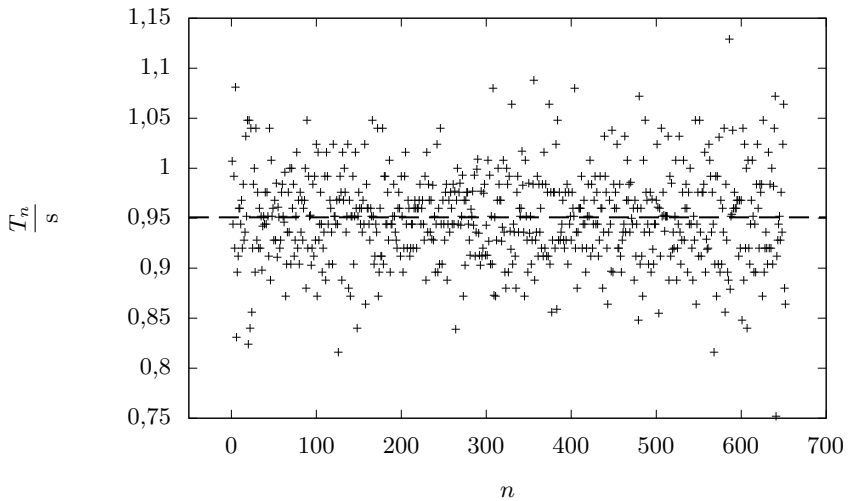
$$(59,90 \pm 0,02) \text{ s},$$

což nám dává reletivní odchylku v případě jednodeminutového měření přibližně 0,2 % a v případě desetiminutového měření odchylku 0,5 %.

¹⁶Dva kyvy jsou jeden kmit.



Obr. 41: Fotka z měření.



Obr. 42: Změřená doba n -tého kyvu.

Během měření jsme změřili délku jednotlivých kyvů. Pokud do grafu vyneseme změřenou dobu n -tého kyvu a proložíme ji lineární funkcí (horizontální černá čára v grafu č. 2), bude tato funkce tvaru

$$T_n \doteq (-8 \cdot 10^{-7}n + 0,9) \text{ s.}$$

Tab. 14: Naměřené délky minuty

N	$\frac{T_{\min}}{s}$
1	60,0
2	59,8
3	60,0
4	59,9
5	59,9
6	59,8
7	60,1
8	59,8
9	60,1
10	59,7

Lze vidět, že po dobu desetiminutového měření se průměrná délka kyvu prakticky nezměnila a lze tedy brát desetiminutové měření jako deset nezávislých minutových měření.

Diskuse

Délku minuty se nám podařilo změřit celkem přesně, ale mohlo by nás zarazit, že doba 60 s nespadá do námi stanovené odchylky. Mohli bychom to svést na statistickou chybu – říct, že se jednalo o výjimečný případ, ale lze spočítat, že takto velká výchylka od změřeného průměru nebo větší může nastat s pravděpodobností řádově¹⁷ 10^{-5} %. Příčinou této nesrovnalosti je fakt, že neměříme dobu jedné minuty, ale dobu 63 kyvů, která je $T = 63\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \doteq 59,94$ s. Stejná pravděpodobnost pro tuto hodnotu se již pohybuje řádově v procentech.

Tuto chybu bychom mohli napravit vhodnou délkou závěsu kyvadla. Pro 63 kyvů tuto délku spočteme jako

$$63\pi\sqrt{\frac{l_{63}}{g}} = 60 \text{ s},$$

$$l_{63} \doteq 90,2 \text{ cm},$$

což vysvětluje, proč jsme změřili minutu tak přesně. Ideální délka se od té naší liší řádově o milimetry. Taková přesnost není v našich podmínkách jednoduše dosažitelná, protože provázek se vlivem tíhy koule může natáhnout.

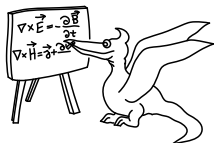
Práve pružnost provázku mohla být dalším zdrojem chyby. Pohyb hmotného závaží po zakřivené trajektorii vyvolával v provázku pnutí, jež ho natahovalo, což ovlivňovalo délku periody. Tuto chybu jsme mohli odstranit např. použitím pevného závěsu.

¹⁷Jelikož známe střední hodnotu a směrodatnou odchylku měření, můžeme tyto pravděpodobnosti spočítat skrze normální rozdělení.

Během experimentu jsme si mohli povšimnout, že se kyvadlo nekývalo v jedné rovině, tudíž na něj musely působit další síly, které jsme nezapočítali. Předpokládáme však, že tyto síly neměly na průběh experimentu zásadní vliv.

Závěr

S pomocí kyvadla se nám podařilo změřit doby jedné minuty a deseti minut.



Fyzika laserové inerciální fúze

Kapitola 1: Začínáme slučovat

V letošním ročníku seriálu se zaměříme na fyziku laserové inerciální fúze. V současných debatách o čisté a udržitelné energii může jaderná fúze, v některých případech pak právě fúze inerciální, hrát důležitou roli. V první části seriálu se zaměříme na historii objevů, jež vyústily v cílený výzkum v tomto oboru, konkrétně tedy v oblasti laserové inerciální fúze. Proč se tento způsob nazývá právě inerciální, se dozvíme na konci prvního dílu seriálu.

Historické okénko jaderné fúze

Za počátek dějin jaderné fúze můžeme považovat rok 1920. Arthur Eddington se domníval, že slučování (fúze) vodíku s heliem by mohlo být primárním zdrojem energie hvězd. Tato domněnka pramenila z výsledků dosažených v předchozích letech, především z objevu kladně nabitého atomového jádra Johannešem Wilhelmen („Hansem“) Geigerem a Ernestem Marsdenem pod vedením Ernesta Rutherforda v roce 1909. Jejich experimenty spočívaly v ostřelování zlaté fólie alfa částicemi pocházejícími z radioaktivního rozpadu, během nichž tým vědců pozoroval rozptyl těchto částic do velkých úhlů.

Dalším významným přínosem byl v roce 1912 objev dvou izotopů neonu Francisem Williamem Astonem, který následně do roku 1919 proměřil hmotnosti dalších asi padesáti izotopů neradioaktivních prvků.

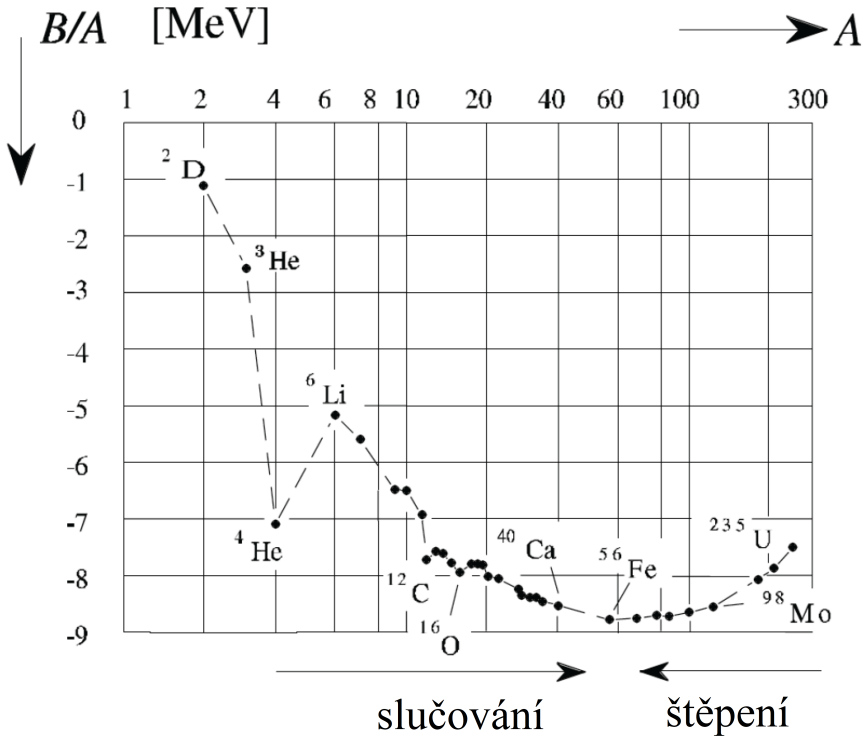
Roku 1927 Friedrich Hund objevil kvantové tunelování, jehož teorii o rok později propracoval George Gamow. V roce 1929 Robert Atkinson a Fritz Houtermans s využitím Astonem změřených hmotností lehkých prvků ukázali, že právě slučováním prvků s malou hmotností se může uvolnit značné množství energie, jak je ukázáno na obrázku 43, tj.

$$\Delta E = (M_1 + M_2 - M_3 - M_4) c^2, \quad (23)$$

kde M_1 a M_2 jsou hmotnosti reagujících jader, M_3 a M_4 jsou hmotnosti produktů a c je rychlost světla. Navíc se jim podařilo prokázat, že díky kvantovému tunelování nejsou pro proběhnutí reakce vyžadovány tak vysoké teploty, jak předpověděl Eddington.

Vůbec první fúzní reakce byla v Cavendishových laboratořích demonstrována v roce 1933 Marcusem Laurencem Elwinem („Markem“) Oliphantem, jemuž se podařilo sloučit dvě deuteriová jádra.

V roce 1938 Kantrowitz a Jacobs postavili první magnetické zrcadlo, ve kterém chtěli předvést první jaderný reaktor. Poté následovaly pokusy budovat různé



Obr. 43: Graf zobrazující vazebnou energii B v závislosti na nukleonovém čísle A .

fúzní aparatury, kupříkladu tzv. pinčovací zařízení, tokamak (1950) nebo stelarátor (1951). Tokamak byl přitom navržen Andrejem Sacharovem a Igorem Tamem v Sovětském svazu.

V roce 1951 se začalo pracovat na termojaderné bombě. 1. listopadu roku 1952 byla v rámci operace Ivy odpálena bomba zvaná Ivy Mike. Jednalo se vlastně o první člověkem uvolněnou fúzní energii, přestože velmi nekontrolovatelnou.

V roce 1960 (několik měsíců po vynálezu laseru) byl Johnem Nuckollsem navržen koncept inerciální laserové fúze, což lze považovat za počátek snahy lidstva o říditelnou laserovou inerciální fúzi.

Lawsonovo kritérium

Ještě předtím (v roce 1955) ale John David Lawson nastínil, jak by bylo možné dosáhnout fúze v pozemských podmínkách. Předpokládáme, že plazma se skládá z deuteria a tritia, kde hustota deuteria je $n_d = n/2$ a hustota tritia $n_t = n/2$,

přičemž n je celková hustota ve smyslu počtu částic N na jednotku objemu V , tedy $n = N/V$. Objem je v našem případě často udáváný v cm^3 , hustota má proto rozměr cm^{-3} . Můžeme zavést „rychlost výtěžku fúzní reakce“ W , která je v takovémto horkém a hustém plazmatu dána vztahem

$$W = \frac{n^2}{4} \langle v\sigma \rangle,$$

kde v představuje relativní rychlost dvou jader a σ je účinný průřez reakce. Za předpokladu, že se částice v plazmatu řídí Maxwellovým-Boltzmannovým rozdělením rychlostí s průměrnou kinetickou energií

$$E_k = \frac{3}{2} k_B T,$$

představují tyto částice v podstatě monoatomární ideální plyn o teplotě T , kde k_B je Boltzmanova konstanta. Fúzní účinný průřez σ silně závisí na relativní rychlosti slučovaných jader a výsledná rychlost výtěžku je získána průměrováním (tj. operací $\langle \rangle$) součinu $v\sigma$ přes všechny možné relativní rychlosti.

Z obrázku 44 plyne, že při všech možných dosažitelných teplotách deuteriová-tritiová (DT) reakce dává nejvyšší příspěvek k energetickému výtěžku, a představuje proto nejsnazší cestu k získání fúzní energie.

Energie vyprodukovaná reakcí za dobu τ závisí na kinetické energii Q reakčních produktů a výtěžku fúzní reakce W . To vyjadřuje vztah

$$E = W\tau Q = \frac{n^2}{4} \langle v\sigma \rangle \tau Q,$$

kde Q je totožné s ΔE z rovnice 23 a má rozměr MeV.

Ve fyzice plazmatu se energie udává v jednotkách elektronvolt (eV). Tato jednotka představuje energii, kterou získá elektron po urychlení napětím $U = 1$ V. Číselně proto platí $1 \text{ eV} = qU = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Často se setkáme s použitím eV rovněž při určování teploty, přičemž pro přepočet teploty na K lze použít vztah

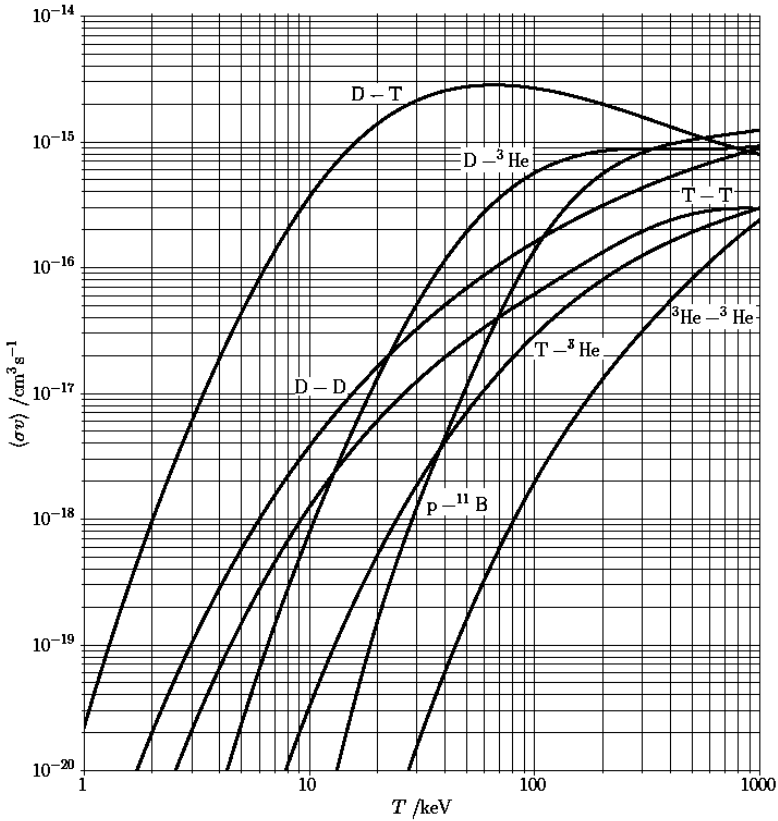
$$T = \frac{E}{k_B}.$$

Protože cílem je energii v reaktoru získávat, fúzní energie musí být větší než energie nutná k ohřátí plazmatu na vysoké teploty. Energetického zisku je tedy dosaženo pouze v případě, že vyprodukovaná energie je větší než celková kinetická energie všech částic. Střední hodnota E_k každého z jader a elektronů je $E_k = \frac{3}{2} k_B T$. Proto pouze v případě, že platí

$$2nE_k = 2n \frac{3}{2} k_B T < \frac{n^2}{4} \langle v\sigma \rangle \tau Q,$$

uvolní fúzní reakce více energie, než je nutné k vytvoření plazmatu o dané požadované teplotě a hustotě. Přeuspořádáním jednotlivých členů v nerovnosti získáme tzv. Lawsonovo kritérium

$$n\tau > \frac{12k_B T}{\langle v\sigma \rangle Q},$$



Obr. 44: Závislost rychlosti výtěžku fúzní reakce na teplotě.

které je jedním ze základních vztahů ve fyzice a technice udržení jaderné fúze.

Slučovaná jádra musí mít dostatečnou kinetickou energii, aby nastal dostatečný počet fúzních reakcí. Pro DT reakci je nutná teplota přibližně 5 keV. Pro tyto parametry Lawsonovo kritérium dává přibližný vztah

$$n\tau \sim 10^{14} - 10^{15} \text{ s cm}^{-3}.$$

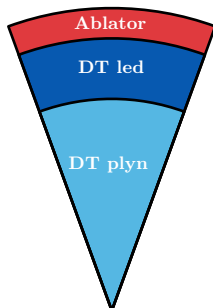
Z toho plyne, že plazma musí být udrženo při dostatečné hustotě dostatečně dlouhou dobu.

V současné době jsou nejvíce studované a technicky nejpokročilejší dva přístupy, jak toho docílit:

1. magnetické udržení,
2. inerciální udržení,

jež splňují Lawsonovo kritérium zcela rozdílnými způsoby. Magnetické udržení využívá nízkých hustot a delších časů udržení plazmatu a používá se například v tokamacích, zatímco inerciální fúze využívá extrémně vysokých hustot plazmatu udržovaných po velice krátkou dobu.

Jako palivo pro inerciální fúzi se používají peletky, viz obr. 45, na jejichž povrchu se nachází vrstva tzv. ablátoru, jenž se při dopadu laserového paprsku odpařuje směrem ven z peletky. Ze zákona zachování hybnosti je tím vnitřní část paliva urychlena opačným směrem dovnitř peletky. Takto se v centru peletky zvýší teplota a tlak natolik, že nakonec dojde k „zapálení“ termojaderné fúze.



Obr. 45: Obrázek peletky ve tvaru koule o rozměrech typicky několik milimetrů

V případě inerciální fúze může být Lawsonovo kritérium vyjádřeno pomocí tzv. plošné hustoty paliva, tj. součinu hustoty paliva ρ a poloměru palivové peletky R . Čas potřebný k udržení fúze můžeme vyjádřit jako dobu expanze sféry o poloměru R , pohybující se rychlostí zvuku $c_s \sim 100 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, jako

$$\tau = \frac{R}{c_s}$$

a hustotu částic n s využitím hustoty paliva jako

$$n = \frac{\rho}{m},$$

kde m reprezentuje průměrnou hmotnost atomu deuteria a tritia. S pomocí Lawsonova kritéria $n\tau \sim 10^{15} \text{ s}\cdot\text{cm}^{-3}$ získáme

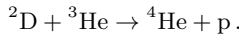
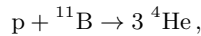
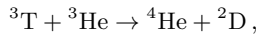
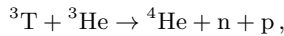
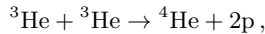
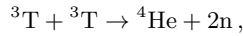
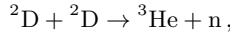
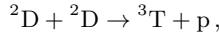
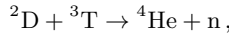
$$\rho R \sim 1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-2},$$

čímž je stanovena podmínka na součin hustoty a rozměru peletky.

Úloha I.S ... začínáme slučovat

10 bodů

1. Spočítejte energetický výtěžek následujících reakcí a kinetické energie produktů reakce



2. Pomocí grafu rychlosti výtěžku v textu seriálu pro vámi zvolenou teplotu odvodte Lawsonovo kritérium pro dobu udržení inerciální fúze deuteria s deuteriem, protonu s borem a deuteria s heliem 3 a pro jednotlivé případy určete součin velikosti palivové peletky a hustotu stlačeného paliva. Mají tyto reakce nějakou výhodu oproti tradiční DT fúzi?
3. Určete, jak by vypadalo Lawsonovo kritérium pro nemaxwellovské rozdělení rychlostí, kdyby kinetická energie částic byla
- (a) $E_k = k_B T^\alpha$,
- (b) $E_k = aT^3 + bT^2 + cT$.

Byla by takováto fúze vůbec realizovatelná? Pokud ano, jaké by mělo být palivo (fúzní reakce), jak velká by měla být palivová peletka a na jakou hustotu by se měla stlačit?

(řešení str. 163)

Kapitola 2: Stlačujeme

V dalším dílu seriálu se zaměříme na první fázi fúzního cyklu, kterou je komprese paliva. Z minulého dílu víme, že z Lawsonova kritéria vyplývá, že fúze může nastat, pouze pokud $\rho R \sim 1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-2}$. Ze vztahu pro hmotnost peletky o poloměru R

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{(\rho R)^3}{\rho^2}$$

můžeme získat potřebnou hustotu

$$\rho = \sqrt{\frac{4\pi}{3} \frac{(\rho R)^3}{M}},$$

na kterou musíme palivo stlačit, což pro 1 mg paliva¹ odpovídá hustotě přibližně $100 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Když uvážíme počáteční hustotu DT (led o teplotě přibližně 20 K) paliva $0,225 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, musí být palivo stlačeno téměř 500-krát, v případě DT plynu o počáteční hustotě $0,5 \text{ mg}\cdot\text{cm}^{-3}$ je dokonce potřeba 200 000-krát.

Rázové vlny: jak stlačit palivo tak, aby začalo fúzovat

Stlačení paliva na tak vysoké hustoty je jeden z nevyřešených úkolů inerciální fúze. Nicméně prakticky od samého počátku se uvažuje o stlačení pomocí silných rázových vln.

Rázová vlna vznikne, když intenzivní, krátký laserový impulz s vysokou energií dopadá na povrch peletky. Ten se téměř okamžitě (během několika pikosekund) vypaří, ionizuje a vznikne tak plazma, které rychle expanduje do vnějšího prostoru. Ze zákona zachování hybnosti vyplývá, že reakcí na expanzi plazmatu vzniká sférická rázová vlna, která se rychle šíří směrem do centra palivové peletky. Rychlost rázové vlny je přibližně dána Sedovovým-Taylorovým zákonem expanze

$$v_{rv} \approx \left(\frac{E_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}},$$

kde E_0 je energie laserového pulzu, ρ je počáteční hustota paliva a t je délka laserového impulzu.

Předpokládejme, že plazma před a za rázovou vlnou je ve stacionárním stavu. Před rázovou vlnou je popsáno počátečním tlakem p_0 , teplotou T_0 a hustotou ρ_0 , za rázovou vlnou p_1 , T_1 a ρ_1 . Za předpokladu, že plazma představuje ideální plyn, jsou vztahy mezi veličinami před a za rázovou vlnou popsány Rankinovými–Hugoniotovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\rho_0} &= \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_0}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_0}, \\ \frac{p_1}{p_0} &= \frac{(\gamma + 1)\rho_1 - (\gamma - 1)\rho_0}{(\gamma - 1)\rho_0 - (\gamma + 1)\rho_1}, \\ \frac{T_1}{T_0} &= 1 + \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \frac{\gamma M^2 + 1}{M^2} (M^2 - 1), \end{aligned} \quad (24)$$

kde γ je Poissonova konstanta a $M = v_{rv}/c_s$ je tzv. Machovo číslo udávající poměr rychlosti rázové vlny v_{rv} a rychlosti zvuku v daném prostředí c_s . Tato rychlost je daná vztahem

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{M_i}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}},$$

kde M_i je hmotnost iontů.

¹Toto množství paliva je dáno praktickými a technologickými možnostmi současné technologie, kdy se fúzní reakcí může uvolnit maximálně 1 GJ energie, protože pak by tepelná a radiální zátěž mohla poškodit reaktorovou nádobu.

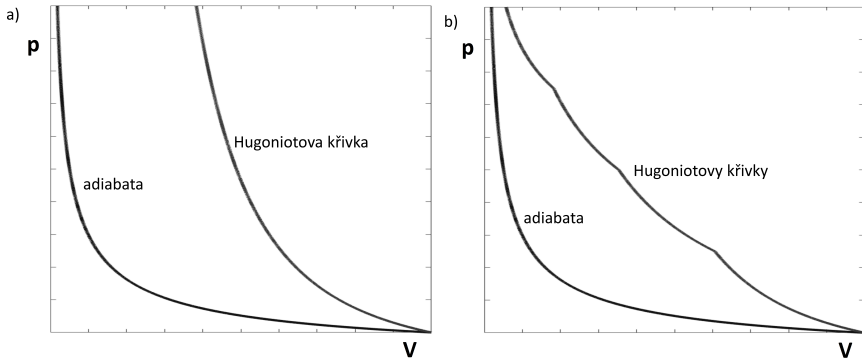
Pro tlak, který rázová vlna (která není příliš silná) vytvoří, platí vztah

$$p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 v_{rv}^2.$$

V případě extrémně silné rázové vlny, kdy výsledný tlak $p_1 \gg p_0$, plyne z rovnice 24

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}.$$

Pro jednoatomový plyn ($\gamma = 5/3$) tak dostáváme, že $\rho_1/\rho_0 = 4$.



Obr. 46: a) Graf zobrazující porovnání adiabaty a Hugoniotovy křivky. b) Porovnání dosažení adiabaty pomocí stlačování paliva několika rázovými vlnami. Hugoniotova křivka vyjadřuje kompresi rázové vlny, tedy je to vyobrazení vztahů daných rovnicí 24 ve formě pV diagramu.

Z tohoto vyplývá, že maximální stlačení dokonce při nekonečně silné rázové vlně nikdy nestlačí hustotu více než $4\times$. Navíc k dosažení potřebného tlaku kompresí rázovou vlnou je třeba vynaložit mnohem více energie než při adiabatické kompresi² (viz obr. 46 a). Jelikož potřebujeme palivo stlačit alespoň $500\times$, je tak potřeba užít řadu po sobě jdoucích spíše slabších rázových vln než jednu silnou rázovou vlnou. To má dvě zásadní výhody. První z nich je, že užitím řady slabších rázových vln můžeme zůstat v blízkosti adiabatické (izentropické) komprese paliva a dosáhnout stejného kompresního tlaku jako jednou silnou rázovou vlnou (viz obr.46 b). Proto jedním z cílů inerciální fúze je vytvarovat časový profil laserového impulsu takovým způsobem, že vytvořené rázové vlny sledují křivku adiabatické komprese co nejvíce, jak jen to je možné. Navíc každá další rázová vlna musí být rychlejší než ta předchozí, aby do centra peletky dorazily ve stejnou dobu.

²Celková energie, která se při kompresi spotřebuje, je dána obsahem pod danou křivkou.

Zažehnutí termojaderné reakce

Další důležitou záležitostí inerciální fúze je to, na jakou teplotu musíme zahřát palivo, aby probíhalo termojaderné hoření. Zapálení termojaderné reakce a fúzní hoření plazmatu se objeví, když ohřívání fúzními produkty překoná energetické ztráty takovým způsobem, že není nutné žádné dodatečné vnější ohřívání. Poté se fúzní hoření plazmatu udrží samo.

Hlavní energetické ztráty v plazmatu jsou způsobeny vyzařováním rentgenového záření (tzv. brzdným zářením vznikajícím při průletu elektronů kolem atomových jader). Hustotu výkonu radiačních ztrát můžeme vyjádřit jako

$$W_b = C_b n^2 T^{1/2} = 5,34 \cdot 10^{-31} n^2 T^{1/2} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-3},$$

kde hustotu měříme (jak je ve fyzice plazmatu obvyklé) v cm^{-3} a teplotu v keV. Veličina C_b je tzv. konstanta hustoty zářivého výkonu brzdného záření, která je závislá na teplotě. Tento vztah platí za předpokladu velmi tenkého prostředí (tzv. opticky tenkého, kdy záření po velmi krátké době zcela opustí plazma).³ Hustotu výkonu termojaderné fúze z prvního dílu seriálu máme jako

$$W_f = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle Q,$$

což pro DT fúzi odpovídá hodnotě $W_f = 7,04 \cdot 10^{-13} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-3}$. Z fúzní reakce odnáší přibližně 14 MeV neutrony, které plazmatem proletí prakticky bez další interakce, proto k jeho ohřívání nepřispívají. Kdežto produkovaná jádra helia plazma prakticky neopustí a veškerou svou energii spotřebují na jeho ohřátí či udržení jeho teploty. Jádra helia nesou přibližně 20 % fúzní energie. Pokud tedy porovnáme $W_b = W_f = 1/5 W_\alpha$, získáme optimální teplotu pro zapálení jaderné fúze. Ta tedy musí být větší než 4,3 keV. Proto se ve většině úvah návrhu inerciálního fúzního zařízení uvažují teploty 5 keV či spíše 10 keV, při které má DT reakce vyšší účinný průřez.

Ve skutečném světě ale plazma není ideální plyn, má spíše vlastnosti kapaliny, zvláště za velkých hustot, proto čelo šířící se rázové vlny není ostré, ale předchází jej tzv. noha (anglicky se tato struktura označuje jako „foot“), která jednak snižuje sílu samotné rázové vlny a jednak předežhřívá plazma před rázovou vlnou. Tím výrazně snižuje účinnost stlačení plazmatu. Tomuto jevu se proto snažíme vyhnout. V inerciální fúzi je věnováno velké úsilí tomu, aby se vytvořila posloupnost vhodných rázových vln a toto chodidlo bylo co nejmenší (tzv. „low-foot“ režim). Vhodné posloupnosti rázových vln můžeme dosáhnout tvarováním časového profilu laserového impulsu.

V 70. letech 20. století se lidé domnívali (díky výše zmíněným poznatkům), že inerciální fúze tak může být relativně snadno realizovatelná, protože energie na zapálení termojaderné fúze se nezdála být příliš velká (i když v té době nebyly ještě dostupné lasery s vysokým výkonem, ale rychlý vývoj laserové technologie naznačoval, že by mohly být brzy realizovány). Základním konceptem první fáze fúzního

³V případě velmi hustého plazmatu, jaké se obvykle vyskytuje během termojaderného hoření, může dojít k tomu, že záření bude v plazmatu pohlcováno a může s ním být v termodynamické rovnováze, takže bude udržovat vhodnou teplotu plazmatu.

cyklu, tedy stlačení paliva, bylo tzv. objemové stlačení, kdy se rázovými vlnami tlačí na vysoké hustoty a teploty, kdy dojde k zapálení termojaderných reakcí, celý objem paliva. Avšak brzy se přišlo na to, že na získání takových podmínek by bylo potřeba, aby laserový svazek nesl energii 60 MJ, což je i dnes nerealistické.

Důvody pro tak obrovskou energii potřebnou ke stlačení jsou v podstatě dva: zahřátí paliva spotřebovává mnohem více energie než jeho stlačení a stlačení horkého materiálu vyžaduje také mnohem více energie než stlačení chladného materiálu.

Z těchto důvodů se začalo upřednostňovat zapálení centrální tzv. horké skvrny (anglicky „hot-spot“). V tomto schématu se palivo pohybuje do středu s narůstající rychlostí podle toho, jak laser předává svou energii do plazmatu. Výsledkem tohoto zrychleného pohybu je, že se vnitřní centrální část palivové peletky prakticky adiabaticky tlačí na vyšší teploty (5 – 10 keV) než vnější části (1 keV). Jak centrální část, tak její obal se tlačí na vysoké hustoty, ale horký střed má nižší hustotu (přibližně $100 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$), kdežto obal dosáhne hustoty přibližně $800 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Takže palivo začíná hořet pouze v malém okolí středu peletky (o průměru přibližně $1 \mu\text{m}$) a hoří po dobu 100 – 200 ps (tj. než celé vyhoří). Odtud se termojaderná reakce šíří do vnějších částí peletky. Tento jev nastane díky tomu, že alfa částice produkované fúzní reakcí dostatečně prohřejí (na teplotu vyšší než 5 keV, viz výše) vnější části peletky. Nakonec termojaderná fúze hoří na samém okraji peletky, až reakce zhasne úplně. (Poté se do reaktorové nádoby vhodí nová peletka a celý cyklus se opakuje.)

Jelikož je v konceptu horké skvrny nutné zapálit menší množství paliva (termojaderná reakce se udrží, pokud horká skvrna obsahuje 2 % hmotnosti peletky), na stlačení paliva nám postačí energie 1 – 2 MJ. V současné době tak výkonné lasery již dostupné jsou, např. americký NIF a francouzský LMJ.

Úloha II.S ... stlačujeme

10 bodů

Jakou energii musí mít laserový impuls trvající 10 ns, aby jím vytvořená rázová vlna byla schopná ohřát plazma na teplotu, při níž může dojít k termojaderné fúzní reakci? Jakou hustotu bude mít stlačené palivo?

Poznámka Přepokládejte, že počáteční plazma je jednoatomový ideální plyn.

(řešení str. 167)

Kapitola 3: Hoříme

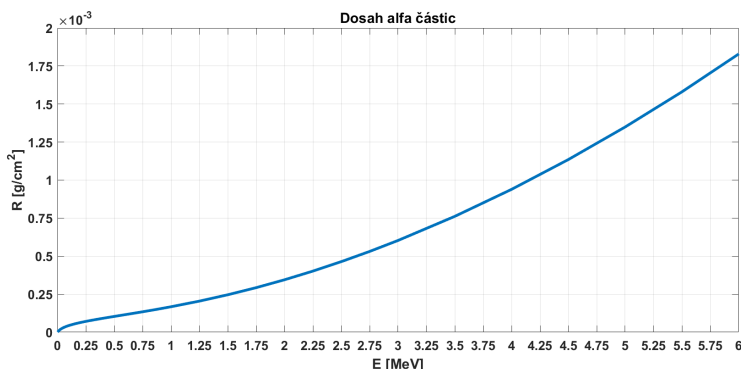
V tomto díle seriálu se podíváme na samotné hoření jaderného paliva a na produkci a výtěžek energie.

Hoření paliva

Když teplota a hustota paliva v centrální horké skvrně (typicky o poloměru 1 – $10 \mu\text{m}$) dosáhne správných hodnot, palivo se zapálí a nastane jaderné slučování deuteria s tritiem. Produkovaná jádra helia odevzdávají svoji energii především v této centrální oblasti a velmi rychle se ohřívají, takže se slučuje stále více jader (v centrální horké skvrně stoupá teplota a tím pádem se zvyšuje i účinný průřez fúzní

reakce). Je to dáno velmi krátkým dosahem jader helia v hustém plazmatu 50. Rentgenové záření, neutrony vzniklé z fúze a všudypřítomné plazmové elektrony pak přenášejí energii do vnějších oblastí paliva. Kvůli relativně vysoké transparentnosti paliva pro rentgenové záření a neutrony projdou obě tyto složky touto částí paliva prakticky bez toho, aby zde odevzdaly významné množství energie. Proto se energie do vnějších oblastí paliva přenáší převážně elektrony (v tomto případě hovoříme o termální vodivosti plazmatu). Teplota zde opět vzrůstá, takže se zde také objeví fúzní reakce a pokračuje hoření paliva. Tento proces se dále opakuje a hoření se tak postupně šíří k okraji palivové peletky.

Během této doby vznikne obrovský tlak, který nakonec odfoukne zbývající palivo. Imploze palivové peletky se tak změnil v explozi. Celý děj trvá řádově desítky až stovku pikosekund. Explozí peletky končí cyklus produkce energie v laserové inerciální fúzi a celý proces se vstříknutím nové palivové peletky do reaktoru opakuje. Aby došlo k prakticky kontinuální produkci energie, frekvence těchto cyklů musí být alespoň 20 Hz.



Obr. 47: Závislost tzv. dosahu jader helia v deuteriu na jejich energii. Dosah je obvykle normován na hustotu daného materiálu udávanou v $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$, proto je jeho jednotka udávána v $\text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$.

Jádra helia předávají energii palivu převážně pružnými Coulombickými srážkami (Rutherfordův rozptyl).

Pro popis binární srážky je vhodné zavést tzv. záměrný (impaktní) parametr b , který vyjadřuje vzdálenost os jader před srážkou (viz obrázek 48)

$$b = \frac{Q_{\text{He}}Q_{\text{H}}}{8\pi\epsilon_0 E_{\text{k}}} \cotg \frac{\theta}{2},$$

kde E_{k} je kinetická energie jádra helia. Pravděpodobnost rozptylu⁴ nalétávající čás-

⁴Přesněji řečeno toto je tzv. diferenciální účinný průřez.

tice (jádra helia) do úhlu θ je možné vyjádřit vztahem

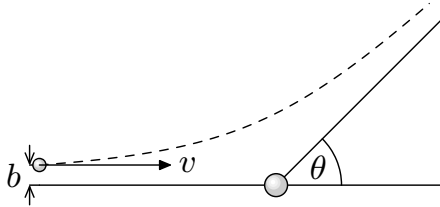
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Q_{\text{He}}Q_{\text{H}}}{4\pi\epsilon_0\mu|v_{\text{He}} - v_{\text{H}}|^2} \right)^2 \frac{1}{4\sin^4\frac{\theta}{2}},$$

kde Q_{He} a Q_{H} jsou náboje jader helia a deuteria, resp. tritia, a v_{He} a v_{H} jsou rychlosti těchto jader. Dále μ je tzv. redukovaná hmotnost, kterou můžeme vyjádřit jako

$$\mu = \frac{m_{\text{He}}m_{\text{H}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{H}}},$$

kde m_{He} a m_{H} představují hmotnosti interagujících jader. Energie přenesená z jádra helia do kinetické energie deuteria nebo tritia Q spočítáme jako

$$Q = 2\frac{\mu^2}{m_{\text{H}}}v_{\text{He}}^2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$



Obr. 48: Schéma Coulombova pružného rozptylu.

