

## Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

s touto sérií přichází poslední šance vylepšit své dosavadní skóre a zajistit si tak místo na jarním soustředění. Již teď vám můžeme slíbit, že bude stát opravdu za to!

Ve třetí sérii pronikneme do tajů biofyziky, kde se pokusíme zjistit, jakým způsobem lze nabíjet powerbanku pouze ze zdrojů lidského těla. Opomenuta nezůstane ani klasická část fyziky, těšit se můžete například na Mikulášovy zlevněné banány či Jáchymovo efektivní kafe. V seriálu se budeme zabývat Langrangeovými rovnicemi 2. druhu, které popisují pokročilejší formulaci mechaniky.

Ve středu 28. listopadu 2018 proběhlo Fyziklání online, což byl ideální trénink na FYKOSí Fyziklání, které se bude konat 15. února 2019, opět v Praze. Již se můžete přihlásit a poté si poměřit síly se svými vrstevníky z celé České a Slovenské republiky i zahraničí! Těšíme se na vás na soutěži.

Organizátoři opět trochu nestíhají. Snad nám chybějící statistiky odpustíte, stejně jako chybějící předpověď počasí před dvěma týdny. Ačkoliv máme značně zjednodušené podmínky, slibujeme, že řešení sepíšeme poctivě.

Na závěr bychom vám chtěli popřát šťastné a veselé Vánoce, plné pohody, radosti, lásky a dobrého cukroví. Budeme se na Vás opět těšit v novém kalendářním roce!

*Organizátoři*



## Zadání III. série

*Termín uploadu: 18. 12. 2018 23.59*

*Termín odeslání: 17. 12. 2018*

### Úloha III.1 ... zlevněné banány

3 body

Mikuláš v obchodě vložil několik banánů do igelitového sáčku. Před jejich zvážení ho napadlo, že kdyby pytlík naplnil místo vzduchu heliem, budou banány stát o něco méně. Helium Mikuláš koupil ve slevě za jednu korunu na litr při standardním tlaku. Jaká musí být cena banánů, aby se mu tento „podvod“ vyplatil?

*Bonus* Nalezněte plyn, u kterého se vyplatí plnit jím sáček při ceně banánů 30 korun na kilogram. Nezapomeňte citovat zdroje ceny daného plynu.

### Úloha III.2 ... efektivní kafe

3 body

Jsou dvě hodiny v noci a Jáchym si jde uvařit kafe. Na plotýnku, kterou tvoří litinový válec o poloměru  $r$  a výšce  $h$ , položí konvici s tepelnou kapacitou  $C_k$ . Konvice obsahuje vodu o objemu  $V$ , která má počáteční teplotu  $T_v$ . Zbytek soustavy má počáteční teplotu  $T_s$ . Jaká je celková účinnost (tj. poměr energie přijaté vodou ku dodané energii) ohřevu vody z její počáteční teploty na teplotu  $T = 100^\circ\text{C}$ ? Neznámé hodnoty si dohledejte v tabulkách, nebo je odhadněte. Předpokládejte, že děj proběhne tak rychle, že všechny tepelné ztráty můžeme zanedbat. Pro úplnost zadání nechtě  $T_s, T_v < T$ .

**Úloha III.3 ... teplíčko v Dysonově sféře**

6 bodů

Jaký poloměr by musela mít Dysonova sféra, aby obklopila hvězdu se zářivým výkonem Slunce tak, že na vnějším povrchu této sféry by byla teplota  $t = 25\text{ }^\circ\text{C}$ ? Neuvažujte přítomnost atmosféry v Dysonově sféře. Dysonova sféra by měla být relativně tenká dutá struktura kulového tvaru obklopující danou hvězdu.

**Úloha III.4 ... destrukce smyčky**

8 bodů

Představme si měděnou smyčku o poloměru  $r$ , která je určena rovinou, na níž je kolmé magnetické pole s magnetickou indukcí  $B$ . Maximální povolené tahové napětí ve smyčce je  $\sigma_p$ . Nyní začneme měnit magnetický tok ve smyčce z původní hodnoty  $\Phi_0$  podle vzahu  $\Phi(t) = \Phi_0 + \alpha t$ , kde  $\alpha$  je kladná konstanta. Určete, za jak dlouho dosáhneme ve smyčce maximálního tahového napětí.

*Nápověda* Napětovou sílu ve smyčce můžeme spočítat jako  $T = |BIr|$ .

**Úloha III.5 ... bodová**

8 bodů

Uvažujme hmotný bod umístěný v jednodimenzionálním prostoru. Jeho počáteční pozice i rychlost je nulová. Bod se dokáže pohybovat s libovolným zrychlením z intervalu  $[-a, a]$ . Nazvěme  $M(t)$  množinu všech možných stavů  $(x, v)$  takových, že bod se v čase  $t$  může nacházet na pozici  $x$  s rychlostí  $v$ . Sestrojme graf závislosti  $v$  na  $x$  v čase  $t$ . Množina  $M(t)$  v tomto grafu vytvoří plochu  $S(t)$ . Analyticky popište křivky ohraničující  $S(t)$ .

*Bonus* Najděte funkční závislost obsahu  $S(t)$ .

**Úloha III.P ... osobní powerbanka**

10 bodů

Poslední procenta baterky v mobilu dochází, powerbanku máte vybitou nebo jste si ji pro jistotu nechali doma a 230 také není nikde v dohledu. Nebylo by skvělé mít neustále při sobě vlastní zdroj elektrické energie?

- Navrhněte několik různých zařízení, která by dokázala vyrábět elektrickou energii pouze ze zdrojů vašeho těla.
- Diskutujte jejich maximální výkon a účinnost. Co všechno byste s jejich pomocí dokázali zásobovat elektřinou?
- Diskutujte jejich dopad na vaše zdraví a fyzickou kondici. Které orgány by vám v důsledku jejich přetěžování selhaly nejdříve?

Jako jedno z možných zařízení uvažujte soustavu drobných turbín umístěných v krevním řečišti. Všechny argumenty podpořte co nejpřesnějšími výpočty.

**Úloha III.E ... indexovaný kondenzátor**

12 bodů

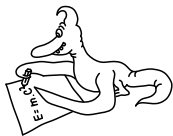
Poštou vám přišel elektrolytický kondenzátor a rezistor. Změřte kapacitu kondenzátoru a odpor rezistoru, neměřte je však přímo. Součin kapacity kondenzátoru a odporu rezistoru je přibližně  $RC \approx 20\text{ s}$ .

*Varování* Elektrolytický kondenzátor má kladnou a zápornou elektrodu, při zapojení opačně ho můžete zničit. Maximální dovolené napětí je 10 V.

## Úloha III.S ... zobecněná

10 bodů

1. Mějme vodorovnou desku, ve které je malá dírka. Přes tuto dírku je provlečený provázek o délce  $l$ , na jehož spodním konci je zavěšeno závaží o hmotnosti  $M$ . Toto závaží lze považovat za hmotný bod. Na druhém konci provázku na rovné desce je druhý hmotný bod (kulička) o hmotnosti  $m$ . Provázek mezi nimi je napnutý díky závaží o hmotnosti  $M$ . Celou soustavu držíme v klidu tak, že část provázku pod deskou je ve svislém směru. Poté druhému hmotnému bodu, kuličce, udělíme rychlost  $v$  ve vodorovném směru kolmém na provázek ve chvíli, kdy soustavu uvolníme. V tomto příkladu neuvažujte žádné tření. Zvolte vhodné souřadnice a sestavte Lagrangeovu funkci pro tuto soustavu.
2. Mějme železnou tyč ohnutou do tvaru paraboly tak, že pokud v kartézské soustavě působí tíhové zrychlení v záporném směru osy  $y$ , pak tyč má stejný tvar jako funkce  $y = x^2$ . Po tyči se může volně pohybovat hmotný bod o hmotnosti  $M$ , ke kterému je pevnou nehmotnou tyčkou o délce  $l$  připevněno závaží o hmotnosti  $m$ . Takto jsme vytvořili kyvadlo se závěsem klouzajícím podél ohnuté tyče. Konstrukce dovoluje pohyb celé soustavy pouze v rovině paraboly. Určete vhodné zobecněné souřadnice a najděte Lagrangeovu funkci této soustavy.
3. Mějme přímkou nakloněnou pod úhlem  $\alpha$  vzhledem k vodorovné rovině, po které se pohybuje bez tření hmotný bod o hmotnosti  $m$ . Najděte vhodné zobecněné souřadnice této soustavy a sestavte Lagrangeovu funkci. Poté sestavte i Lagrangeovy rovnice, dvakrát je zintegrujte, a tak najděte řešení. Zkontrolujte si, zda vaše řešení vychází stejně, jako řešení, které byste získali středoškolskou metodou výpočtu. Při integraci nezapomeňte na integrační konstanty a vysvětlete jejich význam. Jaké budou jejich hodnoty, pokud se bod spustí z klidu z výšky  $h$ ?



## Řešení II. série

## Úloha II.1 ... moonmen

3 body; průměr 2,63; řešilo 68 studentů

Vaše váha by byla při Měsíci v zenitu menší než při Měsíci v nadiru. O kolik?

*Matěj zřejmě doufá, že v tu chvíli něco snadněji postaví.*

Nejprve si ujasníme, že naše hmotnost nezávisí vůbec na poloze měsíce ani na tom, na jaké planetě se nacházíme. Váha je však veličina, kterou ukazují váhy, když se na ně postavíme. Váhy měří pouze sílu, tu pak přepočítávají na hmotnost, přičemž používají standardní hodnotu tíhového zrychlení  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

Proto nás bude zajímat pouze rozdíl sil v případě, když je Měsíc v zenitu a když je v nadiru. Naši hmotnost označme  $m$ . Hmotnost Měsíce budeme značit  $M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ , jeho vzdálenost od středu Země  $R = 384\,000 \text{ km}$  a poloměr Země  $r = 6\,378 \text{ km}$ . Při výpočtu síly, kterou na nás působí Měsíc, vyjdeme z Newtonova gravitačního zákona

$$F = G \frac{mM}{(R-r)^2},$$

kde  $G$  je Newtonova gravitační konstanta. Protože vzdálenost Měsíce od Země je o dva řády větší než poloměr Země, můžeme  $r$  zanedbat a počítat pouze se vzdáleností  $R$ . Když se Měsíc nachází v nadiru (podnožníku), působí na nás silou  $F$  směrem od Země. Když se nachází v zenitu (nadhlavníku), přitahuje nás silou  $F$  k Zemi. Celkový rozdíl je tedy  $2F$ . Tomu odpovídá změna váhy

$$\Delta m = \frac{2F}{g} = \frac{2GmM}{gR^2}.$$

Z použitých veličin neznáme naši hmotnost  $m$ , proto odhadneme průměrnou hmotnost fykosáka na  $m = 70 \text{ kg}$ . Po dosazení máme  $\Delta m = 0,47 \text{ g}$ . Budete-li se vážit přesně pod Měsícem, budete vážit přibližně o polovinu gramu méně než v druhém případě.

## Skrytý bonus

Gravitační síla však není jednou silou, která na nás působí. Ještě je tu odstředivá síla, která vzniká tak, že se otáčíme kolem těžiště soustavy Země–Měsíc.

Úhlová rychlost otáčení této soustavy buď  $\omega$ , hmotnost Země necht' je  $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ . Těžiště soustavy se potom nachází ve vzdálenosti

$$\frac{M}{M_Z + M} R$$

od středu Země směrem k Měsíci, což je pod zemským povrchem. Velikost odstředivé síly v okamžiku, kdy máme Měsíc přesně pod nohama, je

$$F_1 = m\omega^2 \left( r + \frac{M}{M_Z + M} R \right).$$

Když je Měsíc v opačné pozici, pro odstředivou sílu platí

$$F_2 = m\omega^2 \left( r - \frac{M}{M_Z + M} R \right).$$

Abychom dosáhli požadované přesnosti, nemůžeme při výpočtu síly  $F$  zanedbat zemský poloměr. Počítejme tedy se silou  $F_a$  pro měsíc v podnožníku a  $F_b$  pro měsíc v nadhlavníku. Výsledný rozdíl sil bude

$$\begin{aligned} \Delta F &= (F_a - F_1) - (-F_b - F_2) = \frac{GmM}{(R+r)^2} + \frac{GmM}{(R-r)^2} - \frac{2m\omega^2 MR}{M_Z + M} = \\ &= GmM \left( \frac{1}{(R+r)^2} + \frac{1}{(R-r)^2} - \frac{2}{R^2} \right), \end{aligned}$$

kde jsme za  $\omega$  dosadili z třetího Keplerova zákona

$$\omega^2 = \frac{G(M_Z + M)}{R^3}.$$

Dále můžeme vzorec pro změnu síly upravit na

$$\begin{aligned} \Delta F &= GmM \left( \frac{R^2 - (R+r)^2}{(R+r)^2 R^2} + \frac{R^2 - (R-r)^2}{(R-r)^2 R^2} \right), \\ \Delta F &= GmM \frac{r}{R^2} \left( \frac{-2R-r}{(R+r)^2} + \frac{2R-r}{(R-r)^2} \right), \\ \Delta F &= GmM \frac{r}{R^2} \left( \frac{(-2R-r)(R-r)^2 + (2R-r)(R+r)^2}{(R+r)^2 (R-r)^2} \right), \\ \Delta F &\approx GmM \frac{6r^2}{R^4}. \end{aligned}$$

Pro rozdíl vah po dosazení  $a_g = \frac{GM_Z}{r^2}$  (zde zanedbáváme odstředivou sílu způsobenou rotací Země, ale chyba způsobená tímto zanedbáním je vůči výsledné hodnotě velmi malá, protože se jedná o multiplikatívni konstantu a ne o rozdíl blízkých čísel jako výše) dostáváme

$$\Delta m \approx m \frac{6Mr^4}{M_Z R^4} = 0,39 \text{ mg},$$

což je výrazně méně než v předchozím případě. Stojí za pozornost, že takové síly způsobují mimo jiné i příliv a odliv.

*Matěj Mezera*

m.mezera@fykos.cz@fykos.cz

*Jozef Lipták*

liptak.j@fykos.cz@fykos.cz

## Úloha II.2 ... finská sauna

3 body; průměr 2,82; řešilo 55 studentů

Představte si, že by Dan o měl finskou saunu o rozměrech 2,5 m krát 3 m krát 4 m s relativní vlhkostí uvnitř 20% při teplotě 90 °C. Kolik vody by musel vypařit, aby uvnitř sauny byla relativní vlhkost 35%? Vodu vypařuje uvnitř na kamnech tak, že se teplota místnosti nezmění.

*Karel přemýšlel nad tím, jestli se Danovi rozpustí plavky.*

Poměrně dobrý výsledek získáme, pokud vypočítáme množství vodní páry v sauně na začátku a na konci. Nejdříve si ujasníme, co nám udává veličina absolutní vlhkost vzduchu  $\Phi$ . Ta nám zadává hmotnost  $m$  vodní páry ve vzduchu o objemu  $V$  neboli hustotu vodní páry obsažené ve vzduchu. Matematicky ji můžeme vyjádřit jako  $\Phi = m/V$ . Relativní vlhkostí vzduchu  $\varphi$  pak rozumíme poměr absolutní vlhkosti vzduchu  $\Phi$  při dané teplotě a absolutní vlhkosti vzduchu  $\Phi_m$ , při které je za této teploty vodní pára ve vzduchu sytou párou.

Nyní už je výpočet jednoduchý. Hmotnost vody, kterou musí Dano nechat vypařit, je rovna

$$\Delta m = (\Phi_2 - \Phi_1) V,$$

kde  $V$  je objem sauny,  $\Phi_1$  a  $\Phi_2$  jsou absolutní vlhkosti vzduchu na začátku a na konci. Dále potřebujeme využít naší znalosti relativní vlhkosti  $\varphi_1 = 20\%$  a  $\varphi_2 = 35\%$  na začátku a na konci. Pro hmotnost vody  $\Delta m$  dostaneme

$$\Delta m = (\varphi_2 - \varphi_1) \Phi_m V,$$

kde  $\Phi_m = 0,42 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  je hustota syté vodní páry při teplotě  $90^\circ\text{C}$ , jejíž číselnou hodnotu najdeme v tabulkách.<sup>1</sup> Dano by ale radši znal potřebný objem vody  $\Delta V$ , a proto mu ho ještě dopočteme,

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho} = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \Phi_m V}{\rho},$$

kde  $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  je hustota studené vody (asi  $10^\circ\text{C}$ ), kterou do sauny napustil z vnějšku. Po číselném dosazení dostáváme, že Dano musí nechat vypařit 1,91 vody. Nezapomínejme, že se nejedná o přesný výsledek, protože jsme neuvažovali například únik vzduchu s vodní parou ze sauny v průběhu vypařování.

*Václav Mikeska*

v.mikeska@fykos.cz@fykos.cz

### Úloha II.3 ... fyzikální trofej

6 bodů; (chybí statistiky)

*Danka vyhrála závod v derivování a za odměnu dostala sošku vyrobenou z průhledného materiálu ve tvaru hranolu se čtvercovou podstavou o hraně  $a = 5 \text{ cm}$  a výšce  $h \leq a$ . Ať se dívá, jak se dívá, čelní stěnou nikdy nevidí přes boční stěny skrze trofej, vždy vidí pouze odražené paprsky. Jaký může mít materiál trofeje index lomu? Hranol je umístěn ve vzduchu.*

*Michala K. okouzila soška.*

Nejdříve se zamysleme nad tím, co se nám zadání snaží říct. Na bočních stěnách vidíme jenom odraz, tudíž jsme schopni vidět jen paprsky přicházející z protilehlé stěny (ať už přímo nebo odrazem).

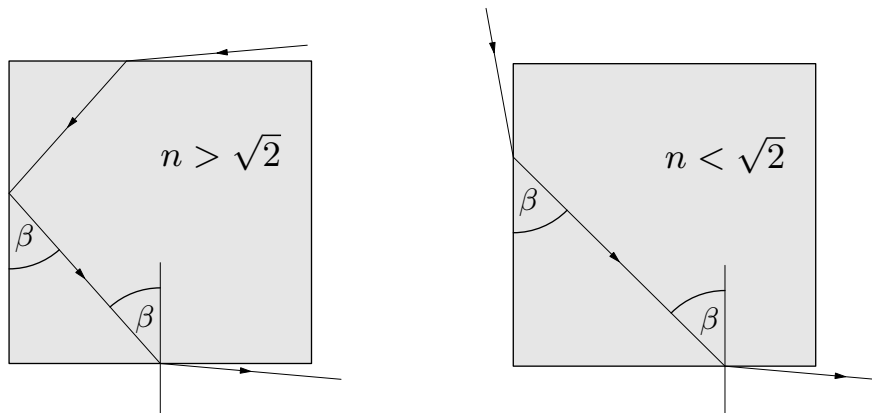
To nutně implikuje, že paprsek se musí na boční stěně absolutně odrazit. Označíme-li úhel dopadu na první rozhraní (ve směru od pozorovatele) jako  $\alpha$  a úhel lomu jako  $\beta$ , pak na prvním rozhraní píšeme Snellův zákon

$$n_0 \sin \alpha = n \sin \beta,$$

kde  $n_0$  je index lomu vzduchu a  $n$  index lomu hranolu. Z toho pro absolutní odraz na boční stěně dostaneme

$$n \sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = n \cos \beta \geq 1. \quad (1)$$

<sup>1</sup><https://www.tzb-info.cz/tabulky-a-vypocty/9-vlastnosti-syte-vodni-pary-pri-danem-tlaku>



Obr. 1: Pohled shora na hranol.

Nyní nalezneme největší možný úhel  $\beta$ . V rovnici výše nastává rovnost právě pro největší úhel  $\beta$ , označme ho  $\beta_0$ . Tomuto úhlu odpovídá i největší úhel  $\alpha_0$  a to v případě, když jsou paprsky téměř rovnoběžné s povrchem hranolu, takže  $\alpha_0 = \pi/2$ . Na prvním, resp. na druhém rozhraní platí

$$n \sin \beta_0 = n_0 \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$n \cos \beta_0 = n_0 \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

kde jsme při úpravách položili index lomu vzduchu roven 1. Sinus a kosinus úhlu  $\beta$  se rovnají a tedy

$$\beta_0 = \frac{\pi}{4}.$$

V posledním kroku dosadíme do (1) maximální  $\beta_0$ , z čehož pro index lomu hranolu dostaneme  $n \geq \sqrt{2}$ .

**Vít Beran**

vít.beran@fykos.cz@fykos.cz

## Úloha II.4 ... lunar lander

7 bodů; (chybí statistiky)

Jak má řídicí elektronika přistávacího modulu Apolla dávkovat tah  $T$  motoru (a tedy regulovat spotřebu paliva) směřující směrem dolů, aby se loď snášela na povrch Měsíce rovnoměrným přímočarým pohybem? Efektivní rychlost spalín motoru je  $u$ . Loď již zbrzdila svůj pohyb po orbitě a sestupuje přímo dolů v homogenním gravitačním poli se zrychlením  $g$ . Počáteční hmotnost modulu je  $m_0$ .

*Bonus* Jak má elektronika dávkovat tah při přistání z výšky  $h$  a počáteční rychlosti  $v_0$ , aby přistání bylo tzv. pádem z nulové výšky a minimalizovala se spotřeba paliva? Maximální tah motoru je  $T_{\max}$ .

Michal na webu<sup>2</sup>

<sup>2</sup><http://www.root.cz/clanky/historie-vyvoje-pocitacovych-her-2-cast-vek-simulaci/>

Pri riešení tejto úlohy je dôležité uvedomiť si, že sa jedná o sústavu s premennou hmotnosťou. Pohybovú rovnicu systému určíme z prvého Newtonovho zákona

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

Nech je v nejakom čase  $t$  hybnosť sústavy  $p(t) = m(t)v(t)$ , pričom hybnosť  $p$  aj rýchlosť  $v$  sú kladné smerom nahor. Keďže je rýchlosť modulu  $v$  konštantná, za čas  $\Delta t$  sa hybnosť zmení na

$$p(t + \Delta t) = (m(t) + \Delta m)v - \Delta m(v - u),$$

kde  $\Delta m(v - u)$  je práve hybnosť paliva vyvrhnutého smerom nadol z motorov modulu. Pre nekonečne malú zmenu času prejdeme od  $\Delta t$  k diferenciálu  $dt$ , odkiaľ

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p(t + dt) - p(t)}{dt} = \frac{dm}{dt}u.$$

Na pristávací modul pôsobí jediná sila, sila gravitačná  $F = -F_g = -m(t)g$ . Po dosadení do prvého Newtonovho zákona dostávame

$$-m(t)g = \frac{dm(t)}{dt}u = -T.$$

Riešime teda diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{g}{u}m = \frac{dm}{dt},$$

ktorej riešením je

$$m(t) = m_0 \exp\left(-\frac{g}{u}t\right),$$

kde  $m_0$  je hmotnosť landeru v čase  $t = 0$  s. Spotrebu paliva máme jednoducho ako

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{u} \exp\left(-\frac{g}{u}t\right)$$

a pre veľkosť ťahu motora požadujeme

$$T(t) = m_0 g \exp\left(-\frac{g}{u}t\right),$$

aby modul klesal rovnomerne priamočiario.

### Bonus

V tomto prípade máme pohybovú rovnicu

$$mg = -\dot{m}u - m\ddot{x},$$

kde kladný smer súradnice  $x$  smeruje nahor, z čoho po úprave máme

$$g + \ddot{x} = -\frac{\dot{m}}{m}u.$$



Po integrácii podľa času po čas dopadu  $t_d$  máme

$$gt_d + [\dot{x}]_0^{t_d} = -u [\ln(m)]_0^{t_d}, \quad (2)$$

$$\frac{gt_d - v_0}{u} = \ln\left(\frac{m_0}{m_{t_d}}\right),$$

kde sme použili  $v(t_d) = 0$ . Vidíme teda, že pre minimálnu spotrebu paliva musíme pristáť čo najrýchlejšie. Riešením by bolo tesne pred dosadnutím prudko spomaliť, to však nie je technicky možné. Najlepšie je teda voľne padať a následne vo vhodnom čase spustiť motory na plný ťah tak, aby modul dosadol s nulovou rýchlosťou.

Ak v čase  $t_0 = 0$  s začneme brzdiť konštantným ťahom, pre hmotnosť landeru máme

$$m(t) = m_0 - \frac{T_{\max}}{u} t.$$

To po dosadení do rovnice (2) pre medze s indexom 0 pre čas začatia brzdenia a bez indexu v čase  $t$  počas brzdenia a úprave dáva

$$v(t) = v_0 - gt - u \ln\left(1 - \frac{T_{\max}}{um_0} t\right).$$

Ak tento vzťah znovu preintegrujeme a dosadíme medzu pre začiatok brzdenia, dostaneme

$$x(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 - u \left( \left( t - \frac{um_0}{T_{\max}} \right) \ln \left( 1 - \frac{T_{\max}}{um_0} t \right) - t \right),$$

kde  $h_0$  je výška landeru nad povrchom v čase začatia brzdenia. Pár poznámok k výsledku. Pre  $T = 0$ , teda bez ťahu motorov, dostávame vzťahy pre voľný pád (odporúčame použiť Taylorov rozvoj na logaritmus). Vzťah v argumente logaritmu je podiel aktuálnej hmotnosti lode a jej hmotnosti v počiatočnom čase, teda je kladný, pokiaľ lodi nedôjde palivo a pohybová rovnica prestane platiť.

Ako má teda elektronika lode rozhodovať? V každom okamihu voľného pádu vieme zo vzťahu pre rýchlosť položením  $v = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  určiť čas  $t$  (napríklad numericky), v ktorom bude mať lander nulovú rýchlosť. Tento čas dosadíme do vzťahu pre výšku nad povrchom  $x(t)$ . Brzdiť je potrebné začať v okamihu, keď sa takto určená výška rovná aktuálnej výške landeru nad povrchom. V praxi sa často prestane brzdiť tesne nad povrchom a lander sa nechá dopadnúť voľným pádom z malej výšky, aby motory zbytočne nevírili prach na povrchu.

**Jozef Lipták**

liptak.j@fykos.cz@fykos.cz

## Úloha II.5 . . . kladka a pták

9 bodů; průměr 3,16; řešilo 37 studentů

Ke stropu je zavěšená pevná kladka a je na ni navlečeno lano tak, aby jeho levý i pravý konec byly ve stejné hloubce. Na jednom konci visí pták Fykosák a na druhém konci závaží, které má stejnou hmotnost jako pták. V počátečním stavu jsou pták i závaží nehybné. Popište, co se bude se soustavou dít, začne-li pták Fykosák lézt vzhůru (po svém vlastním lanu) s použitím konstantní síly. Nejprve předpokládejte, že lano je nehmotné a kladka je ideální. Poté počítejte s délkovou hmotností lana  $\lambda$ , jeho délkou  $l$ , momentem setrvačnosti kladky  $J$  a jejím poloměrem  $r$ . Předpokládejte, že lano na kladce neprokluzuje.

*Mirek přepsal úlohu od Lewise Carolla do FYKOSího tvaru.*

Úlohu budeme řešit pomocí rozboru sil. Pták Fykosák stahuje lano dolů silou  $F$ . Tato síla musí být zřejmě větší než jeho tíha, jinak by se na laně neudržel. Síla se pomocí lana přenesla na druhé těleso, na které tak budou působit dvě síly – tíhová síla  $F_g$  směrem dolů (která je podle zadání stejná jako Fykosákova) a síla  $F$  směrem nahoru. Označme nyní hmotnost Fykosáka a závaží  $m$ , potom můžeme určit velikost zrychlení, s jakým se závaží začne pohybovat směrem nahoru

$$a = \frac{F - F_g}{m} = \frac{F}{m} - g.$$

Na ptáka Fykosáka působí také síla  $F$  směrem nahoru a tíhová síla  $F_g$  směrem dolů, takže i on se bude pohybovat se zrychlením  $a$  směrem nahoru.

Není to ale v rozporu se zákonem zachování energie? Pokud by pták Fykosák šplhal například po žebříku, při působení stejné síly  $F$  by se zřejmě pohyboval se stejným zrychlením  $a$ . V tomto případě se tak závaží zvedá „zdarma“. Nebo snad ne?

Rozpor je samozřejmě pouze zdánlivý. Fykosák působí silou na lano, tedy při výpočtu práce musíme sílu integrovat podle délky lana. To se pohybuje dolů stejnou rychlostí, jakou se Fykosák pohybuje nahoru. Síla tedy působí na dvakrát delší dráze než v případě, že by Fykosák lezl po žebříku.

Ve druhé části úlohy uvažujeme hmotné lano a kladku s nenulovým momentem setrvačnosti. Kladka dělí lano na dvě části. Označme délku té s ptákem Fykosákem jako  $x$ . Na tuto část lana působí směrem dolů síla  $F + \lambda xg$ , zatímco na druhou část lana působí směrem dolů síla  $(m + (l - x))g$ . V tomto případě jsme zanedbali rozměry kladky vůči délce lana. Dále necht' je zrychlení závaží  $a'$ . Potom výslednicí těchto sil je výraz

$$\left(m + \lambda l + \frac{J}{r^2}\right) a',$$

kde první člen představuje zrychlení závaží, druhý zrychlení lana a třetí zrychlení kladky. Máme tak rovnici

$$\left(m + \lambda l + \frac{J}{r^2}\right) a' = F + \lambda xg - (m + \lambda(l - x))g,$$

odkud si můžeme vyjádřit

$$a' = \frac{F + 2\lambda xg - \lambda lg - mg}{m + \lambda l + Jr^{-2}}.$$

Dostali jsme diferenciální rovnici typu  $\ddot{x} = b + cx$ . Řešením homogenní rovnice je

$$x_H = C_1 e^{\sqrt{c}t} + C_2 e^{-\sqrt{c}t}.$$

Partikulárním řešením je zřejmě

$$x_P = -\frac{b}{c},$$

tedy pro celkové řešení platí

$$x = x_H + x_P = C_1 e^{\sqrt{c}t} + C_2 e^{-\sqrt{c}t} - \frac{b}{c}.$$

Z počátečních podmínek  $x(0) = l/2$  a  $\dot{x}(0) = 0$  dostáváme dosazením do této rovnice soustavu

