Úloha III.3 ... teplíčko v Dysonově sféře
6 bodů; průměr 5,36; řešilo 44 studentů

Jaký poloměr by musela mít Dysonova sféra, aby obklopila hvězdu se zářivým výkonem Slunce tak, že na vnějším povrchu této sféry by byla teplota $t = 25\,^{\circ}\mathrm{C}$? Neuvažujte přítomnost atmosféry v Dysonově sféře. Dysonova sféra by měla být relativně tenká dutá struktura kulového tvaru obklopující danou hvězdu. *Karel má rád Dysonovy sféry.*

Ze zadání plyne, že teplota Dysonovy sféry se ustálila na konstantní teplotě $t = 25\,^{\circ}\mathrm{C}$. K vyřešení úlohy nám tedy stačí analyzovat tok energie Dysonovou sférou. Předpokládáme, že Dysonova sféra je schopná pohltit veškerou energii přicházející ze Slunce. Tato energie je přenášena v podobě elektromagnetického záření. Ze zadání víme, že daná hvězda má zářivý výkon Slunce $L = 3{,}83 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ [1]. Tento výkon je rovnoměrně vyzářen do všech směrů. Množství energie, které dopadne za jednotku času na jednotkovou plochu Dysonovy sféry je

$$\frac{L}{S} = \frac{L}{4\pi r^2}\,,$$

kde S je plocha Dysonovy sféry a r je její poloměr. Rozdíl vnitřního a vnějšího poloměru zanedbáváme. Dysonova sféra se navenek jeví jako absolutně černé těleso, protože veškerou energii z hvězdy pohltí a navenek vyzařuje pouze tepelné záření. Podle Stefanova-Boltzmannova zákona je celková intenzita M tepelného záření černého tělesa, což je celková energie vyzářená za jednotku času jednotkovou plochou zdroje záření, rovna

$$M = \sigma T^4\,,$$

kde $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a $T = 298\,\mathrm{K}$ je termodynamická teplota Dysonovy sféry.

Zářivý výkon hvězdy a výkon tepelného záření Dysonovy sféry jsou jediné zdroje záření, které musíme započítat. Přestože princip fungování Dysonovy sféry je schován v pomyslné černé skříňce, stačí nám vědět, že Dysonova sféra je schopna pohltit *veškerou* energii ze Slunce. Na druhou stranu, aby byl náš výpočet korektní, musí tepelné záření vnější plochy Dysonovy sféry navždy opustit tuto soustavu, což jsme mlčky předpokládali. Náš předpoklad byl v pořádku, neboť koule je konvexní těleso a energie vyzařovaná malou ploškou ΔS na jejím povrchu, sféře, uniká do prázdného poloprostoru. To nám zaručuje, že Dysonova sféra neozařuje sama sebe vnějším povrchem.

Nyní konečně dejme do rovnosti energii z hvězdy, která dopadne za jednotku času na jednotkovou plochu Dysonovy sféry, a intenzitu M tepelného záření Dysonovy sféry,

$$\frac{L}{4\pi r^2} = \sigma T^4\,.$$

Odtud získáme hledaný poloměr r Dysonovy sféry,

$$r = \frac{1}{2T^2}\sqrt{\frac{L}{\pi\sigma}}\,.$$

[1] Viz např. `https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html`.

Po číselném dosazení dostáváme, že hledaný poloměr Dysonovy sféry pro zadané podmínky je $r = 2{,}61 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} = 1{,}74\,\mathrm{AU}$.

Václav Mikeska
`v.mikeska@fykos.cz`