Neutrony uvolněné jadernou reakcí interagují primárně prostřednictvím pružných srážek s jádery deuteria a tritia v plazmatu. V průměru při srážce s jádrem o hmotnostním čísle A ztratí neutron jen zlomek své energie, která odpovídá poměru

$$\frac{2A}{(A+1)^2}.$$

Účinný průřez srážky je pro deuterium i tritium přibližně 10^{-23} cm². Odpovídající střední volná dráha (tj. délka dráhy letu neutronu mezi dvěma srážkami) je

$$l = \frac{1}{\sigma n},$$

kde σ je účinný průřez srážky a n je hustota iontů v plazmatu. Střední volná dráha je však mnohem větší než rozměr stlačeného paliva, a proto je příspěvek neutronů k ohřevu horké skvrny i transportu energie do vnějších slupek paliva zanedbatelný.

Mnohem významnější roli v přenosu energie do vnějších slupek (a tedy rozšíření oblasti hoření paliva) představují elektrony (přenos energie prostřednictvím

elektronů se také nazývá tepelná vodivost). Tok hustoty tepla q můžeme vyjádřit Fourierovým zákonem⁵

$$q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

kde κ je koeficient tepelné vodivosti, ΔT je změna teploty a Δx je úsek, na který se teplo přenáší.

Dominantním mechanismem produkce elektromagnetického záření (fotonů) při teplotách, které panují v centrální horké skvrně (tj. několik keV) je tzv. brzdné záření. Střední volnou dráhu brzdného fotonu (v cm) je možné vyjádřit jako

$$l_{bz} = 14,4 \frac{T_h^{\frac{7}{2}}}{\rho_h^2},$$

kde ρ_h a T_h jsou hustota (v $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$) a teplota (v keV) centrální horké skvrny. Protože tato střední volná dráha je mnohonásobně větší než rozměr horké skvrny, brzdné záření významně nepřispívá k ohřívání středu paliva a vnějších slupek⁶ a v podstatě představuje pouze energetické ztráty, které je nutné překonat.

Úloha III.S ... hoříme

10 bodů

1. Určete (s pomocí obrázku 50) dosah jader helia v centrální horké skvrně.
2. Jaká energie se musí uvolnit fúzními reakcemi, aby se hoření paliva rozšířilo do nejbližší slupky peletky? Jak tlustá je tato slupka?
3. Odhadněte, jaká je nejpravděpodobnější přenesená energie z jádra helia na deuterium. Kolik srážek průměrně podstoupí jádro helia v centrální horké skvrně předtím, než se zastaví?

(řešení str. 169)

Kapitola 4: Svítíme

V minulých dílech seriálu jsme se zaměřili na vlastní zažehnutí a fúzní hoření paliva. Avšak abychom hoření vůbec dosáhli, je potřeba dodat palivu dostatečnou energii užitím laseru. Toto ale není zdaleka tak jednoduché, jelikož po dopadu laseru na povrch palivové kapsle vzniká rychle expandující plazma. Zbytek laserového impulsu prochází a reaguje právě s plazmatem. Tady nastává jedna z mnoha potíží, které nám stále brání k dosažení účinné fúzní energie. Konkrétně jde o tzv. parametrické nestability laseru v plazmatu.

Nestability

Když laserový impuls dopadá na plazma, mohou nastat v podstatě dva případy. Co se bude dít dále závisí na tzv. kritické hustotě plazmatu n_c , jež je dána vztahem

$$n_c = \frac{m\varepsilon_0\omega_0^2}{e^2},$$

⁵Přesnější znění říká, že směr toku hustoty tepla je úměrný teplotnímu spádu (gradientu).

⁶Pokud by střed paliva byl výrazně hustší, k absorpci záření by zde mohlo dojít, což by přispívalo ke zvýšení teploty plazmatu.

kde m a e jsou hmotnost a náboj elektronu, ω_0 je frekvence laseru a ε_0 je permitivita vakua. Plazma o hustotě n_e kmitá při poruchách na plazmové frekvenci

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{m \varepsilon_0}}.$$

V případě, že hustota plazmatu je větší než kritická hustota, laserový impulz se odrazí zpět jako od zrcadla. Pokud je hustota menší, laserový impulz může do plazmatu proniknout. Potom se plazma chová jako typické prostředí s indexem lomu η vyjádřeným vztahem

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{n_e}{n_c}}.$$

Ačkoli je v tomto případě index lomu menší než 1 (v normálním optickém prostředí je naopak vždy větší než 1), rychlost světla v plazmatu je vždy menší než rychlost světla ve vakuu (toto vyplývá z disperzních vztahů, což si můžete sami ověřit).

V případě inerciální fúze dopadá laserový impulz na materiál o hustotě pevné látky, která je v podstatě větší než kritická hustota odpovídajícího plazmatu. Jak tedy vůbec může dojít k absorpci laserového záření a vytvoření silné kompresní rázové vlny? Když velmi intenzivní laserový impulz dopadá na pevnou látku, jeho silné elektrické pole prakticky okamžitě ionizuje atomy ve vnější vrstvě materiálu, na kterou laser dopadá. Ionizací uvolněné elektrony začnou v laserovém poli kmitat a tím získávají další energii, kterou dále předávají iontům (prostřednictvím Coulombova rozptylu) a navíc ionizují další atomy ve vnitřnějších vrstvách materiálu. Tomuto procesu se říká ablace a vzniká husté plazma (s hustotou blízkou hustotě pevné látky). Jak plazma expanduje do vnějšího prostoru, postupně se zředí až jeho hustota dosáhne hodnoty rovné kritické hustotě plazmatu a vytvoří se tzv. kritický povrch. V tomto okamžiku zde začne být energie laserového impulzu primárně absorbována volnými elektrony plazmatu, které opět Coulombovým rozptylem předávají energii do iontů. Tento jev se nazývá srážková absorpce nebo také inverzní brzdné záření. V ideálním případě se takto absorbuje veškerá nebo téměř veškerá energie laseru a tím se umožní vytvoření silné kompresní rázové vlny.

Avšak jak plazma dále expanduje, jeho hustota se stále snižuje a plazma může dosáhnout relativně velkých rozměrů (i milimetrových délek). Vytvoření plazmatu a kritického povrchu je ale velmi rychlý proces, který se odehraje prakticky v jedné nanosekundě. Jelikož laserový impulz, jenž vytváří rázovou vlnu, je o dost delší, jeho pozdější části reagují s plazmatem o hustotě nižší než je kritická hustota. Laserový impulz procházející podkritickým plazmatem podstupuje tzv. parametrické nestability, kdy interakcí laseru s plazmatem vznikají vlny, které se plazmatem šíří a odnášejí část energie laserového impulzu.

V závislosti na hustotě plazmatu vznikají postupně čtyři hlavní nestability. První nestabilita, která se objeví v blízkosti kritického povrchu, je tzv. stimulovaný Brillouinův rozptyl, kdy vzniká iontová (akustická) vlna a zbylé laserové záření se na této vlně rozptyluje. V blízkosti kritického povrchu také může vedle iontové vlny místo rozptýleného laserového světla vzniknout elektronová plazmová (Lang-

muirova) vlna s frekvencí odpovídající příslušné hustotě plazmatu ω_{pe} . Tomuto jevu se říká rozpadová nestabilita, tj. laserové záření se úplně rozpadne.

V oblasti, kde hustota plazmatu je rovna čtvrtině kritické hustoty, tj. $n_c/4$, dochází primárně k rozpadu laserového záření do dvou elektronových plazmových vln (tzv. dvouplazmonový rozpad, jelikož plazmová vlna se po vzoru kvantové fyziky občas nazývá plazmon). Pokud je plazmová hustota nižší (nebo rovna) $n_c/4$, dochází k tzv. stimulovanému Ramanovu rozptylu, tj. z laserového záření vzniká Langmuirova vlna (opět s frekvencí odpovídající příslušné hustotě plazmatu ω_{pe}) a na této vlně se laserové záření rozptyluje. Ze zákona zachování energie pro frekvence (vlnové délky) účastníků se vln platí

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 ,$$

kde ω_0 je frekvence laseru, ω_1 a ω_2 jsou frekvence vzniklých vln (dle jednotlivých případů, tj. rozptýleného záření, elektronové či iontové vlny). Dále ze zákona zachování hybnosti pro vlnové vektory vyplývá,

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 ,$$

kde \mathbf{k}_0 je vlnový vektor laserového záření a \mathbf{k}_1 a \mathbf{k}_2 jsou opět vlnové vektory příslušející vzniklým vlnám či rozptýleného záření. Mezi frekvencí a velikostí vlnového vektoru laseru přibližně⁷ platí vztah

$$\omega = kc$$

a pro velikost vlnového vektoru a vlnové délky λ dostaneme

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} .$$

Elektronové plazmové vlny šířící se rychlostí, která je velmi blízká rychlosti laserového záření v plazmatu, mohou nést velmi silné elektrické pole o velikosti E a zpravidla míří střídavě v rámci jedné vlnové délky v plazmatu po a proti směru šíření. Velikost elektrického pole můžeme vyjádřit pomocí vztahu

$$E = \frac{mc\omega_{pe}}{e} .$$

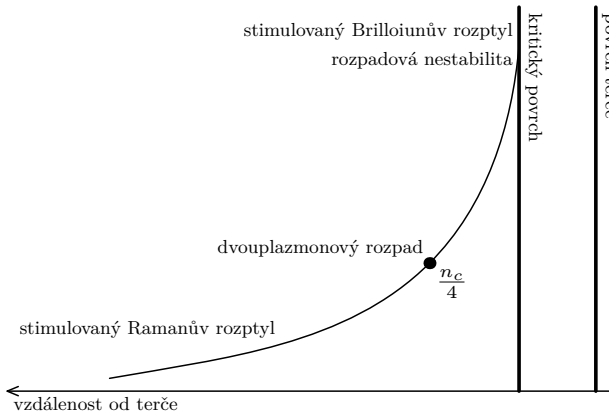
Tyto Langmuirovy vlny, šířící se ve směru k povrchu paliva, mohou zachytit plazmové elektrony a díky svému velkému elektrickému poli je mohou urychlit na velmi vysoké energie. Proto představují zdroj tzv. horkých elektronů, které mohou být tak energetické, že projdou dokonce i před čelo rázové vlny a mohou předežhát stlačované palivo, takže účinnost stlačení rázovou vlnou výrazně poklesne. Proto se chceme produkci horkých elektronů vyhnout.⁸

⁷Přesněji řečeno záleží na konkrétním disperzním vztahu. Zde uvedený vztah platí ve vakuu a v řídkých prostředích.

⁸Na druhou stranu, ve schématu tzv. zapálení rázovou vlnou mohou být horké elektrony (s ne příliš vysokou energií) prospěšné, protože předávají svoji energii těsně za čelo rázové vlny a tím ji ještě více zesilují.

Nicméně, i když jsou splněny hustotní podmínky, tyto nestability se nemusí vůbec objevit. K tomu, aby se vytvořily, je potřeba relativně vysoká intenzita laserového impulzu, tj. existuje tzv. práh pro růst těchto nestabilit. Další podmínkou pro rychlý nárůst nestabilit je přítomnost hustotních poruch. Pokud je plazma hladké, vznikají takové poruchy právě při interakci laseru s plazmatem. Na nich pak mohou nestability růst. V okamžiku, kdy porucha vyvolá nestabilitu, začne působit zpětně na poruchu tak, že se bude zvyšovat, a tím pádem nestabilita roste. Čím je laserový svazek intenzivnější, tím větší zárodečné poruchy vznikají. Tyto poruchy mohou být iniciovány také nehomogenitami intenzity v laserovém svazku, tzv. laserovými horkými skvrnami. Potlačení těchto horkých skvrn je důležitým předpokladem pro úspěšné zažehnutí fúzního hoření.

Tyto vysoce intenzivní nehomogenity se v laserových svazcích objeví při zesilování na vysoké energie. Instalací tzv. prostorových filtrů mezi jednotlivé zesilovače je možné svazek částečně vyhladit.⁹ Další vyhlazení profilu svazku je možné pomocí speciální optiky, jako je například tzv. fázová deska, která náhodně posunuje fáze malých oblastí uvnitř laserového svazku. Avšak jak již bylo řečeno výše, těchto nestabilit se není možné úplně zbavit, a to ani v případě, že laserový svazek bude perfektně homogenní a povrch palivové peletky dokonale hladký.



Obr. 49: Závislost kritické hustoty na vzdálenosti od terče.

Úloha IV.S ... svítíme

10 bodů

1. V jaké vzdálenosti od povrchu terče (předpokládejte, že je z uhlíku a pro laser o vlnové délce 351 nm) se nachází kritický povrch a v jaké vzdálenos-

⁹Prostorové filtry byly poprvé instalovány na fúzním laseru Cyclops v Lawrenceově laboratoři v Livermore v USA v roce 1975.

ti dochází ke vzniku dvouplazmonového rozpadu, pokud je charakteristická délka plazmatu¹⁰ 50 μm ? Dále předpokládejte

- (a) exponenciální pokles hustoty plazmatu s rostoucí vzdáleností od terče,
 - (b) lineární pokles hustoty plazmatu s rostoucí vzdáleností od terče.
2. Jakou musí mít elektrony energii, aby prošly od kritického povrchu ke skutečnému povrchu terče? Pro dosah elektronů v uhlíkovém plazmatu využijte empirický vztah $R = 0,9334E^{1,7567}$, kde E je v MeV a R je v $\text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$.
 3. Na jaké délce se elektrony v elektrickém poli plazmové vlny urychlí na tyto energie?
 4. Jaké vlnové délky rozptýleného světla můžeme pozorovat v případě stimulovaného Ramanova rozptylu pro laser o vlnové délce 351 nm?

(řešení str. 172)

Kapitola 5: Stabilizujeme

Základním předpokladem dosažení inerciální fúze je rovnoměrná komprese paliva, což v praxi znamená, že potřebujeme téměř dokonale sférickou symetrii imploze. Ve skutečnosti bohužel tato ideální situace nikdy nenastane. Důsledkem je, že konverze kinetické energie implodující slupky do vnitřní (tepelné) energie paliva je nedokonalá, a tak se snižuje účinnost komprese. Poruchy sférické symetrie imploze mohou způsobit turbulence, které někdy vedou i k rozpadnutí palivové peletky. Tyto nehomogenity také zvětšují povrch horké skvrny, takže dochází k jejímu rychlejšímu chladnutí, přičemž se v lepším případě hoření paliva nerozšíří dále do vnějších oblastí stlačené peletky, v horším dokonce nedojde ani k zapálení paliva. Maximální přijatelná vada symetrie povrchu stlačeného paliva je 33 %, pokud je větší, k fúzi vůbec nedojde. Ačkoli se toto číslo může zdát velké, klade náročně požadavky na homogenitu rychlostí kompresních rázových vln, která musí být lepší než 1 %. Největší nehomogenity paliva, se kterými se potýkáme prakticky od počátku výzkumu inerciální fúze, můžeme zahrnout mezi tzv. hydrodynamické nestability. O nich si více povíme v dnešním dílu seriálu.

Hydrodynamické nestability

Mezi nejvýznamnější hydrodynamické nestability patří tzv. Rayleighova-Taylorova nestabilita, které se budeme více věnovat. Mezi další patří Richtmyerova-Meškovova nestabilita, která se může objevit při průchodu rázové vlny rozhraním dvou prostředí, a Kelvinova-Helmholtzova nestabilita, která se v našem případě může vyvinout na hranici předchozích dvou nestabilit. Poruchy vytvořené v plazmatu se mohou rozpadnout či opětovně zmenšit, takže se plazma po čase vrátí do stabilní rovnováhy. Tohle ale není případ Rayleighovy-Taylorovy nestability (ani dalších jmenovaných), která se v prvních fázích svého vývoje exponenciálně rozrůstá, takže na kompresi paliva má naprosto devastující účinek.

¹⁰Hustota plazmatu n_e v závislosti na vzdálenosti od terče se typicky vyjadřuje jako funkce $n_e = f\left(\frac{x}{x_c}\right)$, kde x je vzdálenost od terče a x_c je tzv. charakteristická délka plazmatu, která představuje škálovací parametr od terče.

Kvůli exponenciálnímu růstu i zcela zdánlivě nepatrné narušení symetrie může zcela ohrozit celý proces stlačení a zapálení paliva. Proto je naprosto zásadní minimalizovat jakékoli asymetrie, které v podstatě mají dvě příčiny: nerovnoměrné osvětlení povrchu peletky a kvalita výroby palivové peletky. Splnění prvních podmínek vedlo k rozvoji tzv. nepřímého zapálení fúze, kdy se palivová peletka umístí do dutinky vyrobené z těžkého kovu. Laserový svazek dopadající na vnitřní povrch dutinky generuje intenzivní rentgenové záření, které má více homogenní rozložení intenzity než samotný laserový svazek. Splnění druhé podmínky je ale obtížnější. Během výrobního procesu palivové peletky a jejího plnění směsí deuteria s tritiem zůstává v místě plnění dírka jako po vpichu jehlou, která narušuje dokonalou symetrii.

Původní koncept Rayleighovy-Taylorovy nestability vychází z popisu jevu, ve kterém je v gravitačním poli umístěn systém dvou tekutin, z nichž těžší kapalina se nachází nad lehčí kapalinou. Během inerciální fúze je situace podobná, jen máme pouze jedinou kapalinu - plazma. Roli dvou tekutin o různých hustotách hraje plazma horké (s nižší hustotou) a chladné (s vyšší hustotou) a místo gravitace, která je v tomto případě zanedbatelná, vystupuje ablační tlak, který stlačuje peletku ke svému středu. Ablační tlak P , který závisí na intenzitě laserového záření I , můžeme vyjádřit vzorcem

$$P[\text{Mbar}] = 8,6 \left(\frac{I}{10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}} \right)^{2/3} \left(\frac{\lambda}{1 \mu\text{m}} \right)^{-2/3},$$

kde λ je vlnová délka laseru.

Růst Rayleighovy-Taylorovy nestability lze vyjádřit pomocí veličiny γ_{RT} , kde

$$\gamma_{RT}^2 = \frac{ka}{1 + kL},$$

kde L je délka hustotního gradientu na rozhraní dvou prostředí (ta může být v našem případě i velmi malá), a je zrychlení implodující slupky a k je velikost tzv. vlnového vektoru poruchy povrchu rozhraní ($k = 2\pi/\lambda_p$, kde λ_p je vlnová délka této poruchy, kterou si můžeme představit jako zvlnění popsateľné harmonickou funkcí). Amplituda vlny rozhraní se pak v čase vyvíjí jako $A \propto \exp(\gamma t)$, nestabilita tedy exponenciálně narůstá, jestliže je $\gamma_{RT}^2 > 0$. Pro $\gamma_{RT}^2 \leq 0$ sa amplituda vlny jenom periodicky mění, dostávame vlnu s konstantní amplitudou pohybující se po povrchu peletky.

Ablace má kromě urychlení povrchu peletky a spuštění imploze ještě jeden zajímavý účinek. Povrch peletky sa postupně vypařuje, aby nestabilita pretrvala, musí sa nestabilita šířit rychleji, než ablačný povrch. Pre tuto situaci tedy platí vztah

$$\gamma_{RT} = \sqrt{\frac{ka}{1 + kL}} - kv_{abl},$$

kde v_{abl} je rychlost ablace, přičemž k nestabilitě dojde jestli $\gamma_{RT} > 0$. Vplyvem ablace může dojít ke snížení růstu nestability či dokonce ke stabilizaci podmínek.

Podobný efekt na rychlost růstu nestability má i magnetické pole. To může alespoň ve směru magnetické indukce B rychlost růstu nestability snížit. Tuto skutečnost můžeme zapsat pomocí vztahu

$$\gamma_{RT} = \sqrt{\frac{ka}{1 + kL} - \frac{2B^2 k^2 \cos^2 \theta}{\mu_0(\rho_2 - \rho_1)}} - kv_{abl},$$

kde θ je úhel mezi magnetickým polem a vlnovým vektorem, μ_0 je permeabilita vakua a $\rho_{1,2}$ jsou hustoty jednotlivých prostředí (například ablátor a DT led). V současné době se vážně uvažuje o aplikaci silného magnetického pole (až "1 kT") na palivovou peletku, nejen z důvodu stabilizace hydrodynamických nestabilit, ale také proto, že se zvýší přenos energie z laseru do paliva a také transport energie z vnějších oblastí peletky do vnitřních. Celkově se tak zvýší účinnost inerciálního stlačení, takže bude možné dosáhnout vyššího zisku fúzní energie.

Úloha V.S ... stabilizujeme

10 bodů

- Jakou intenzitu musí mít laser o vlnové délce 351 nm, aby prostřednictvím ablace povrchu palivové peletky stabilizoval Rayleighovu-Taylorovu (RT) nestabilitu? Předpokládejte, že rozhraní ablátoru s DT ledem je vlnité s vlnovou délkou
 - 0,2 μm ,
 - 5 μm .
- Jak se změní intenzita laseru, pokud na peletku aplikujeme ještě magnetické pole o velikosti 5 T?
- Co dalšího může napomoci minimalizovat RT nestabilitu?

(řešení str. 175)

Kapitola 6: Laserujeme

Celý proces inerciální fúze začíná vytvořením příslušného svazku, který fúzní proces zahájí. Lasery však nejsou jedinou možností pro zapálení inerciální fúze. Předpokládá se, že pro produkci energie ve fúzních elektrárnách najdou uplatnění urychlovače iontů, a to zejména díky své vysoké opakovací frekvenci (MHz – ve srovnání s lasery, které mají 10 Hz). Avšak současně iontové urychlovače (a pravděpodobně ani ty vyvinuté v blízké budoucnosti) nedosáhnou takových proudů částic, aby započaly inerciální fúzi. Proto se věnujeme výzkumu zapálení pomocí laserů a pravděpodobně bude realizována i první demo-elektrárna využívající laserové svazky. V tomto dílu seriálu se proto podíváme, jak fungují lasery používané pro fúzi.

Budiž laserové světlo

Jak funguje laser si ukážeme na dvou systémech, které v současné době slouží k výzkumu inerciální fúze – NIF v Lawrenceově národní laboratoři v Livermore a OMEGA na univerzitě v Rochestru. Oba systémy mají tvarovatelný časový profil impulzu, proto jejich oscilátory – tj. zařízení, kde se vytváří laserové světlo – tomu musí být

přízpůsobeny.

Laser NIF začíná vláknovým oscilátorem, kde vlákno je dopováno atomy Yb a vyzářuje lineárně polarizované¹¹ světlo na vlnové délce 1053 nm. Tento oscilátor vyzářuje laserové světlo spojitě, tj. stimulovaná emise zde probíhá neustále. Říkáme, že je kontinuální. Oscilátor laseru NIF je spojitě čerpán infračervenými laserovými diodami. Z tohoto kontinuálního světla se vytvoří modulaci amplitudy krátký, zpravidla obdélníkový impuls o délce typicky 20 ns, který je pak zesilován na konečnou energii.

Na druhou stranu oscilátor laseru OMEGA je impulzní Q-spínaný oscilátor, kde laserujícím prostředím je impulzními výbojkami čerpaný krystal Nd:YLF. Délka tohoto vygenerovaného laserového impulsu je typicky 100 ns, aby z něj bylo možné vytvarovat impuls o délce několik desítek ns. Q-spínání funguje tak, že v oscilátoru máme umístěny tzv. Q-spínač, což je v případě OMEGA laseru akusticko-optický modulátor (AOM). Po přiložení napětí se v modulátoru vytvoří akustická vlna, která na světlo působí jako difrakční mřížka.

V případě Q-spínaného laseru čerpáme laserový krystal a vytváříme tak inverzní populaci. Q-spínač je v tomto okamžiku přepnutý takovým způsobem, že veškeré světlo (vzniklé spontánní emisí) odvede pryč z oscilátoru. Když se AOM sepne, světlo zůstane v oscilátoru a dojde k jeho zesílení stimulovanou emisí a vznikne laserové záření.

Laserový oscilátor vytvoří svazek o energii v řádu pJ až μ J. Jelikož na zapálení fúze potřebujeme energii několik MJ, musíme za oscilátor umístit zesilovací stupně. První zesilovač za oscilátorem zpravidla laserový impuls zesílí milionkrát, kdežto ty další, hlavně kvůli technologickým limitům (odvod tepla a chlazení, dostupná energie čerpání atd.), mají zesílení menší (desetkrát až stokrát). Zesilovače obou laserových systémů (NIF i OMEGA) jsou Nd-dopovaná skla, jelikož sklo má relativně dobré tepelné vlastnosti a dokážeme vyrobit prostorově velké díly, což není možné u krystalů.

Jelikož zesílení svazku na energii 1 MJ v impulsu je technologicky nemožné, laser NIF se skládá ze 192 laserových svazků (laser OMEGA ze 60), které synchronizovaně dopadají na palivovou peletku.

Mezi jednotlivými zesilovači jsou umístěny tzv. prostorové filtry, které, jak už název napovídá, vylepšují – vyhlazují – prostorový profil svazku tím, že odfiltrují nechtěné světelné nehomogenity. Prostorový filtr je v podstatě Keplerův teleskop, kde se v místě společného ohniska obou čoček nachází malá apertura, která propustí jen světlo s hladkým prostorovým profilem, takže nehomogenity jsou aperturou zastaveny. Zavedení prostorových filtrů ve vývoji fúzních laserů představovalo obrovský krok vpřed.

Poprvé byly instalovány na laseru Cyclops v roce 1975 kvůli zkušenosti z předchozího laseru jménem Long Path. Tam se při zesilování na vysoké energie (desítky J) pozorovaly výrazné nehomogenity ve svazku, které způsobovaly poškození zesilovačů. Tyto nehomogenity vznikají technologií čerpání – tepelnými toky v prostředí

¹¹Oscilátor může generovat v podstatě libovolnou polarizaci, případně i nepolarizované světlo, ale s lineárně polarizovaným se nejsnáze pracuje, proto jej většina laserových oscilátorů generuje.

zesilovače. Při vzniku nehomogenity v prostoru může při zesilování dojít k jejímu nelineárnímu fokusování a zesílení, což může dokonce způsobit poškození laserového zesilovače, pokud její intenzita překročí tzv. intenzitu prahu poškození.

Protože homogenita osvětlení palivové peletky je nezbytná pro její úspěšné stlačení, je věnováno velké úsilí vyhlazení laserového impulsu. Existuje několik technik, jak toho docílit. Všechny jsou zpravidla založeny na snížení koherence laserového záření, čímž se sníží pravděpodobnost, že tyto nehomogenity vytvoří na povrchu terče tzv. horkou skvrnu (nepleťte si to s horkou skvrnou vzniklou uprostřed palivové peletky), kde je velmi vysoká intenzita laseru. Jednu z těchto technik představuje užití tzv. náhodné (resp. kvazináhodné) fázové desky, která fázově posunuje malé části laserového profilu. Čím více těchto částí je, tím více se laserový profil vyhladí. Homogenní intenzita laserového svazku tak může dosáhnout požadované hodnoty ($10^{14} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$) pro optimální stlačení palivové peletky.

Úloha VI.S ... laserujeme

10 bodů

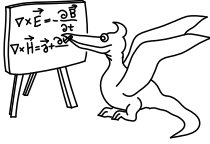
1. Jak velká musí být apertura prostorového filtru, jestliže jsme pro jeho sestavení použili čočku o průměru 40 cm a ohniskové vzdálenosti 4 m? Laserový svazek s gaussovským profilem má na vstupu průměr 30 cm a vlnovou délku 1 053 nm. Poloměr ohniska (tedy parametr σ) gaussovského svazku můžeme vypočítat podle vzorce

$$r = \frac{2}{\pi} \lambda \frac{f}{D},$$

kde D je průměr svazku, f je ohnisková vzdálenost čočky a λ je vlnová délka laseru.

2. Jakou energii musí mít laserový svazek, který je fokusován na povrch palivové peletky o poloměru 1 mm, aby byla dosažena intenzita v ohnisku $10^{14} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$? Poloměr ohniska je $25 \mu\text{m}$ a délka pulzu 10 ns. Kolik svazků celkem potřebujeme, abychom rovnoměrně pokryli povrch peletky? Jaká je jejich celková energie?
3. Jakou energii musí mít laserový, fokusovaný tak, že na povrchu peletky nemá ohnisko, ale průměr svazku odpovídá průměru peletky? Chceme s ním dosáhnout stejné intenzity, jako v předchozím případě. Předpokládejte, že takový svazek máme jeden a že je schopný homogenně ozářit celou peletku „ze všech stran“.

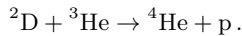
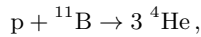
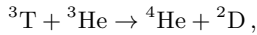
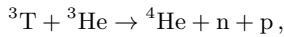
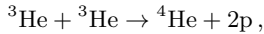
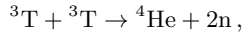
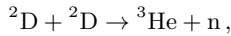
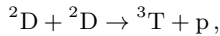
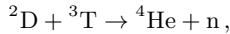
(řešení str. 177)



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I.S ... začínáme slučovat

1. Spočítejte energetický výtěžek následujících reakcí a kinetické energie produktů reakce



2. Pomocí grafu rychlosti výtěžku v textu seriálu pro vámi zvolenou teplotu odvoďte Lawsonovo kritérium pro dobu udržení inerciální fúze deuteria s deuteriem, protonu s borem a deuteria s heliem 3 a pro jednotlivé případy určete součin velikosti palivové peletky a hustotu stlačeného paliva. Mají tyto reakce nějakou výhodu oproti tradiční DT fúzi?
3. Určete, jak by vypadalo Lawsonovo kritérium pro nemaxwellovské rozdělení rychlostí, kdyby kinetická energie částic byla
 - (a) $E_k = k_B T^\alpha$,
 - (b) $E_k = aT^3 + bT^2 + cT$.

Byla by takováto fúze vůbec realizovatelná? Pokud ano, jaké by mělo být palivo (fúzní reakce), jak velká by měla být palivová peletka a na jakou hustotu by se měla stlačit?

Část 1

Ako jednotku hmotnosti budeme používať u, atómovú hmotnostnú konštantu, pričom platí, že $1 \text{ u} = 931,494\,102\,42 \text{ MeV} \cdot \text{c}^{-2} = 1,660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, ak by

vám bolo príjemnejšie počítat vo $V \cdot c^{-2}$ alebo kg. Ako prvé si potrebujeme zistiť hmotnosti jednotlivých izotopov a hmotnosť neutrónu. My sme použili¹

$$\begin{aligned} M_{1\text{H}} &= 1,007\,825\text{ u}, & M_{2\text{D}} &= 2,014\,102\text{ u}, \\ M_{3\text{T}} &= 3,016\,049\text{ u}, & M_{3\text{He}} &= 3,016\,029\text{ u}, \\ M_{4\text{He}} &= 4,002\,603\text{ u}, & M_{11\text{B}} &= 11,009\,305\text{ u}, \\ M_{\text{n}} &= 1,008\,664\,915\text{ u}, \end{aligned}$$

ale pozor, tieto hmotnosti sú hmotnosti celého atómu, a to vrátane obalu, tj. elektrónov, ktoré sa na jadrových reakciách nezúčastňujú. Preto od týchto hmotností musíme odčítať hmotnosti príslušného počtu elektrónov,² pričom $M_{\text{e}} = 5,485\,799\,090\,7 \cdot 10^{-4}\text{ u}$, a tak dostávame

$$\begin{aligned} M_{1\text{H}} &\approx M_{\text{p}} = 1,007\,276\,42\text{ u}, & M_{2\text{D}} &= 2,013\,553\,42\text{ u}, \\ M_{3\text{T}} &= 3,015\,500\,42\text{ u}, & M_{3\text{He}} &= 3,014\,931\,84\text{ u}, \\ M_{4\text{He}} &= 4,001\,505\,84\text{ u}, & M_{11\text{B}} &= 11,006\,562\,1\text{ u}. \end{aligned}$$

Teraz nám zostáva už len dosadiť do jednotlivých rovníc hmotnosti jadier a spočítať rozdiel energií, vid Tab. 15.

Tab. 15: Tabuľka energetického zisku ΔE pre jednotlivé reakcie, kde M_i je hmotnosť reaktantov, M_o hmotnosť produktov a ΔM je rozdiel M_i a M_o .

reakcia	$\frac{M_i}{\text{u}}$	$\frac{M_o}{\text{u}}$	$\frac{\Delta M}{\text{u}}$	$\frac{\Delta E}{\text{MeV}}$
${}^2\text{D} + {}^3\text{T} \longrightarrow {}^4\text{He} + \text{n}$	5,029 053 84	5,010 170 755	0,018 883 085	17,589
${}^2\text{D} + {}^2\text{D} \longrightarrow {}^3\text{T} + \text{p}$	4,027 106 84	4,022 776 887	0,004 329 953 47	4,033
${}^2\text{D} + {}^2\text{D} \longrightarrow {}^3\text{He} + \text{n}$	4,027 106 84	4,023 596 755	0,003 510 085	3,270
${}^3\text{T} + {}^3\text{T} \longrightarrow {}^4\text{He} + 2\text{n}$	6,031 000 84	6,018 835 67	0,012 165 17	11,332
${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \longrightarrow {}^4\text{He} + 2\text{p}$	6,029 863 68	6,016 058 773	0,013 804 906 94	12,859
${}^3\text{T} + {}^3\text{He} \longrightarrow {}^4\text{He} + \text{n} + \text{p}$	6,030 432 26	6,017 447 222	0,012 985 038 47	12,095
${}^3\text{T} + {}^3\text{He} \longrightarrow {}^4\text{He} + {}^2\text{D}$	6,030 432 26	6,015 059 26	0,015 373	14,320
$\text{p} + {}^{11}\text{B} \longrightarrow 3\,{}^4\text{He}$	12,013 838 57	12,004 517 52	0,009 321 046 53	8,682
${}^2\text{D} + {}^3\text{He} \longrightarrow {}^4\text{He} + \text{p}$	5,028 485 26	5,008 782 307	0,019 702 953 47	18,353

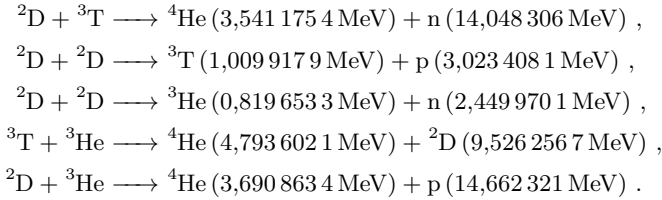
Pre výpočet kinetických energií produktov potrebujeme vedieť dve základné pravidlá:

1. Hybnosť produktov pri dvoj-produktových reakciách je rovnaká $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$, teda $m_1 |v_1| = m_2 |v_2|$.
2. Súčet kinetických energií produktov je rovný uvoľnenej energii $\Delta E = E_{k1} + E_{k2}$.

¹https://www.chem.ualberta.ca/~massspec/atomic_mass_abund.pdf

²Tento postup nie je úplne správny, pretože zanedbávame väzobnú energiu elektrónu.

Na základe týchto pravidiel môžeme odvodiť vzťah pre dvoj-produktové reakcie. Prvý produkt reakcie bude mať energiu $E_{k1} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \Delta E$ a druhý $E_{k2} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \Delta E$. Potom dostávame



Pre troj a viac produktové reakcie toto rozdelenie energií nie je možné numericky spočítať, pretože $\sum_{i=0}^N m_i v_i = 0$ a produkty majú spojité spektrum energií, v ktorých sa môžu pohybovať.

