Úloha V.5 ... odskakující hopík

9 bodů; průměr 5,32; řešilo 19 studentů

Tuhou kouli ve vzduchu roztočíme dostatečně velkou úhlovou rychlostí ω rovnoběžnou se zemí. Poté hopík pustíme z výšky h_0 na vodorovnou podložku. Od ní se odrazí do výšky h_1 a dopadne nedaleko původního místa dopadu. Určete vzdálenost těchto dvou bodů dopadu, jestliže je třecí koeficient mezi koulí a zemí f dostatečně malý. *Matěj si moc rád hraje s hopíkem.*

Z rovnic pro volný pád $h = \frac{1}{2}gt^2$ a $v = gt$ dostaneme rychlost v_0, kterou koule dopadne na zem

$$v_0 = \sqrt{2h_0 g}\,.$$

Koule dopadá přímo svisle, ale po odrazu bude mít jak svislou složku rychlosti v_y, tak vodorovnou složku v_x díky tření. Velikost v_y je taková, aby koule vyskočila do výšky h_1, tedy

$$v_y = \sqrt{2h_1 g}\,,$$

Předpokládejme, že srážka trvá velmi malý čas $\Delta t = t_1 - t_0$. Hybnost ve svislém směru se během nárazu změní o

$$\Delta p_y = m(v_0 + v_y)\,.$$

Protože změna hybnosti je rovna impulzu síly, můžeme říct, že pro svislou sílu F_y působící na kouli v průběhu nárazu platí

$$\Delta p_y = \int_{t_0}^{t_1} F_y \mathrm{d}t\,,$$

kde síla může být obecně závislá na průběhu srážky, tedy na času t. Horizontální třecí síla, která působí mezi koulí a deskou, je v každém okamžiku $F_x = fF_y$. Ze zadání vyplývá, že můžeme předpokládat, že třecí síla je tak malá, že nezastaví rychlou rotaci koule a ta tak během celé srážky neustále prokluzuje. Z toho si vyjádříme změnu hybnosti ve vodorovném směru

$$\Delta p_x = \int_{t_0}^{t_1} F_x \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} fF_y \mathrm{d}t = f\int_{t_0}^{t_1} F_y \mathrm{d}t = f\Delta p_y\,.$$

Všimněme si, že jsme se nyní kompletně zbavili závislosti síly F_y na čase a také času Δt, který již ani není potřeba limitně zmenšovat k nule. V tomto triku spočívala veškerá záludnost této úlohy. Dále vyjádříme rychlost ve vodorovném směru v okamžiku po odrazu

$$v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{f\Delta p_y}{m} = f(v_0 + v_y)\,.$$

Díky znalosti výšky h_1 jsme snadno schopni dopočítat, že celý skok koule (od prvního do druhého dopadu) trval čas

$$t = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}}\,.$$

Kombinací s v_x získáme doskočenou vzdálenost

$$s = v_x t = 2f(v_0 + v_y)\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2f\left(\sqrt{2h_0 g} + \sqrt{2h_1 g}\right)\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 4f(h_1 + \sqrt{h_0 h_1})\,.$$

Je pozoruhodné, že výsledek nezávisí na momentu hybnosti koule, na gravitačním zrychlení a dokonce ani na počáteční úhlové rychlosti ω (pokud je dostatečně velká). Samozřejmě jen za docela silného předpokladu, že třecí koeficient je tak malý, že koule během dopadu prokluzuje.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz