Úloha VI.S ... opakovacia

10 bodů; průměr 8,13; řešilo 8 studentů

1. *Majme klasické matematické kyvadlo, ktoré vychýlime zo stabilnej polohy o $120°$. Dĺžka závesu kyvadla je po celý čas konštantá, záves je nehmotný a na jeho konci je upevnený hmotný bod s hmotnosťou m. Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre kyvadlo a pomocou nich určte, kedy je sila pôsobiaca na vlákno kyvadla najväčšia.*
2. *Vezmime klasické kyvadlo, rovnaké ako v prvej časti úlohy. K jeho hmotnému bodu pripevníme ďalšie kyvadlo s rovnakou zavesenou hmotnosťou ako aj rovnakou dĺžkou závesu. Zostavte lagrangián pre túto situáciu a určte aj Lagrangeove pohybové rovnice (2. druhu).*
3. *Majme hmotný bod, ktorý je schopný sa voľne pohybovať v smere osy x. Ďalej majme matematické kyvadlo, ktorého záves je upevnený v tomto bode. Nájdite lagrangián tejto sústavy a pomocou Hamiltonovej variačnej metódy nájdite príslušné pohybové rovnice tak, že postupne budete Gateauxove derivácie podľa všetkých zovšeobecnených premenných pokladať rovné nule. Celkovo tak každá nulová Gateauxova derivácia dá jednu pohybovú rovnicu. Porovnajte, či ste touto metódou dostali rovnaké pohybové rovnice ako pri použití štandardného odvodenia Lagrangeových rovníc z lagrangiánu.*

1. Zostavíme Lagrangeove rovnice prvého druhu. Vieme, že väzba bude mať tvar
$$\Phi = x^2 + y^2 - l^2 = 0\,,$$
pretože sa jedná o pohyb po kružnici a l predstavuje v našom prípade polomer tejto kružnice (dĺžku závesu). Lagrangeove rovnice prvého druhu budú mať potom tvar
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda x\,,\\ m\ddot{y} &= 2\lambda y - mg\,, \end{aligned}$$
kde λ je nejaká funkcia polohy guličky udávajúca veľkosť väzbovej sily.
Ďalej je dôležité si uvedomiť, že veľkosť väzbovej sily nezávisí len od veľkosti λ ale aj od veľkosti gradientu väzby v danom mieste. Veľkosť gradientu je ale v každom bode trajektórie kružnice konštantná. Z výpočtu dostaneme hodnotu rovnú $2l$, čo nie je prekvapivé, nakoľko to vyjadruje to, že daná krivka má všade rovnakú „krivosť“. Stačí nám preto zistiť kde nadobúda $|\lambda|$ najväčšiu hodnotu.
Ďalej postupujeme štandardným postupom – dvakrát zderivujeme väzbu podľa času a dosadíme za druhé derivácie kartézskych súradníc ich vyjadrenia z Lagrangeových rovníc. S využitím rovnice väzby a toho, že súčet kvadrátov prvých derivácií súradníc si označíme ako v^2 (predstavujúc si pod tým kvadrát rýchlosti hmotného bodu) dostaneme rovnicu
$$\frac{2\lambda}{m}l^2 - gy + v^2 = 0\,.$$
Toto jednoducho upravíme na tvar
$$\lambda l^2 = \frac{1}{2}mgy - \frac{1}{2}mv^2\,.$$
Využijúc štandardný trik pri tomto type príkladov, a síce zákon zachovania energie v tvare
$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = E(0)\,,$$

kde $E(0)$ je celková počiatočná energia, ktorú neskôr v prípade potreby vieme určiť z počiatočných podmienok. Dosadením za $\frac{1}{2}mv^2$ zo zákonu zachovania energie dostaneme

$$\lambda l^2 = \frac{1}{2}mgy - E(0) + mgy\,,$$
$$\lambda l^2 = \frac{3}{2}mgy - E(0)\,.$$

Predelením členom l^2 dosteneme λ ako lineárnu funkciu jedinej súradnice y. Našou úlohou bude teda nájsť extrémy tejto funkcie. Spomenieme si, že funkcia môže nadobúda extrémy buď na okrajoch svojho definičného oboru, alebo vo vnútri definičného oboru vo všetkých miestach, kde je derivácia funkcie rovná nule. Derivácia λ je

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}y} = \frac{3mg}{2l^2}\,,$$

čo ako vidíme, nebude rovné nule. Extrémy sa budú nachádzať na okraji definičného oboru a nie je ťažké si uvedomiť, že najväčšia hodnota $|\lambda|$ bude pre $y = -l$, čo odpovedá kyvadlu smerujúcemu kolmo nadol. Ďalej vidíme, že miesto kde pôsobí na záves najväčšia sila bude vždy v tomto bode a od počiatočnych podmienok bude závisieť len jej veľkosť, čo sa dá rýchlo vidieť z rovnice pre λ.