Časť 2

Do vzťahu

$$n\tau > \frac{12k_{\text{B}}T}{\langle v\sigma \rangle Q}$$

môžeme dosadiť vzťahy pre rýchlosť rázovej vlny $\tau = \frac{R}{c_s}$ a hustotu častíc $n = \frac{\rho}{m}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\rho R}{mc_s} &> \frac{12k_{\text{B}}T}{\langle v\sigma \rangle Q} , \\ \rho R &> \frac{12mc_s k_{\text{B}}T}{\langle v\sigma \rangle Q} = n\tau mc_s . \end{aligned}$$

My sme pre jednotlivé prípady zvolili rovnakú hodnotu $\langle v\sigma \rangle = 5 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ a pre ňu sme z grafu odčítali príslušnú teplotu $T_{\text{DD}} = 45 \text{ keV}$, $T_{\text{pB}} = 80 \text{ keV}$ a $T_{\text{DHe}} = 30 \text{ keV}$.

Keďže teplota je už prevedená do eV, tak Lawsonovo kritérium a vzťah pre veľkosť paletky prechádzajú do tvaru

$$n\tau > \frac{12T_{\text{eV}}}{\langle v\sigma \rangle Q} .$$

V týchto rovniciach už len potrebujeme zistiť hmotnosti jednotlivých atómov a z nich vypočítať priemernú hustotu paliva. K tomu môžeme použiť zistené hmotnosti atómov z prvej časti úlohy, pričom $1 \text{ u} = 1,660\,539\,04 \cdot 10^{-24} \text{ g}$.

Pre DD reakciu tak máme dva možné scenáre s produktami ${}^3\text{T} + \text{p}$ alebo ${}^3\text{He} + \text{n}$. Tieto reakcie majú rovnakú pravdepodobnosť, no my si ich spočítame samostatne. Lawsonovo kritérium pre ${}^3\text{T} + \text{p}$ je po dosadení

$$n\tau > \frac{12T}{\langle v\sigma \rangle Q} = \frac{12 \cdot 45 \text{ keV}}{5 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot 4,033 \text{ MeV}} \doteq 2,67 \cdot 10^{15} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3} ,$$

a pre ${}^3\text{He} + \text{n}$ po dosadení

$$n\tau > \frac{12T}{\langle v\sigma \rangle Q} = \frac{12 \cdot 45 \text{ keV}}{5 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot 3,270 \text{ MeV}} \doteq 3,30 \cdot 10^{15} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

Palivo tvorí v tomto prípade len ${}^2\text{D}$ a teda $m = m_{\text{D}}$ a po prevedení na g dostávame $m \doteq 3,34 \cdot 10^{-24} \text{ g}$. Po dosadení pre ${}^3\text{T} + \text{p}$ máme

$$\rho R > n\tau m c_s = 2,67 \cdot 10^{15} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot 3,34 \cdot 10^{-24} \text{ g} \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 89,2 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$$

a pre ${}^3\text{He} + \text{n}$

$$\rho R > n\tau m c_s = 3,30 \cdot 10^{15} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot 3,34 \cdot 10^{-24} \text{ g} \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 110 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Obdobne postupujeme aj v prípade $\text{p} + {}^{11}\text{B}$, len s rozdielom, že tu môže nastať iba jeden typ reakcie. Lawsonovo kritérium nadobúda pre tento prípad hodnotu

$$n\tau > \frac{12T}{\langle v\sigma \rangle Q} = \frac{12 \cdot 80 \text{ keV}}{5 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \cdot 8,682 \text{ MeV}} \doteq 2,21 \cdot 10^{15} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

Teraz je palivo zložené z p a ${}^{11}\text{B}$ a teda $m = \frac{1}{2}(m_{\text{p}} + m_{\text{B}})$ a po prevedení na g dostávame $m \doteq 9,97 \cdot 10^{-24} \text{ g}$. Po dosadení pre súčin veľkosti paletky a hustoty dostávame

$$\rho R > n\tau m c_s = 2,21 \cdot 10^{15} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot 9,97 \cdot 10^{-24} \text{ g} \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 220 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Rovnako ako v predchádzajúcom prípade môže u $\text{D} + {}^3\text{He}$ nastať opäť len jeden prípad. Lawsonovo kritérium pre nami zvolené je

$$n\tau > \frac{12T}{\langle v\sigma \rangle Q} = \frac{12 \cdot 30 \text{ keV}}{5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \cdot 18,353 \text{ MeV}} \doteq 3,92 \cdot 10^{14} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

Pre tento prípad je palivo zložené z D a ${}^3\text{He}$ a teda $m = \frac{1}{2}(m_{\text{D}} + m_{\text{H}})$ a po prevedení na g dostávame $m \doteq 4,18 \cdot 10^{-24} \text{ g}$.

$$\rho R > n\tau m c_s = 3,92 \cdot 10^{14} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot 4,18 \cdot 10^{-24} \text{ g} \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 16,4 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Na základe týchto výsledkov vidíme ako sú výhodné reakcie pre nami zvolené parametre. Asi najpodstatnejšie je vidieť, že hodnoty sa líšia najviac o jeden a pol rádu.

Časť 3

Do vzťahu z textu seriálu

$$2nE_k < \frac{n^2}{4} \langle v\sigma \rangle \tau Q$$

dosadíme za E_k jednotlivé vztahy zo zadania. Najskôr riešme prípad, kedy $E_k = k_B T^\alpha$ a upravujeme

$$\begin{aligned} 2nk_B T^\alpha &< \frac{n^2}{4} \langle v\sigma \rangle \tau Q, \\ 2k_B T^\alpha &< \frac{n\tau}{4} \langle v\sigma \rangle Q, \\ n\tau &> \frac{8k_B T^\alpha}{\langle v\sigma \rangle Q}. \end{aligned}$$

Ako vidíme z výsledného vzťahu pre $\alpha = 1$ dostávame maxwellovské rozdelenie líšiace sa až na konštantu. Pre $\alpha < 1$ môžeme povedať, že $T^\alpha < T$ a teda aj celý výraz na pravej strane bude menší ako pri maxwellovskom rozdelení, takže potrebné $n\tau$ môže byť menšie. Obdobne pre $\alpha > 1$ musí byť $n\tau$ väčšie. Obdobne postupujeme aj pre $E_k = aT^3 + bT^2 + cT$

$$\begin{aligned} 2nk_B (aT^3 + bT^2 + cT) &< \frac{n^2}{4} \langle v\sigma \rangle \tau Q, \\ 2k_B (aT^3 + bT^2 + cT) &< \frac{n\tau}{4} \langle v\sigma \rangle Q, \\ n\tau &> \frac{8k_B (aT^3 + bT^2 + cT)}{\langle v\sigma \rangle Q}. \end{aligned}$$

Naopak v tomto prípade pre $a, b > 0$ platí $aT^3 + bT^2 + cT > T$ pre všetky T , a teda potrebné $n\tau$ je väčšie ako pre maxwellovské rozdelenie.

Úloha II.S ... stlačujeme

Jakou energiou musí mať laserový impulz trvajúci 10 ns, aby jím vytvorená rázová vlna bola schopná ohriať plazmu na teplotu, pri níž môže dojsť k termojaderné fúziónej reakcii? Jakou hustotou bude mať stlačené palivo?

Poznámka Pripokládejte, že počáteční plazma je jednoatomový ideální plyn.

Termojadrová fúzia môže nastať, pokiaľ teplota plazmy prekročí 5 keV. Pri predpoklade jednoatómového plynu $\gamma = 5/3$ spočítame Machovo číslo M , z ktorého zistíme rýchlosť rázovej vlny

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_0} &= 1 + \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \frac{\gamma M^2 + 1}{M^2} (M^2 - 1), \\ \frac{(\gamma + 1)^2}{2\gamma} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) M^2 &= \gamma M^4 - \gamma M^2 + M^2 - 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že sa jedná o bikvadratickú rovnicu s neznámou M^2 , upravíme ju teda na tvar

$$\gamma M^4 - \left[(\gamma - 1) + \frac{(\gamma + 1)^2}{2\gamma} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) \right] M^2 - 1 = 0,$$

ktorý odpovedá rovnici $ax^4 + bx^2 + c = 0$ s koeficientami

$$\begin{aligned} a &= \gamma, \\ b &= -(\gamma - 1) - \frac{(\gamma + 1)^2}{2\gamma} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right), \\ c &= -1. \end{aligned}$$

Pre M potom platí

$$M = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \approx \pm \frac{\gamma + 1}{\gamma} \sqrt{\frac{T_1}{2T_0}}.$$

Za predpokladu, že uvažujeme len kladné riešenia, a po dosadení hodnôt $T_0 = 20$ K, $T_1 = 5 \cdot 10^7$ K a $\gamma = 5/3$, získavame $M \doteq 1790 \approx 1800$.

Pre výpočet rýchlosti rázovej vlny potrebujeme ešte vypočítať rýchlosť zvuku, tú určíme pomocou vzťahu

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{M_i}},$$

kde $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ kg·m²·s⁻²·K⁻¹ je Boltzmannova konštanta, $T = T_0 = 20$ K a M_i je priemerná hmotnosť deutéria a trícia, teda

$$M_i = \frac{M_D + M_T}{2} = \frac{3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg} + 5,01 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{2} = 4,17 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Po dosadení dostávame $c_s = 332$ m·s⁻¹, z toho už môžeme vypočítať rýchlosť rázovej vlny $v_{rv} = M c_s \doteq 594\,000$ m·s⁻¹ ≈ 600 km·s⁻¹.

Aby sme získali energiu laserového pulzu, budeme vychádzať zo vzťahu pre rýchlosť rázovej vlny

$$v_{rv} = \left(\frac{E_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}} t^{-\frac{3}{5}}$$

za predpokladu počítateľnej hustoty DT paliva 0,225 g/cm³. Energiu laserového pulzu môžeme vyjadriť ako

$$E_0 = \rho t^3 v_{rv}^5,$$

dosadením $t = 10$ ns = 10^{-8} s dostávame energiu $E_0 \doteq 17$ MJ. Vzhľadom na vysokú mocninu rýchlosti rázovej vlny vo výpočte sa však jedná skôr o rádový odhad – potrebujeme energiu v ráde desiatok MJ.

Ak chceme spočítať hustotu paliva ρ_1 , ktorú je možné získať rázovou vlnou, použijeme vzťah (24) ze seriálu. Na to budeme musieť poznať počiatkový p_0 a konečný p_1 tlak.

Za predpokladu ideálneho plynu môžeme vyjsť zo stavovej rovnice $pV = nRT$, kde R je univerzálna plynová konštanta. Látkové množstvo si môžeme vyjadriť ako $n = \frac{m}{M_m}$ (kde M_m je molárna hmotnosť) a dostávame

$$p_0 V = \frac{m}{M_m} RT,$$

přičom $\rho_0 = m/V$, čo je naša počiatková hustota. Po úprave dostávame

$$p_0 = \frac{\rho_0}{M_m} RT.$$

Môžeme dosadiť $T = 20 \text{ K}$, $M_m = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ a $\rho_0 = 0,225 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ pre DT palivo, čím dostávame $p_0 = 15 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Konečný tlak získame z rovnice

$$p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 v_{rv}^2 \doteq 5,95 \cdot 10^{13} \text{ Pa} \approx 6 \cdot 10^{13} \text{ Pa}.$$

Nakoniec dosadíme do vzťahu pre pomer hustôt

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_0}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_0} \approx \frac{(\gamma + 1)p_1}{(\gamma - 1)p_1} = 4.$$

Vzhľadom k veľkosti tlakov, kde konečný tlak bol približne o 7 rádov väčší než počiatkový, sa tento výsledok dal očakávať.

Úloha III.S ... hoříme

1. Určete (s pomocí obrázku 50) dosah jader helia v centrální horké skvrně.
2. Jaká energie se musí uvolnit fúzními reakcemi, aby se hoření paliva rozšířilo do nejbližší slupky peletky? Jak tlustá je tato slupka?
3. Odhadněte, jaká je nejpravděpodobnější přenesená energie z jádra helia na deuterium. Kolik srážek průměrně podstoupí jádro helia v centrální horké skvrně předtím, než se zastaví?

Dosah jadier helia

Z prvního dílu seriálu víeme, že při DT reakci si ${}^4\text{He}$ odnesie energii $E = 3,541 \text{ MeV}$, čomu v grafe 50 odpovídá³ $R = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ g}\cdot\text{cm}^{-2}$. Pre dosah l alfa platí

$$l = \frac{R}{\rho} = 0,08 \mu\text{m},$$

kde z druhého dílu seriálu víeme, že hustota po stlačení je približne $\rho = 100 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$.

Prehorenie paliva do najbližšej šupky

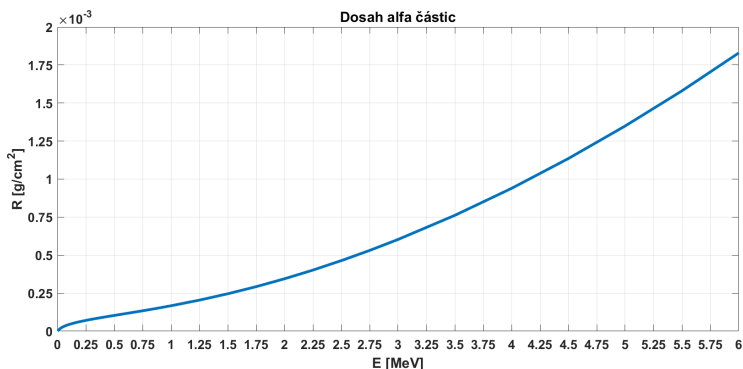
V druhej časti vyjdeme zo vzťahu

$$q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

přičom za q dosadíme známe

$$q = \frac{Q}{tS},$$

³Pozor na 10^{-3} nad osou y grafu.



Obr. 50: Závislost tzv. dosahu jader helia v deuteriu na jejich energii. Dosah je obvykle normován na hustotu daného materiálu udávanou v $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$, proto je jeho jednotka udávána v $\text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$.

kde t je doba prenosu energie a S je plocha, cez ktorú tok energie prebieha. V našom prípade sa jedná o povrch gule s polomerom r a Q je energia prúdiaca cez túto plochu. Nás zaujíma iba celkové množstvo energie, záporné znamienko tým pádom môžeme vypustiť, po dosadení dostávame

$$\frac{Q}{4\pi r^2 t} = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Pri výpočte energie Q vyjdeme z toho, že horí centrálna horúca škvrna, o polomere $r = 1\ \mu\text{m}$. Pri jednej fúznej reakcii sa uvoľní $Q_1 = 3,54\ \text{MeV}^4$. Počet reakcií v objeme $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, za predpokladu, že všetky reakcie prebehnú, je rovný počtu atómov n_D resp. n_T . Keďže sa počty atómov rovnajú použijeme označenie iba $n = n_D = n_T$. Táto škvrna má hmotnosť

$$m_0 = V\rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho,$$

kde $\rho = 100\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Označme postupne 1m_D a 1m_T ako hmotnosť jednotlivých atómov, hmotnosť reakčných produktov k jednej reakcii je ${}^1m_0 = {}^1m_D + {}^1m_T$. Pre počet reakcií platí

$$n = \frac{m_0}{{}^1m_0} = \frac{4}{3} \frac{\pi r^3 \rho}{{}^1m_D + {}^1m_T}.$$

Po dosadení dostávame celkový počet reakcií $n = 5 \cdot 10^{13}$ a celkovú uvoľnenú energiu z objemu $Q = nQ_1 = 17,7 \cdot 10^{10}\ \text{GeV} = 28,35\ \text{J}$.

Celá reakcia trvá približne $t = 200\ \text{ps}$, avšak tento čas je čas potrebný na prehorenie celej paletky, čas samotného horenia vrstvy je v rádoch jednotiek ps,

⁴Počítame len energiu ${}^4\text{He}$, pretože n vyletia z horúcej škvvrny bez interakcie.

uvažujme $t = 1$ ps. Na zapálení reakcie, ako už vieme, potrebujeme teplotu $T = 5 \text{ keV} - 10 \text{ keV}$. Posledným neznámym ostáva parameter κ , ten je dohľadateľný na internete

$$\kappa = \frac{AT^{\frac{5}{2}}}{\ln \Lambda},$$

pričom $\ln \Lambda$ sa nazýva Coulombický logaritmus, ktorý nadobúda hodnôt medzi 5 a 15, my ho položíme rovný 10^5 , T je teplota v keV, A je konštanta rovná $A = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{keV}^{-\frac{7}{2}}$ a dosadením

$$\kappa = \frac{9,5 \cdot 10^{12} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{keV}^{-\frac{7}{2}} \cdot (10 \text{ keV})^{\frac{5}{2}}}{10} \doteq 3 \cdot 10^{14} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{keV}^{-1}.$$

Ak uvažujeme $T = 10 \text{ keV}$, dostávame

$$\Delta x = \kappa \frac{4\pi r^2 t \Delta T}{Q} = 3 \cdot 10^{14} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{keV}^{-1} \cdot 4\pi \cdot (1 \cdot 10^{-4} \text{ cm})^2 \cdot 1 \cdot 10^{-12} \text{ s} \cdot 10 \text{ keV} \cdot \frac{1}{28,35 \text{ J}}.$$

Po vyčíslení dostávame, že šupka, do ktorej palivo prehorí, je hrubá približne $1,30 \mu\text{m}$.

