

## Úloha V.5 . . . opticko-relativistická

9 bodů; průměr 3,71; řešilo 21 studentů

Určete, jaký fázový posun  $\Delta\Phi$  vznikne přechodem laserového svazku s vlnovou délkou  $\lambda_0$  přes skleněnou desku s klidovou tloušťkou  $h$  a s indexem lomu  $n$ , která se pohybuje ve směru svazku rovnoměrně rychlostí  $v$ , oproti případu, kdy je deska vůči zdroji  $i$  pozorovateli v klidu. Zajímá nás především první nenulový člen rozvoje podle rychlosti desky. *Dodo a optické praktikum.*

Najprv si treba rozmyslieť, akým spôsobom sa daný experiment na meranie fázového posuvu dá realizovať. Majme pevný zdroj laserového (tj. koherentného a monochromatického) svetla a voči nemu nepohyblivý detektor. Medzi ne vložíme sklenenú dosku. Keď s doskou začneme pohybovať, daná fáza vlnenia bude prichádzať do zdroja  $v$  o trochu posunutom čase. Tento posun označme  $\Delta\tau$ . Fázový posun potom určíme jednoducho ako

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi c\Delta\tau}{\lambda_0}.$$

Nech sa doska pohybuje od zdroja. V okamihu vniku sledovanej fázy svetelnej vlny do dosky položíme

$$\begin{aligned}t_0 = t'_0 &= 0, \\x_0 = x'_0 &= 0,\end{aligned}$$

kde čiarkované, resp. nečiarkované veličiny popisujú čas a polohu v inerciálnej sústave spojenej s rovnomerne sa pohybujúcou doskou, resp. v inerciálnej sústave spojenej so zdrojom.

V okamihu opustenia skla bude svetlo v sústave spojenej so sklom mať súradnice

$$(t', x') = \left(\frac{nh}{c}, h\right),$$

keďže v skle sa svetlo pohybuje rýchlosťou  $v = c/n$ . Toto môžeme pomocou inverznej Lorentzovej transformácie previesť na čas a polohu v sústave spojenej so zdrojom

$$\begin{aligned}t &= \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) = \gamma \left(\frac{nh}{c} + \frac{vh}{c^2}\right), \\x &= \gamma (x' + vt') = \gamma \left(h + \frac{vnh}{c}\right),\end{aligned}$$

kde  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$  je Lorentzov faktor.

Určme najprv časový posun medzi lúčom, ktorý prechádza pohybujúcou sa doskou, a lúčom, ktorý doskou vôbec neprechádza (napr. realizujeme paralelne ďalší experiment). Je zrejmé, že stačí tento posun určiť v mieste výstupu prvého lúča z dosky, keďže ďalej vo vákuu zostáva tento rozdiel stály. V mieste  $x$  bude druhý lúč v čase

$$t_2 = \frac{x}{c} = \frac{\gamma}{c} (x' + vt') = \gamma \left(\frac{h}{c} + \frac{vnh}{c^2}\right).$$

Rozdiel času prechodu detektorom bude

$$\begin{aligned}\Delta t(v) &= t - t_2 = \gamma \left(\frac{nh}{c} + \frac{vh}{c^2}\right) - \gamma \left(\frac{h}{c} + \frac{vnh}{c^2}\right) = \frac{\gamma h}{c} \left(n + \frac{v}{c} - 1 - \frac{vn}{c}\right) = \\&= \frac{\gamma h}{c} (n - 1) \left(1 - \frac{v}{c}\right).\end{aligned}$$

Otázka sa pýta na rozdiel medzi pohybujúcou sa a statickou doskou, teda

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \Delta t(v) - \Delta t(0) = \frac{\gamma h}{c} (n-1) \left(1 - \frac{v}{c}\right) - \frac{h}{c} (n-1) = \frac{h}{c} (n-1) \left(\gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) - 1\right) = \\ &= \frac{h}{c} (n-1) \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} - 1\right).\end{aligned}$$

Pre výsledný fázový rozdiel potom dostávame

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi h (n-1)}{\lambda_0} \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} - 1\right).$$

Môžeme vidieť, že spĺňa rozumné predpoklady, ktoré na výsledok kladieme – je úmerný hrúbke dosky a je nulový pre  $v = 0$  (nepohyblivú dosku) a pre  $n = 1$  (dosku z vákuua). Na záver vykonáme rozvoj v premennej  $v/c$ . Pre funkciu

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

môžeme napísať Taylorov rad

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = 1 + \frac{-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{1+x} \Bigg|_{x=0} x + O(x^2) = \\ &= 1 - x + O(x^2) \approx 1 - x.\end{aligned}$$

Teraz už iba dosadíme do vzťahu pre fázový rozdiel

$$\Delta\Phi \approx -\frac{2\pi h v (n-1)}{\lambda_0 c}.$$

Jedná sa teda o efekt prvého rádu, ktorý by dokonca mohol byť pozorovateľný. Pre pohyb dosky s hrúbkou rádovo v decimetroch rýchlosťou v jednotkách metrov za sekundu a pre UV laser dostávame hodnotu fázového posunu v ráde  $10^{-2}$ . V praktickej realizácii ale budú asi prevažovať ostatné vplyvy nedokonalosti dosky a disperzia jej indexu lomu. V doske má totiž svetlo vlnovú dĺžku posunutú Dopplerovým javom (v sústave spojennej s doskou, v ktorej sa popisuje interakcia svetla s látkou, ktorá dáva vznik indexu lomu) a na tejto inej vlnovej dĺžke teda môže byť o trochu iný index lomu.

**Jozef Lipták**  
liptak.j@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.