2. Druhý príklad je veľmi priamočiary. Je potrebné iba zvoliť správne zovšeobecnené súradnice a potom sa len nepomýliť pri prederivovaní. Autor vzorového riešenia zvolil ako súradnice uhlové polohy jedného a druhého závesu voči osy x (zvolenej štandardne v horizontálnom smere). Takéto natočenie súradníc nie je síce veľmi prirodzené, ale technicky je rovnako dobré ako akékoľvek iné, naviac nám dovoľuje využiť následne vzťahy medzi kartézskymi súradnicami a polárnymi súradnicami a nemusíme si tieto vzťahy odvodzovať. Pre identické dĺžky závesov l dostaneme prevody medzi súradnicami prvého a druhého závažia

$$x_1 = l\cos\varphi_1\,,$$
$$y_1 = l\sin\varphi_1\,,$$
$$x_2 = l\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2\,,$$
$$y_2 = l\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2\,.$$

Známym postupom dostanem tvar lagrangiánu

$$L = ml^2\dot{\varphi_1}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi_2}^2 + ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - mgl\left(2\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2\right)\,.$$

Jeho prederivovaním postupne podľa súradníc získame dvojicu Lagrangeovych rovníc

$$\begin{aligned}0 &= 2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - ml^2\dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\left(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2\right)\\ &\quad + ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + 2mgl\cos\varphi_1\,,\\ 0 &= ml^2\ddot{\varphi}_2 + ml^2\ddot{\varphi}_1\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - ml^2\dot{\varphi}_1\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\left(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2\right)\\ &\quad - ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + mgl\cos\varphi_2\,.\end{aligned}$$

3. V tejto úlohe riešime takzvané eliptické kyvadlo (názov vyplýva z toho, že hmotný bod umiestnený na závese sa bude pohybovať po časti elipsy). Tento fakt je síce zaujímavý, ale nie je potrebný k vyriešeniu úlohy, preto sa od neho odprostíme a začneme zostavením Lagrangiánu. Vzťah medzi zovšeobecnenými súradnicami a kartézskymi bude triviálny nakoľko pre prvý hmotný bod upevnený k osy x budú zovšeobecnené súradnice

$$x_1 = x\,,$$
$$y_1 = 0\,.$$

Pre druhý hmotný bod dostaneme vzťahy ako pre matematické kyvadlo, s tým rozdielom, že x -ová súradnica bude modifikovaná

$$x_2 = x + l\cos\varphi\,,$$
$$y_2 = l\sin\varphi\,.$$

Z tohto prederivovaním jednoducho dostaneme Lagrangián

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}^2 + m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2\dot{x}^2\right) - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 g l\sin\varphi\,.$$

Podľa Hamiltonovho variačného princípu vieme, že akcia sa musí extremalizovať. Akcia S je definovaná ako

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t\,.$$

Ak má mať v nejakej funkcii extremálu, musí byť na tejto funkcii gateaux derivácia tohto funkcionálu nulová. Spočítame preto postupne gateaux derivácie podľa oboch zovšeobecnených súradníc. Gateaux derivácie budeme značiť v tomto vzorovom riešení ako štandardné derivácie. Gateuax derivácie v smere $h(x)$ sú

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \int_{t_1}^{t_2} \left(m_1\dot{x} + m_2\dot{x} - m_2 l\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\dot{h}\,\mathrm{d}t\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varphi} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(m_2 l^2\dot{\varphi} - m_2 l\dot{x}\sin\varphi\right)\dot{h} - \left(m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + m_2 g l\cos\varphi\right)h\right)\mathrm{d}t\,.$$

Na prvom funcionále spravíme per partes aby sme presunuli deriváciu z funkcie $h(x)$, to isté aj v prvom člene druhého integrálu. To nám po prederivovaní dáva

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \int_{t_1}^{t_2} -\left(m_1\ddot{x} + m_2\ddot{x} - m_2 l\ddot{\varphi}\sin\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)h\,\mathrm{d}t\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varphi} = \int_{t_1}^{t_2} \left(-m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{x}\sin\varphi + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi - m_2 g l\cos\varphi\right)h\,\mathrm{d}t\,.$$

Z čoho vidíme hneď, že aby funkcionály boli nulové, musí byť nulový výraz v zátvorke, čo nám dáva dve hľadané Lagrangeove rovnice.

$$0 = m_1\ddot{x} + m_2\ddot{x} - m_2 l\ddot{\varphi}\sin\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\cos\varphi\,,$$
$$0 = -m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{x}\sin\varphi - m_2 g l\cos\varphi\,.$$

Čo sú rovnaké rovnice ako by sme dostali použitím štandardného postupu pre zostavenie Lagrangeovych rovníc.

Jakub Jambrich
jakubj@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.