Prenos energie z jadra ${}^4\text{He}$ na D

V tretej časti je potrebné uvedomiť si, že parameter b je závislý na hustote častíc ξ , pričom $b = \sqrt[3]{\xi^{-1}}$. Hustotu častíc ξ vieme vypočítať z predchádzajúcej časti ako

$$\xi = \frac{n}{V},$$

pričom n je, rovnako ako v predchádzajúcom prípade, celkový počet častíc, a V je objem centrálnej škrvny. Po dosadení z predchádzajúcej časti

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{V\rho}{V^1 m_0} = \frac{\rho}{m_0}, \\ b &= \sqrt[3]{\frac{m_0}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{8,35 \cdot 10^{-24} \text{ g}}{1 \cdot 10^8 \text{ g}\cdot\text{m}^{-3}}} \doteq 4,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \end{aligned}$$

Náletový uhol spočítame ako

$$\frac{\theta}{2} = \cotg^{-1} \left(\frac{8\pi\epsilon_0 E_k b}{Q_{\text{He}} Q_{\text{H}}} \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{Q_{\text{He}} Q_{\text{H}}}{8\pi\epsilon_0 E_k b} \right).$$

Pre jednoduchosť zavedme B a vyčíslime

$$B = \frac{Q_{\text{He}} Q_{\text{H}}}{8\pi\epsilon_0 E_k b} = \frac{2 \text{ e} \cdot 1 \text{ e}}{8 \cdot \pi \cdot 55,26 \text{ e}^2 \cdot \text{GeV}^{-1} \cdot \text{fm}^{-1} \cdot 3,54 \cdot 10^{-3} \text{ GeV} \cdot 4,3 \cdot 10^4 \text{ fm}} \doteq 9,465 \cdot 10^{-6},$$

po dosadení do rovnice pre prenos energie dostávame

$$Q = 2 \frac{\mu^2}{m_{\text{H}}} v_{\text{He}}^2 \sin^2(\text{tg}^{-1} B),$$

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb_collision

přičom zo známeho vzorca vieme, že

$$\sin(\operatorname{tg}^{-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Vzťah upravíme na

$$Q = 2 \frac{\mu^2}{m_{\text{H}}} v_{\text{He}}^2 \left(\frac{B}{\sqrt{B^2 + 1}} \right)^2,$$

kde v spočítame z $E = \frac{1}{2}mv^2$,

$$\begin{aligned} Q &= 4 \frac{\mu^2}{m_{\text{H}}} \frac{E_{4\text{He}}}{m_{\text{He}}} \left(\frac{B}{\sqrt{B^2 + 1}} \right)^2 = 4E_{4\text{He}} \frac{(m_{\text{H}}m_{\text{He}})^2}{m_{\text{H}}m_{\text{He}}(m_{\text{H}} + m_{\text{He}})^2} \frac{B^2}{B^2 + 1} = \\ &= 4E_{4\text{He}} \frac{(m_{\text{H}}m_{\text{He}})}{(m_{\text{H}} + m_{4\text{He}})^2} \frac{B^2}{B^2 + 1} = 5,7 \cdot 10^{-11} E_{4\text{He}} \doteq 214 \mu\text{eV}. \end{aligned}$$

Ak vychádzame z predpokladu, že pri každej zrážke sa stratí rovnako veľa energie, potrebujeme $(13,4 \cdot 10^{-12})^{-1} = 18 \cdot 10^9$ zrážok. Ak však predpokladáme, že strata energie je postupná, výsledná energia po i -tej zrážke je $E_i = (1 - 5,7 \cdot 10^{-11})^i E$. Ak si napr. stanovíme limit 10 % počiatočnej energie a ľahko si dopočítame počet zrážok

$$\begin{aligned} 0,1E &= (1 - 5,7 \cdot 10^{-11})^i E, \\ \frac{\log_{10}(0,1)}{\log_{10}(1 - 5,7 \cdot 10^{-11})} &= i, \\ i &= 4 \cdot 10^{10}. \end{aligned}$$

Vidíme, že ${}^4\text{He}$, resp. alfa častice neprenesú skoro žiadnu energiu na D, resp. T. Naskytuje sa otázka, ako sa energia prenáša do ďalších vrstiev, resp. ako sa horenie paliva rozširuje. Vysvetlením je, že alfa častice prenášajú svoju energiu na elektróny a tie naspäť na D a T a tým dochádza k prenosu energie.

Úloha IV.S ... svítíme

1. V jaké vzdálenosti od povrchu terče (predpokládejte, že je z uhlíku a pro laser o vlnové délce 351 nm) se nachází kritický povrch a v jaké vzdálenosti dochází ke vzniku dvouplazmonového rozpadu, pokud je charakteristická délka plazmatu⁶ 50 μm? Dále předpokládejte
 - (a) exponenciální pokles hustoty plazmatu s rostoucí vzdáleností od terče,
 - (b) lineární pokles hustoty plazmatu s rostoucí vzdáleností od terče.
2. Jakou musí mít elektrony energii, aby prošly od kritického povrchu ke skutečnému povrchu terče? Pro dosah elektronů v uhlíkovém plazmatu využijte empirický vztah $R = 0,9334E^{1,7567}$, kde E je v MeV a R je v $\text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$.

⁶Hustota plazmatu n_e v závislosti na vzdálenosti od terče se typicky vyjadřuje jako funkce $n_e = f\left(\frac{x}{x_c}\right)$, kde x je vzdálenost od terče a x_c je tzv. charakteristická délka plazmatu, která představuje škálovací parametr od terče.

3. Na jaké délce se elektrony v elektrickém poli plazmové vlny urychlí na tyto energie?
4. Jaké vlnové délky rozptýleného světla můžeme pozorovat v případě stimulovaného Ramanova rozptylu pro laser o vlnové délce 351 nm?

Označme n_{e0} elektrónovú hustotu pre uhlíkovú plazmu. V našom prípade predpokladáme, že úplne vyionizujeme uhlík, teda na jedno jadro uhlíka bude pripadať 6 elektrónov. Hustotu atómov spočítame ako $N = \rho_C/m_C$, pričom ρ_C je hustota uhlíka, a m_C je hmotnosť jedného atómu uhlíka. Po dosadení dostávame $n_{e0} = 6\rho_C/m_C = 6,8 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3}$. Dosadíme do vzťahu z textu seriálu

$$n_c = \frac{m\varepsilon_0\omega_0^2}{e^2},$$

$$n_c = \frac{0,5 \text{ MeV}}{c^2} 55 e^2 \text{ GeV}^{-1} \text{ fm}^{-1} \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 = 8,8 \cdot 10^{21} \text{ cm}^{-3}.$$

Lineárny pokles vyjadríme vzťahom

$$n_c = n_{e0} \left(1 - \frac{x}{x_c}\right),$$

kde x_c je charakteristická dĺžka v plazme. Pre polomer kritického povrchu máme

$$x = x_c \left(1 - \frac{n_c}{n_{e0}}\right) = 49,4 \mu\text{m}.$$

Obdobne exponenciálny pokles

$$n_c = n_{e0} e^{-\frac{x}{x_c}},$$

konkrétne

$$x = x_c \ln\left(\frac{n_{e0}}{n_c}\right) = 220 \mu\text{m}.$$

Pre dvojpplazmónový rozpad platia rovnaké vzťahy, pričom len položíme n_c rovné štvrtine oproti prvej časti. Pre lineárny pokles dostávame $x = 49,8 \mu\text{m}$ a pre exponenciálny $x = 290 \mu\text{m}$. Pri porovnaní hodnôt a po konzultácii s náčrtkom v texte seriálu je zjavné, že exponenciálny popis je v tomto prípade nutný/správny.

Pokračujme v riešení druhej podúlohy. Veličina R je definovaná pomocou hustoty plazmy a spočítame ju ako

$$R = \int_0^x \rho \, dl.$$

Ak predpokladáme, že hustota ρ je závislá na l rovnako ako n_e , tak môžeme napísať

$$R = \int_0^x \rho_0 e^{-\frac{l}{x_c}} \, dl.$$

Keďže $x \gg x_c$, môžeme zmeniť integračné medze na

$$R = \int_0^{\infty} \rho_0 e^{-\frac{l}{x_c}} dl,$$

$$R = \left[-x_c \rho_0 e^{-\frac{l}{x_c}} \right]_0^{\infty},$$

$$R = x_c \rho_0.$$

Pre zasiahanie terča potrebujeme elektróny aspoň s takýmto dosahom. Ďalej vyjadříme E z empirického vzťahu zo zadania a dosadíme

$$E = \left(\frac{R}{0,9334} \right)^{1/1,7567},$$

$$E = \left(\frac{x_c \rho_0}{0,9334} \right)^{1/1,7567},$$

$$E \doteq 80 \text{ keV}.$$

Elektróny musia mať energiu aspoň 80 keV, aby zasiahli povrch terča.

K urýchleniu elektrónov na túto energiu pomocou plazmových vln využijeme vzťah z textu seriálu pre intenzitu elektrického poľa

$$E = \frac{mc\omega_{pe}}{e},$$

kde plazmovú frekvenciu vypočítame ako

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{m\varepsilon_0}}.$$

Nás zaujíma hlavne urýchlenie na vysoké energie v oblasti kritického povrchu, teda $n_e = n_c$, čo po dosadení dáva

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 \frac{m\varepsilon_0 \omega_0^2}{e^2}}{m\varepsilon_0}},$$

$$\omega_{pe} = \omega_0.$$

Dráhu, na ktorej sa elektrón urýchli spočítame ako $l = \frac{U}{E}$, kde $U = 80 \text{ kV}$ pretože elektrón má náboj 1 e. Po dosadení

$$l = \frac{U}{mc\omega_0},$$

$$l = \frac{80 \text{ kV}}{\frac{500 \text{ keV}}{c^2} \frac{c}{\lambda} \frac{2\pi c}{\lambda}},$$

$$l \doteq 9 \text{ nm}.$$

Vieme, že k stimulovanému Ramanovmu rozptylu dochádza pri $n_e < \frac{n_c}{4}$. Zo zákona zachovania energie platí $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$, kde v našom prípade je $\omega_1 = \omega_{pe}$ pre $n_e < \frac{n_c}{4}$, a $\omega_2 = \frac{2\pi c}{\lambda_R}$, kde λ_R je vlnová dĺžka, ktorú Ramanov rozptyl môže dosiahnuť.

Po dosadení $n_e = \frac{n_c}{4}$ do vzťahu

$$\begin{aligned}\omega_{pe} &= \sqrt{\frac{e^2 n_e}{m \epsilon_0}}, \\ \omega_{pe} &= \sqrt{\frac{e^2 \frac{n_c}{4}}{m \epsilon_0}}, \\ \omega_{pe} &= \frac{\omega_0}{2}.\end{aligned}$$

Vidíme, že polovica energie ide do plazmy, z toho logicky druhá polovica do Ramanovho rozptylu. Odtiaľto vyplýva, že frekvencia bude polovičná ako je frekvencia laseru, teda vlnová dĺžka je dvojnásobná $\lambda_R = 702 \text{ nm}$. Stimulovaný Ramanov rozptyl môžeme pozorovať na vlnových dĺžkach 702 nm až 351 nm.

Úloha V.S ... stabilizujeme

1. Jakou intenzitu musí mít laser o vlnové délce 351 nm, aby prostřednictvím ablace povrchu palivové peletky stabilizoval Rayleighovu-Taylorovu (RT) nestabilitu? Předpokládejte, že rozhraní ablatoru s DT ledem je vlnité s vlnovou délkou
 - (a) 0,2 μm ,
 - (b) 5 μm .
2. Jak se změní intenzita laseru, pokud na peletku aplikujeme ještě magnetické pole o velikosti 5 T?
3. Co dalšího může napomoci minimalizovat RT nestabilitu?

Podľa vzťahu z textu seriálu

$$\gamma_{RT} = \sqrt{\frac{ka}{1 + kL}} - kv_{abl},$$

vieme, že nestabilita zanikne, ak $\gamma_{RT} < 0$, teda budeme hľadať hraničný prípad. Keďže predpokladáme, že ablator má približne rovnakú hustotu ako palivo, tak môžeme povedať, že $L \rightarrow 0$. Rýchlosť v_{abl} je v našom prípade rýchlosť šírenia rázovej vlny a z predchádzajúcich úloh vieme, že to je približne $v_{Raz} = v_{abl} = 600\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Posledný údaj, ktorý potrebujeme zistiť je zrýchlenie a , ktoré môžeme dostať z druhého Newtonovho zákona $F = ma$, kde m je hmotnosť implodujúcej šupky a F sila, ktorou „pôsobí“ laser prostredníctvom ablačného tlaku $P = F/S$ na plochu S . Hmotnosť šupky dostaneme z hustoty $\rho = 225 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a objemu V , resp. hrúbky šupky d .

Potom máme po postupnom dosadení

$$0 > \sqrt{\frac{k \frac{PS}{\rho S d}}{1 + kL}} - \frac{2\pi}{\lambda_p} v_{abl},$$

predpokladajme $L = 0$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda_p} v_{abl} &> \sqrt{\frac{P2\pi}{\rho d \lambda_p}}, \\ \left(\frac{2\pi}{\lambda_p} v_{abl}\right)^2 &> \frac{P2\pi}{\rho d \lambda_p}, \\ \frac{2\pi}{\lambda_p} v_{abl}^2 \rho d &> P. \end{aligned}$$

Pričom hrúbku vrstvy uvažujeme okolo $d = 10 \mu\text{m}$

1. pre $\lambda_p = 0,2 \mu\text{m}$

$$P_1 \approx 2,5 \cdot 10^{16} \text{ Pa} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ MBar},$$

2. pre $\lambda_p = 5 \mu\text{m}$

$$P_2 > 1,0 \cdot 10^{15} \text{ Pa} = 1,0 \cdot 10^4 \text{ MBar}.$$

Z tlaku P v jednotkách MBar môžeme dopočítať intenzitu I podľa vzťahu

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{P}{8.6} \left(\frac{\lambda}{1 \mu\text{m}} \right)^{2/3} (10^{14} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2})^{2/3} \right)^{3/2}, \\ I &= \left(\frac{P}{8.6} \right)^{3/2} \frac{\lambda}{1 \mu\text{m}} 10^{14} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}, \end{aligned}$$

a pre jednotlivé prípady dostávame

1. pre $\lambda_p = 0,2 \mu\text{m}$

$$I_1 > 1,8 \cdot 10^{20} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2},$$

2. pre $\lambda_p = 5 \mu\text{m}$

$$I_2 > 1,4 \cdot 10^{18} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2},$$

Obdobne postupujeme v druhej časti úlohy

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{P2\pi}{\rho d \lambda_p} - \frac{2B^2 k^2 \cos^2 \theta}{\mu_0(\rho_2 - \rho_1)}} - k v_{abl} &< 0, \\ \left(\frac{2\pi}{\lambda_p} v_{abl}\right)^2 \frac{\rho d \lambda_p}{2\pi} + \frac{2B^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda_p}\right)^2 \cos^2 \theta}{\mu_0(\rho_2 - \rho_1)} \frac{\rho d \lambda_p}{2\pi} &> P. \end{aligned}$$

Vidíme, že prvá část výrazu je zhodná s prvou částou úlohy. Označme P_i tlak z prvej části úlohy a dosadíme

$$P_i + \frac{2B^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda_p} \right) \cos^2 \theta}{\mu_0(\rho_2 - \rho_1)} \rho d > P.$$

Počítajme s týmto vzťahom pre jednotlivé prípady s tým, že hustotu uhlíka uvažujeme $\rho_2 = 2270 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, hustotu DT $\rho_1 = 225 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a $\cos \theta = 1$

1. pre $\lambda_p = 0,2 \mu\text{m}$

$$2,5 \cdot 10^{16} \text{ Pa} + 1,4 \cdot 10^9 \text{ Pa} > P,$$

2. pre $\lambda_p = 5 \mu\text{m}$

$$1,0 \cdot 10^{15} \text{ Pa} + 5,6 \cdot 10^7 \text{ Pa} > P.$$

Vidíme, že v oboch prípadoch je tlak, ktorý vznikol magnetickým poľom o niekoľko rádov menší, a teda jeho vplyv môžeme zanedbať.

Z toho nám vyplýva, že pre výrazný vplyv pri stabilizácii potrebujeme magnetické pole o niekoľko rádov väčšie ako to, s ktorým sme počítali.

Úloha VI.S . . . laserujeme

1. Jak velká musí být apertura prostorového filtru, jestliže jsme pro jeho sestavení použili čočku o průměru 40 cm a ohniskové vzdálenosti 4 m? Laserový svazek s gaussovským profilem má na vstupu průměr 30 cm a vlnovou délku 1 053 nm. Poloměr ohniska (tedy parametr σ) gaussovského svazku můžeme vypočítat podle vzorce

$$r = \frac{2}{\pi} \lambda \frac{f}{D},$$

kde D je průměr svazku, f je ohnisková vzdálenost čočky a λ je vlnová délka laseru.

2. Jakou energii musí mít laserový svazek, který je fokusován na povrch palivové peletky o poloměru 1 mm, aby byla dosažena intenzita v ohnisku $10^{14} \text{ W}\cdot\text{cm}^{-2}$? Poloměr ohniska je $25 \mu\text{m}$ a délka pulzu 10 ns. Kolik svazků celkem potřebujeme, abychom rovnoměrně pokryli povrch peletky? Jaká je jejich celková energie?
3. Jakou energii musí mít laserový, fokusovaný tak, že na povrchu peletky nemá ohnisko, ale průměr svazku odpovídá průměru peletky? Chceme s ním dosáhnout stejné intenzity, jako v předchozím případě. Předpokládejte, že takový svazek máme jeden a že je schopný homogenně ozářit celou peletku „ze všech stran“.

V prvej části sa jedná len o dosadenie do vzťahu pre polomer ohniska r a správnu premenu jednotiek. Treba si však uvedomiť, že do vzťahu pre výpočet ohniska nedosadzujeme priemer šošovky ale priemer laserového zväzku

$$r = \frac{2 \cdot 1,053 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 4 \text{ m}}{\pi \cdot 0,3 \text{ m}} = 8,94 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 8,94 \mu\text{m}.$$

Táto hodnota sa volá aj difrakčný limit a určuje nám akú najmenšiu veľkosť ohniska môžeme dosiahnuť. Pri správnom nastavení fokusujúceho elementu sa v bežnej praxi pohybujeme okolo 1,2 – 1,5 násobku difrakčného limitu.

V druhej časti si jednoducho spočítame plochu peletky $S_p = 4\pi r_p^2$, kde $r_p = 1$ mm berieme ako polomer peletky. Ak jeden paprsek zaostríme na plochu $S_o = \pi r_o^2$, potom počet potrebných zväzkov je

$$\begin{aligned} n &= \frac{S_p}{S_o}, \\ n &= 4 \left(\frac{r_p}{r_o} \right)^2, \\ n &= 6\,400. \end{aligned}$$

Teda dostávame, že pri danom ohnisku potrebujeme približne 6 400 laserových paprskov.

Energiu laserového pulzu spočítame podľa známeho vzťahu $E = P\tau$, kde P je výkon lasera a τ je dĺžka pulzu. Plošnú intenzitu ψ vypočítame ako $\psi = P/S$, kde S je plocha, v našom prípade povrch peletky S_o , na ktorú intenzita, resp. výkon P dopadá. Následne dosadíme do vzťahu pre energiu

$$E = \pi\tau\psi r_o^2 = \pi \cdot 10^{-8} \text{ s} \cdot 10^{18} \text{ W}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2} \cdot (25 \cdot 10^{-6} \text{ m})^2 \doteq 19,63 \text{ J}.$$

V poslednej časti predpokladáme, že použijeme rovnaký postup ako pri predchádzajúcej podúlohe. Potrebujeme ožiariť plochu $S_p = 4\pi r_p^2$, teda obdobne ako v minulom prípade

$$E = 4\pi\tau\psi r_p^2 \doteq 125,6 \text{ kJ},$$

čo je zároveň hodnota zodpovedajúca celkovému súčtu energií všetkých 6 400 zväzkov z prechádzajúcej časti úlohy.



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění v Dolním Dvoře

Od 25. 9. do 3. 10. 2021 se po roce opět konalo podzimní soustředění FYKOSu v malebné horské vesnici Dolní Dvůr v Krkonoších.

Organizátoři

Daniel Dupkala, Filip Ayazi, Jáchym Bártík, Jan Benda, Lubor Čech, Daniel Fousek, Veronika Hendrychová, Jaroslav Herman, Ivan Hudák, Kateřina Charvátová, Karel Kolář, Radka Křížová, Viktor Materna, Matěj Mezera, Šimon Pajger, Daniela Pittnerová, Pavla Rudolfová, Štěpán Stenclák, Josef Trojan, Martin Vaněk



Obr. 51: Výlet.

Účastníci

Jiří Kohl, Adam Krška, Martin Kysela, Aleš Opl, Pavel Provazník, Jan Bajer, Richard Materna, Anežka Čechová, Soňa Husáková, Vojtěch Stránský, Adam Hůštava, Lukáš Linhart, Barbora Čemanová, Hynek Jakeš, Daniel Skýpala, David Něnička, Jakub Mikeš, David Bálek, Matouš Mišta, Marie Lausová, Daniel Čtvrtečka, Lukáš Létal, Ladislav Vávra, Jan Marjanko, Adam Bretšnajder, Ivan Žemlička,

Pavla Šimová, David Chudožilov, Petr Piňos, Aneta Piklová, Vítězslav Lamoš, Veronika Bartáková, Vladimíra Jiříčková, Pavlína Zavřelová, Jan Lepič, Eliška Malá, Denisa Trnková



Obr. 52: Obyvatelé Kapitolu po vyhlášení účastníků Hladových her.

Legenda

Z 37 účastníků se stali občané svobodného státu Panemu, kteří přijeli do Kapitolu k prvním svobodným volbám. Nově zavedený demokratický systém se však krátce po volbách opět zvrhl v totalitu, a aby byly potlačeny nepokoje, Kapitol vyhlásil další ročník Hladových her!

Jarní soustředění v Hejnicích

Po dvouleté pauze způsobené koronavirovou pandemií opět proběhlo jarní soustředění FYKOSu. Tentokrát se konalo v městečku Hejnice v Jizerských horách od soboty 23. 4. do neděle 1. 5. 2022.

Organizátoři

Filip Ayazi, Jan Benda, Lubor Čech (tvůrce legendy), Tomáš Červeň, Vojtěch David, Jakub Dřevo, Daniel Dupkala, Veronika Hendrychová, Jaroslav Herman, Ivan Hudák, Kateřina Charvátová, Patrik Kašpárek, Karel Kolář, Radka Křížová, Viktor Materna (tvůrce legendy), Marek Milička, Šimon Pajger, Daniela Pittnerová,

Kateřina Rosická, Štěpán Stenclák, Viačeslavas Šinkonis, Josef Trojan, Tomáš Tuleja, Martin Vaněk (hlavní organizátor), Jitka Vysloužilová (zdravotnice)



Obr. 53: Fotografie účastníků a organizátorů při společenském večeru.

Účastníci

Aleš Opl, Pavel Provazník, Jiří Vestfál, Richard Materna, Anežka Čechová, Lukáš Linhart, Elena Chochořáková, Hynek Jakeš, Tomáš Patsch, David Bálek, Daniel Čtvrtečka, Lukáš Létal, Daniela Karpíšková, David Chudožilov, Petr Piños, Aneta Piklová, Jan Theodor Hrdý, Dávid Brodňanský, Veronika Bartáková, Vladimíra Jiříčková, Eliška Malá, Michal Stroff, Tereza Hochmanová, Veronika Plevná, Denisa Trnková, Martin Chrostek, Monika Drexlerová, Tereza Voltrová, Tereza Blažková, Tomáš Kubrický, Jakub Savula, Vladimír Slanina, Petr Brettschneider, Katarína Horská, Petr Toman, Jan Klír, Maxmilian Ladislav Skuda, Jakub Radim Zbončák

Legenda

Děj letošního soustředění přenesl účastníky do světa J. R. R. Tolkiena, konkrétně do Druhého věku na ostrov Númenor za vlády posledního krále Ar-Pharazóna. Zde si ukovali prsteny moci, řešili politické pletichy, rokovali u válečného ohně a svedli bitvu se Sauronovým vojskem. Kdo však podlehl svodům Temného pána a vypravil se na plavbu do Valinoru, zahynul krutou smrtí. Z 38 hrdinů tak nakonec přežilo jen 15 nejctnostnějších.

Kromě mnoha legendových her připravili organizátoři několik bloků odborných i populárních přednášek, zajímavé experimenty nebo menší Fyziklání. Řešitelé Fyzikální olympiády měli navíc možnost napsat si krajské kolo přímo na soustředění.



Obr. 54: Númenorejci se připravují na bitvu se skřetí armádou.

Fyziklání 2022

Letošní, již 16. ročník Fyziklání proběhl po roční pauze opět prezenčně. Do letňanského výstaviště PVA Expo Praha se tak i přes komplikace dané protiepidemickými opatřeními sjelo 776 účastníků z 8 zemí světa. Své síly v klání proběhnuvším v pátek 11. února poměřilo celkem 162 týmů z Česka, Slovenska, Rumunska, Maďarska, Španělska, Velké Británie, Finska a Polska.

V soutěži bezkonkurenčně zvítězil rumunský tým *The Kaldashians* a odnesl si tak první místo v kategorii A. V kategorii B pak dominoval druhý rumunský tým s názvem *Unde gravitaționala* a kategorii C ovládl český tým *Vinutí* z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze. České týmy ale nezhálely ani ve vyšších kategoriích – druhé příčky v kategoriích A a B náleží po řadě týmům *BezFantazie* (žáci Gymnázia Mikulov a Slovanského gymnázia Olomouc) a *Error404* (žáci Gymnázia Brno, třída Kapitána Jaroše).



Obr. 55: Soutěž letos nově probíhala v prostorách výstaviště PVA Expo Praha.

Kromě samotné soutěže byl pro zájemce přichystán bohatý víkendový doprovodný program. Již v pátek proběhla beseda s korektory a autory soutěžních úloh, na níž se soutěžící mohli doptávat na nejasnosti týkající se problémů, na které narazili při soutěži. V sobotu ráno pak proběhly přednášky doc. Jiřího Dolejšího na téma *O částicové fyzice v různých souvislostech*, prof. Lenky Zdeborové na téma *Physics of Computation*, prof. Ondřeje Santolíka na téma *Hudba sfér* a MScR B. Viliama Hakaly na téma *Physics Chemistry*. Během sobotního odpoledne měli zájemci možnost se zúčastnit prohlídek muzeí či komentovaných prohlídek Prahy převážně pro zahraniční účastníky a celý den potom završily návštěvy Planetária Praha a Štefánikovy observatoře. Celý víkendový program byl završen v neděli, kdy proběhly exkurze do laboratoří a vědeckých pracovišť na MFF UK.



Obr. 56: Pohled na centrální stanoviště opravovatelů z pódia.



Obr. 57: Přednáška prof. Zdeborové v rámci víkendového doprovodného programu.

Fyziklání se účastní nejvýše pětičlenné týmy středoškoláků. Jejich cílem v průběhu tříhodinové soutěže je získat co nejvyšší počet bodů za řešení fyzikálních úloh. Soutěžící obdrží na začátku zadání sedmi úloh a pokaždé, když se jim podaří

některou z nich správně vyřešit, dostanou zadání nové, většinou obtížnější úlohy.

Výsledky

Kategorie A

1. The Kaldashians	200 b.
2. BezFantazie	169 b.
3. Fazekas12B_HU	152 b.

Kategorie B

1. Unde gravitaționale	154 b.
2. Error404	115 b.
3. tým se odhlásil	106 b.

Kategorie C

1. Vinutí	90 b.
2. micv	78 b.
3. sqrt(-1)	76 b.

Kompletní výsledková listina a podrobná pravidla jsou k nalezení na webových stránkách soutěže <https://fyziklani.cz>.

Fyziklani International

Unikátní součástí letošního ročníku byl projekt *Fyziklani International 2021 – Let's Discover European Physics* pod programem Erasmus+, díky kterému se mohli středoškoláci ze šesti různých zemí světa zúčastnit nejen Fyziklání jako takového, ale také týdenního programu, během něhož se dozvěděli spoustu o kultuře, vědě a vědcích z jednotlivých zemí, zúčastnili se exkurzí na různá vědecká pracoviště, a mnoho dalšího. Projekt měl původně proběhnout již minulý rok, ale kvůli pandemii byl odložen a úspěšně proběhl letos.

Unikátní součástí letošního ročníku byl projekt *Fyziklani International 2021 – Let's Discover European Physics* pod programem Erasmus+, díky kterému se mohli středoškoláci ze šesti různých zemí světa zúčastnit nejen Fyziklání samotného, ale také týdenního programu, během něhož se dozvěděli spoustu o kultuře, vědě a vědcích z jednotlivých zemí, zúčastnili se exkurzí na různá vědecká pracoviště, a mnoho dalšího. Projekt měl původně proběhnout již minulý rok, ale kvůli pandemii byl odložen a úspěšně proběhl letos.



Obr. 58: Společná fotka účastníků a organizátorů Fyziklani International.

Fyziklání Online

Letošní jedenáctý ročník internetové soutěže Fyziklání Online se konal ve středu 24. 11. 2021. Tentokrát se soutěže zúčastnilo rekordních 3005 účastníků z 47 zemí světa tvořících 715 týmů.

Celkovým vítězem se stal tým vědeckých pracovníků z Japonska a USA *Metaphysical Brawlers* z kategorie Open se ziskem 285 bodů. První příčku v kategorii A obsadil tým *Professional Dumbasses* ze Singapuru s 201 body. V těsném závěsu za nimi se na druhém místě s 192 body umístil tým z Česka $e=\pi=\sqrt{g}=3$. Tento tým, složený z řešitelů FYKOSu Aleše Opla, Adama Kršky, Hynka Jakeše, Tomáše Patsche a Jiřího Kohla, byl zároveň nejlepším ze všech týmů z Česka a Slovenska. Nejlepší středoškolský tým a také výherce kategorie B nese název *Relativistic Squad* a jeho členové z Vietnamu v soutěži získali celých 221 bodů. Kategorii C pak ovládl tým z Indie *Rick Astley* se ziskem 137 bodů.

Nejlepší české i zahraniční týmy byly oceněny věcnými cenami podle svého výběru.

Pravidla

Na začátku soutěže každý tým o maximálně pěti členech obdržel sedm úloh s jednoznačným číselným výsledkem. Po zadání správného výsledku do našeho webového systému získal tým zadání následující úlohy. Soutěž trvala 3 hodiny, přičemž v průběhu soutěže proběhla také hurry up část, v níž byly úlohy rozděleny do tří fyzikálních témat a vyřešení každé úlohy bylo hodnoceno bonusovými body. Soutěžící mohli k řešení použít libovolnou literaturu, internet či počítačový software, nesměli však komunikovat s žádnou osobou mimo svůj tým.

Výsledky

Středoškoláci A

- | | |
|---------------------------|--------|
| 1. Professional Dumbasses | 201 b. |
| 2. $e=\pi=\sqrt{g}=3$ | 192 b. |
| 3. KVIP | 191 b. |

Středoškoláci B

- | | |
|-----------------------|--------|
| 1. Relativistic Squad | 221 b. |
| 2. CaminBaieti | 177 b. |
| 3. Ally_Of_Whizzisnz | 164 b. |

Středoškoláci C

- | | |
|---------------------|--------|
| 1. Rick Astley | 137 b. |
| 2. The Power of Phi | 122 b. |
| 3. Viklání | 110 b. |

Středoškoláci A - CZ/SK

- | | |
|-----------------------------|--------|
| 1. $e=\pi=\sqrt{g}=3$ | 192 b. |
| 2. Varcholovci a Horvátovci | 140 b. |
| 3. Tvoje Máma | 134 b. |

Středoškoláci B - CZ/SK

- | | |
|---------------------|--------|
| 1. Archimedova Vaňa | 157 b. |
| 2. Error404 | 101 b. |
| 3. DNksVCPzTImPMT | 99 b. |

Středoškoláci C - CZ/SK

- | | |
|------------|--------|
| 1. Viklání | 110 b. |
| 2. MN4U | 72 b. |
| 3. micv | 68 b. |

Open

- | | |
|-----------------------------|--------|
| 1. Metaphysical Brawlers | 285 b. |
| 2. Pentagonal Supersymmetry | 263 b. |
| 3. Everything is Relative | 248 b. |



Obr. 59: Organizátoři v průběhu soutěže.

Ve výsledkové listině jsou uvedeny pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je k nalezení na webových stránkách soutěže <https://online.fyziklani.cz/2021/vysledky/>.

Fyzikální Náboj

Letošní ročník Fyzikálního Náboje se uskutečnil 5. listopadu 2021 a byl organizován slovenským FKS a FYKOsem. Princip soutěže je podobný Fyziklání – pětičlenné týmy během dvou hodin řeší fyzikální úlohy a snaží se získat co nejvíce bodů za správná řešení. Oproti Fyziklání se liší soutěžním časem (dvě hodiny místo tří) a bodováním (za správnou odpověď je vždy 1 bod). Tento rok byl Náboj pro všechny zúčastněné země online, využíváje herní systém Fyziklání Online.

V České republice soutěžilo celkem 114 týmů (z toho 60 v kategorii Junioři a 54 v kat. Senioři), což je více než dvojnásobek oproti loňskému roku.

Vítězné týmy, kat. Senioři, ČR

1. (3.) Biskupské gymnázium, Barvičova 85, Brno
2. (4.) Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5
3. (11.) Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5

Vítězné týmy, kat. Junioři, ČR

1. (1.) Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5
2. (9.) Gymnázium Petra Bezruče, ČSA 517, Frýdek-Místek
3. (11.) Mensa gymnázium, o. p. s., Španielova 1111, Praha 6 – Řepy

V závorkách je uvedeno pořadí v rámci mezinárodního žebříčku. Kompletní výsledkovou listinu najdete na webu soutěže <https://physics.naboj.org>.

Den s experimentální fyzikou

Den s experimentální fyzikou (DSEF) je každoroční akce FYKOSu, která umožňuje středoškolákům nahlédnout do fyzikálních laboratoří. Letošní, již 27. ročník proběhl 8. listopadu 2022. Po minulém ročníku, který kvůli pandemii proběhl celý online, se středoškoláci mohli opět naživo podívat do fyzikálních laboratoří nejen na Matfyzu.

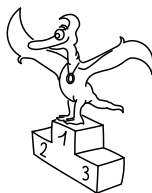
Akci zahájila v budově Fyzikálního ústavu UK přednáška vedoucího Oddělení laserového plazmatu UFP AV ČR Ing. Miroslava Krůse, Ph.D. Ve své přednášce nazvané „Urychlovače a lasery“ se s účastníky vydal do světa laserových urychlovačů částic, které jsou neodmyslitelnou součástí jeho odborného výzkumu. Dále byla v dopoledním bloku představena pracoviště MFF v areálu Karlov – program zahrnoval například zobrazovací techniky a spektroskopické metody (skenovací a transmisní elektronový mikroskop, Ramanovu spektroskopii), růst monokrystalů, resistometrii, biofyziku a hydrogenaci.

Tradiční součástí DSEFu jsou i odpolední exkurze mimo Matfyz. Účastníci si mohli vybrat mezi ionosférickou observatoří, prohlídkou elektrické zkušebny a audiovizuálního studia na ČVUT, hvězdárnou Dáblice nebo se jet seznámit s nukleární magnetickou rezonancí na ČZU. Dále nás tradičně přivítala pracoviště FZU AV ČR, dokonce tři z nich – THz spektroskopie na pracovišti Na Slovance, řada laboratoří v Cukrovarnické a obří lasery v zařízení Prague Asterix Laser System.

DSEF přilákal do podzimní Prahy celkem 62 účastníků a i přes komplikovanou situaci způsobenou pandemií převládalo všeobecné nadšení z uspořádané akce. Těšíme se zase za rok!



Obr. 60: Ukázka difraktometru na KFKL – M. Dopita.

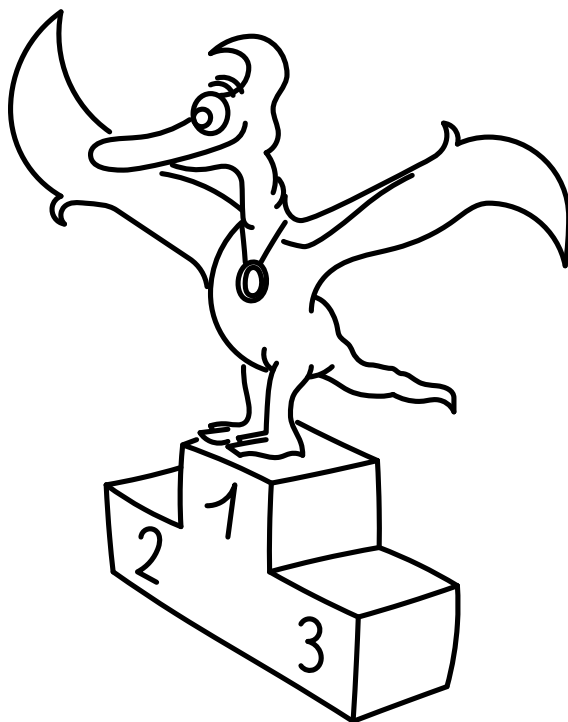


Pořadí řešitelů

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 396
1. <i>Michal Stroff</i>	G, Budějovická, Praha	263
2. <i>David Něnička</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	224
3. <i>Matouš Mišta</i>	G, Olomouc-Hejčín	193
4. <i>Vladimír Slanina</i>	G Poštová, Košice	180
5. <i>Pavla Šimová</i>	G, Šumperk	178
6. <i>Tomáš Kubrický</i>	G Poštová, Košice	164
7. <i>Ivan Žemlička</i>	G Ústavní, Praha	150
8. <i>Petr Brettschneider</i>	G, Dukelská, Bruntál	128
9. <i>Jan Theodor Hrdý</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	114
10. <i>Jakub Radim Zbončák</i>	G, Křenová, Brno	107
11. <i>Petr Toman</i>	G, Velké Meziříčí	94
12. <i>Adam Bretšnajder</i>	G Z. Wintra, Rakovník	84
13. <i>Adam Pustka</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	77
14. <i>Patrik Štencel</i>	Mendelovo G, Opava	51
15. <i>Lujza Lea Lavriková</i>	G, P. Horova, Michalovce	46
16.–17. <i>Tomáš Otrubčák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	44
16.–17. <i>Michal Sykáček</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	44
18. <i>Václav Verner</i>	PORG, Praha	40
19. <i>Ondřej Hejsek</i>	G a SOŠ, Jilemnice	33
20. <i>Jakub Buzalka</i>	G, Považská Bystrica	31
21. <i>Tomáš Bourek</i>	G J. Heyrovského, Praha	26
22. <i>Adam Filip</i>	G, Česká Lípa	25
23. <i>Michal Branda</i>	G Dašická, Pardubice	24
24.–26. <i>Yahor Herashchanka</i>	G, Turnov	18
24.–26. <i>Vojtěch Janáček</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	18
24.–26. <i>Veronika Roskovská</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	18
27. <i>Dominik Marton</i>	G Poštová, Košice	16
28. <i>Barbora Edlová</i>	G, Tachov	15
29. <i>Vojtěch Trnka</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	13
30. <i>Matyáš Matta</i>	Masarykovo G, Plzeň	12
31.–33. <i>Matěj Hušek</i>	G, Turnov	11
31.–33. <i>Eduard Plic</i>	Masarykovo G, Plzeň	11
31.–33. <i>Vilém Učík</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	11
34.–36. <i>Kryštof Mazera</i>	G Jírovcova, České Budějovice	10
34.–36. <i>Jáchym Předota</i>	G Jírovcova, České Budějovice	10
34.–36. <i>Lucie Roskovská</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	10
37. <i>Marek Kalenda</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	9
38.–39. <i>Lucie Martinková</i>	G B. Němcové, HK	8
38.–39. <i>Veronika Menšíková</i>	Arcibiskupské G, Praha	8
40. <i>Jan Hrdina</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	7

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	396
41. <i>Alžběta Hejná</i>	G, Litoměřická, Praha	6
42.–43. <i>Miroslav Pajger</i>	Bilingválne G, Sučany	0
42.–43. <i>Marie Steinhauserová</i>	ZŠ Strmilov	0



Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 396
1. <i>Jan Klír</i>	G B. Hrabala	326
2. <i>Vladimíra Jiříčková</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	216
3. <i>Veronika Plevná</i>	G, Cheb	187
4. <i>Richard Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	158
5. <i>Jakub Savula</i>	G Jírovcova, České Budějovice	155
6. <i>Anežka Čechová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	138
7. <i>Lukáš Línhart</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	123
8. <i>Veronika Bartáková</i>	Slovanské G, Olomouc	114
9.–10. <i>Daniel Čtvrtečka</i>	G Christiana Dopplera, Praha	106
9.–10. <i>Monika Drexlerová</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	106
11. <i>Radek Truhlář</i>	G, Cheb	89
12. <i>Maximilian Ladislav Skuda</i>	G, Boskovice	80
13. <i>Martin Chrostek</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	56
14. <i>Marek Pučejdl</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	55
15. <i>Jan Zrůst</i>	G Botičská, Praha	54
16. <i>David Mendl</i>	G P. de Coubertina, Tábor	49
17. <i>Vít Říha</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	47
18.–19. <i>Klára Plochová</i>	G, Boskovice	38
18.–19. <i>Aneta Vašíčková</i>	G Dašická, Pardubice	38
20. <i>Antonie Fejfarová</i>	G Botičská, Praha	37
21. <i>Tadeáš Roblák</i>	G, Židlochovice	32
22. <i>Lukáš Váňa</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	29
23. <i>Václav Vinkler</i>	Wichterlovo G, Ostrava	28
24. <i>Lukáš Müller</i>	Podkrušnohorské G, Most	22
25. <i>Benjamín Král</i>	G, Hlinsko	20
26. <i>Vojtěch Minářík</i>	G, Slaný	19
27.–29. <i>Barbora Klusáková</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	18
27.–29. <i>Filip Neubauer</i>	Akademické G, Praha	18
27.–29. <i>Filip Rásó</i>	Súkromné Bilingválne G., Galanta	18
30. <i>Jakub Svobodník</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	17
31. <i>Michaela Radoměřská</i>	G, Voděradská, Praha	14
32. <i>Patrik Číhal</i>	Klvaňovo G Kyjov	13
33. <i>Julie Matulová</i>	G Dobruška	12
34.–36. <i>Vítězslav Lamoš</i>	G, Omská, Praha	11
34.–36. <i>Vojtěch Martínek</i>	Mendelovo G, Opava	11
34.–36. <i>Tereza Teplanská</i>	Mendelovo G, Opava	11
37. <i>Filip Hošek</i>	Masarykovo klasické G, Říčany	10
38. <i>Tereza Lichtenbergová</i>	G Botičská, Praha	9
39. <i>Filip Hanzlík</i>	G Jana Nerudy, Praha	8
40.–43. <i>Jakub Červeňan</i>	G J. Pivečky, Slavičín	6
40.–43. <i>Vojtěch Man</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	6
40.–43. <i>David Theodor Nimrichtr</i>	G Dašická, Pardubice	6
40.–43. <i>Marek Štorek</i>	G, Nad Alejí, Praha	6
44.–46. <i>Kristýna Bělušová</i>	G J. Pivečky, Slavičín	4
44.–46. <i>Michal Hrotko</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4
44.–46. <i>Jiří Sýkora</i>	G, Trhové Sviny	4
47.–49. <i>Peter Holý</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2
47.–49. <i>Anna Jiříčková</i>	G a Hudební škola, Praha 3	2
47.–49. <i>Aneta Vavřínová</i>	G Dašická, Pardubice	2

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 360
1. <i>Ioana Milea</i>	CN Mihai Eminescu, Satu Mare, RO	193
2. <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	181
3. <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	172
4. <i>Daniela Karpíšková</i>	Masarykovo G, Plzeň	168
5. <i>Jiří Vestfál</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	167
6. <i>Tereza Voltrová</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	165
7. <i>Denisa Trnková</i>	G Nad Štolou, Praha	143
8. <i>Lukáš Létal</i>	G J. Škody, Přerov	138
9. <i>Ladislav Vávra</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	131
10. <i>Tereza Blažková</i>	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	124
11. <i>Katarína Horská</i>	G Jana Keplera, Praha	118
12.–13. <i>Martín Kysela</i>	G, Český Krumlov	90
12.–13. <i>Petr Piňos</i>	Biskupské G, Brno	90
14. <i>Pavel Provazník</i>	G Dašická, Pardubice	80
15. <i>Ivana Durkošová</i>	G, Dexnerova, Vranov n. Toplou	78
16. <i>Alexander Stoyanov</i>	91 Germ. Lang. Sch. "Pr. K. G"	71
17. <i>Tereza Hochmanová</i>	G Chotěboř	68
18. <i>Adam Póša</i>	G Alejová, Košice	57
19. <i>Jaromír Potůček</i>	G Jana Keplera, Praha	49
20. <i>Tomáš Patsch</i>	Slovanské G, Olomouc	48
21.–22. <i>Jakub Mikáč</i>	G Dobruška	47
21.–22. <i>Miruna Neacsu</i>	Inter. Computer HS, Bucharest,RO	47
23. <i>Pavel Horský</i>	G, Brno-Řečkovice	45
24. <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	44
25. <i>Jonáš Venc</i>	G, Havlíčkův Brod	39
26. <i>Martín Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	36
27.–28. <i>Vojtěch Marek</i>	Biskupské G, Brno	32
27.–28. <i>Anna Vodáková</i>	G, Litovel	32
29. <i>Michal Kišš</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	31
30.–31. <i>Lída Kačenková</i>	G, Budějovická, Praha	30
30.–31. <i>Jiří Polách</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	30
32. <i>Mikuláš Fiala</i>	G Botičská, Praha	29
33.–34. <i>Václav Tichavský</i>	G Jana Nerudy, Praha	28
33.–34. <i>Matej Zigo</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	28
35. <i>Vojtěch Haslinger</i>	G, Lovosice	25
36.–37. <i>Jonáš Dej</i>	Wichterlovo G, Ostrava	21
36.–37. <i>Petr David Lanča</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	21
38. <i>Karolína Žídková</i>	G O. Havlové, Ostrava	20
39. <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	19
40. <i>Michal Almáši</i>	G, Park mládeže, Košice	18
41.–42. <i>Josef Ferda</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	17
41.–42. <i>Viliam Geffert</i>	G Poštová, Košice	17
43.–44. <i>Vojtěch Lančarič</i>	SPŠ Praha 10	14
43.–44. <i>Jakub Petrovický</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	14
45. <i>Mikuláš Sulovský</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	13
46.–48. <i>Barbora Čemanová</i>	G Poštová, Košice	12
46.–48. <i>Zdeněk Hartman</i>	G, Broumov	12
46.–48. <i>Štěpán Šmětka</i>	Letohradské soukromé gymnázium L	12
49.–50. <i>Jiří Jirásek</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	11
49.–50. <i>Dávid Jopek</i>	G Poštová, Košice	11

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 360
51. <i>Patrik Bašo</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	10
52. <i>Šimon Bízek</i>	G Na Pražačce, Praha	9
53.–55. <i>Matej Donoval</i>	ŠpMNDA G, Bratislava	8
53.–55. <i>Matěj Olič</i>	G V. Hlavatého, Louny	8
53.–55. <i>Michaela Valtrová</i>	Mendelovo G, Opava	8
56.–57. <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	7
56.–57. <i>Jan Tomšej</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	7
58. <i>Tomaš Názler</i>	SPŠ a VOŠT Brno	6
59.–60. <i>Karolína Prasková</i>	Masarykova sš zemědělská a voš O	5
59.–60. <i>Nikita Zykov</i>	G Na Pražačce, Praha	5
61.–64. <i>Bogdans Grebņevs</i>	Rīga Tech. Univ. Engin. HS, LV	4
61.–64. <i>Martina Plevová</i>	G, Frýdlant nad Ostravicí	4
61.–64. <i>Pragun Pudukoli</i>	NC for Excellence, India	4
61.–64. <i>Barbora Růžičková</i>	G, Moravská Třebová	4
65. <i>Jan Petkov</i>	Mendelovo G, Opava	3
66.–67. <i>Marek Plachý</i>	G, Jateční, Ústí nad Labem	2
66.–67. <i>Michal Puš</i>	G Nad Kavalírkou, Praha	2
68. <i>Filip Msallam</i>	G, Nad Alejí, Praha	1
69. <i>Vojtěch Svoboda</i>	G, Budějovická, Praha	0

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 360
1. <i>Filip Vrto</i>	G J. Škody, Přerov	224
2. <i>Aleš Opl</i>	G a Hudební škola, Praha 3	167
3. <i>Jakub Mikeš</i>	G J. Škody, Přerov	150
4. <i>David Chudožilov</i>	Reálné G a ZŠ, Prostějov	125
5. <i>Elena Chocholaková</i>	G L. Svobodu, Humenné	108
6. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	104
7. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	102
8. <i>Martin Fedorko</i>	G J. A. Raymana, Prešov	86
9. <i>Jan Píjáček</i>	Biskupské G, Brno	85
10. <i>Josef Vácha</i>	G Jana Keplera, Praha	80
11. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	72
12. <i>Daniel Skjypala</i>	G, Olomouc-Hejčín	71
13. <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	60
14. <i>David Juda</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	58
15. <i>Aneta Piklová</i>	G, Strakonice	54
16. <i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	52
17. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	51
18. <i>Pavčina Zavřelová</i>	Biskupské G, Brno	46
19. <i>Nicolas Gavorník</i>	G, Myjava	45
20. <i>Dávid Brodriánský</i>	G J. A. Raymana, Prešov	34
21. <i>Marie Lausová</i>	G, Jihlava	30
22.–23. <i>Tomáš Heger</i>	Jiráskovo G, Náchod	22
22.–23. <i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	22
24. <i>Jakub Maťa</i>	G J. Škody, Přerov	21
25. <i>Matěj Mocek</i>	G Dašická, Pardubice	20
26.–28. <i>Lukáš Fidler</i>	Jiráskovo G, Náchod	18
26.–28. <i>Jiří Harvalík</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	18
26.–28. <i>Karel Podzimek</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	18
29. <i>Nikita Ustinov</i>	G Jana Keplera, Praha	17
30. <i>Matej Korž</i>	G J. A. Raymana, Prešov	16
31. <i>Matouš Hofmeister</i>	G J. Barranda, Beroun	15
32.–33. <i>Luboš Bariak</i>	G Tajovského, B. Bystrica	14
32.–33. <i>Adam Húštava</i>	European School Luxembourg II	14
34. <i>Eliška Malá</i>	Slovanské G, Olomouc	13
35. <i>Antonín Kubík</i>	G, Roudnice nad Labem	10
36. <i>Jan Marjanko</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	8
37.–38. <i>Marie Jankolová</i>	G Botičská, Praha	7
37.–38. <i>Michal Šrank</i>	Gymnázium Angely Merici	7
39.–44. <i>Jozef Mičáň</i>	G Grösslingová, Bratislava	3
39.–44. <i>Jozef Mičáň</i>	G Grösslingová, Bratislava	3
39.–44. <i>Matouš Novotný</i>	G, Křenová, Brno	3
39.–44. <i>Lukáš Ščerbanovský</i>	G, Dexnerova, Vranov n. Toplou	3
39.–44. <i>Jakub Šimek</i>	Gym Dr. A. Randy, Jablonec n. N.	3
39.–44. <i>Michal Uliáš</i>	Smíchovská SPŠ Praha 5	3

MARTIN VANĚK A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXXV. ročník – 2021/22

Předmluva: Martin Vaněk

Náměty úloh:

Karel Kolář (II.3, II.5, II.P, II.E, III.P, IV.1, IV.2, IV.3, IV.E, V.1, V.P, V.E, VI.2, VI.3, VI.4), Michal Červeňák (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Jindřich Jelínek (I.P, II.1, III.3, III.4, IV.5, VI.5), Jozef Lipták (I.3, I.4, I.E, II.2, IV.P), Matěj Mezera (II.4, III.1, VI.E), Jan Benda (I.2, V.5), Kateřina Charvátová (III.E, VI.P), Václav Mikeska (I.5, III.2), Jáchym Bártík (V.4), Katarína Častulíková (V.2), Miroslav Hanzelka (IV.4), Jaroslav Herman (V.5), Daniela Pittnerová (V.3), Matěj Rzehulka (III.5), Štěpán Stenclák (VI.E), Martin Vaněk (VI.1), Ivo Vinklárek (I.1),

Řešení úloh:

Michal Červeňák (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Jindřich Jelínek (I.P, II.1, III.3, III.4, IV.5, VI.5), Jozef Lipták (I.3, I.4, I.E, II.2, IV.1, VI.4), Jáchym Bártík (I.1, V.3, V.4, VI.P), Jan Benda (I.2, V.5, VI.E), Patrik Kašpárek (II.3, III.E, VI.1), Daniel Fousek (III.P, V.1), Ivan Hudák (V.E, VI.3), Karel Kolář (IV.2, VI.2), Radka Křížová (II.5, V.P), Matěj Mezera (II.4, III.1), Václav Mikeska (I.5, III.2), Jan Novotný (II.P, IV.P), Josef Trojan (II.E, IV.1), Tomáš Tuleja (IV.3, V.2), Jiří Blaha (IV.E), Jaroslav Herman (V.2), Štěpán Marek (IV.4), Matěj Rzehulka (III.5),

Fyzika laserové inerciální fúze: Michal Červeňák

Vedení podzimního soustředění: Daniel Dupkala

Vedení jarního soustředění: Martin Vaněk

Sazba: Matěj Rzehulka, Jáchym Bártík, Josef Trojan, Tomáš Tuleja

Obrázky a grafy: Matěj Mezera, Josef Trojan, Jindřich Jelínek, Tomáš Tuleja, Jáchym Bártík, Štěpán Marek

Jazykové korektury: Kateřina Orságová, Veronika Hendrychová, Robert Jurenka, Jaroslav Herman, Jiří Zelenka, Jakub Dřevo, Ema Wayan Danielová, Daniel Broško, Jáchym Bártík, Jan Benda, Adéla Kolembusová

Odborné korektury: Jaroslav Herman, Jiří Zelenka, Jozef Lipták, Jáchym Bártík, Jan Benda, Jan Novotný, Tomáš Grycz, Jakub Kliment, Matěj Rzehulka, Jakub Dřevo, Michal Červeňák, Šimon Pajger, Tomáš Červeň, Jindřich Jelínek, Matěj Mezera, Adam Mendl, Vojtěch David, Ivan Hudák

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

MARTIN VANĚK A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXXV. ročník – 2021/22

Vydal MatfyzPress
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 663. publikaci.

Vytiskl ReproStředisko a nakladatelství MatfyzPress MFF UK

Publikace neprošla recenzním ani lektorským řízením.
Nakladatelství neodpovídá za kvalitu a obsah textu.
Vydáno pro interní potřebu MFF UK.
Neprodejná publikace

200 stran, 60 obrázků
Sazba písmem Latin Modern v programu X_YL^AT_EX
Vydání první
Náklad 400 výtisků

Praha 2022

ISBN 978-80-7378-469-0