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 - \frac{b}{c} &= \frac{l}{2}, \\ C_1 \sqrt{c} - C_2 \sqrt{c} &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$C_1 = C_2 = \frac{l}{4} + \frac{b}{2c} = \frac{l}{4} + \frac{F - \lambda l g - mg}{4\lambda g} = \frac{F - mg}{4\lambda g}.$$

Tím jsme našli funkci  $x(t)$ . Jejím dosazením do rovnic výše snadno spočítáme například zrychlení závaží  $a'$ . Jak již určitě tušíte, pohyb ptáka Fykosáka nebude zdaleka tak složitý. Ve skutečnosti bude zcela stejný jako v první části úlohy – síly, co na něj působí, se nezměnily, takže i jeho pohyb se nezmění. Pro jeho zrychlení tak platí

$$a = \frac{F}{m} - g.$$

### Poznámky k došlým řešením

Pro řešení této úlohy je zcela zásadní správně provést rozbor sil. Jestliže Fykosák leze nahoru s použitím konstantní síly, znamená to, že na lano působí nějakou silou  $F$ . Někteří z vás uvažovali, že na lano působí silou  $F' + mg$ , tedy že síla  $F'$  je jakési navýšení základní  $mg$ , díky které se pták drží na laně. To je ale jen otázkou značení, proto jsme za to nestrhávali body.

Pokud Fykosák působí silou  $F$  (resp.  $F' + mg$ ) na lano, ze zákona akce a reakce vyplývá, že lano musí působit stejně velkou silou opačného směru na něj. Celkem na ptáka působí právě dvě síly – síla od lana  $F$  a jeho vlastní tíhová síla  $mg$ . Tyto síly mají rozdílný směr, tedy výslednice ve směru nahoru má velikost  $F - mg$  (resp.  $F'$ ). Zrychlení je pak už jen podíl síly a hmotnosti.

Dále není vůbec nutné počítat s něčím jako je napěťová síla lana – stačí si uvědomit, že lano „přenáší“ sílu z jednoho konce na druhý. Kladka v tomto případě pouze obrací směr přenášené síly. Tedy pták Fykosák působí silou  $F$  na lano směrem dolů a tato síla se přenese na závaží, na které lano působí silou  $F$  směrem nahoru. Na závaží tak působí stejné síly, jako na ptáka, a sice  $F$  a  $mg$ .

Důležité je, že tento přístup je obecně platný. Ve druhé části se změnila vlastnost lana a kladky, ale stále zůstalo v platnosti, že pták Fykosák leze nahoru s využitím konstantní síly. Potom i síly působící na něj budou stejné jak v první části a tedy bude stejné i jeho zrychlení.

**Jáchym Bártík**

tuaki@fykos.cz@fykos.cz

### Úloha II.E ... listopad

12 bodů; průměr 9,85; řešilo 40 studentů

Změřte průměrnou vertikální rychlost padajícího listí. Použijte listy z několika různých stromů a diskutujte, jaký vliv má tvar listu na rychlost pádu. Jak by měl vypadat ideální list, pokud bychom chtěli, aby padal co nejpomaleji?

*Napadla Jáchyma, když se ptal kamaráda, jestli nezná nějaký zajímavý experiment.*

### Teória

Ak padá teleso v homogénnom gravitačnom poli, ktoré sa nachádza pri povrchu Zeme, zvyčajne uvažujeme voľný pád. Aby boli splnené predpoklady voľného pádu, musí byť odporová sila vzduchu, ktorá pôsobí na padajúce teleso, zanedbateľne malá oproti tiažovej sile. V prípade padajúceho listu však toto neplatí.

List má príliš veľkú plochu v pomere k svojej hmotnosti. Pri analýze pádu listu teda nemôžeme zanedbať odporovú silu. Pre turbulentné prúdenie vzduchu okolo listu platí vzorec pre odporovú silu

$$F_o = \frac{1}{2} C \rho S v^2,$$

kde  $C$  je činiteľ odporu, ktorý zohľadňuje tvar a kvalitu povrchu telesa,  $\rho$  je hustota vzduchu,  $S$  je plocha priečneho prierezu telesa kolmá na smer pohybu a  $v$  je rýchlosť pohybu telesa.

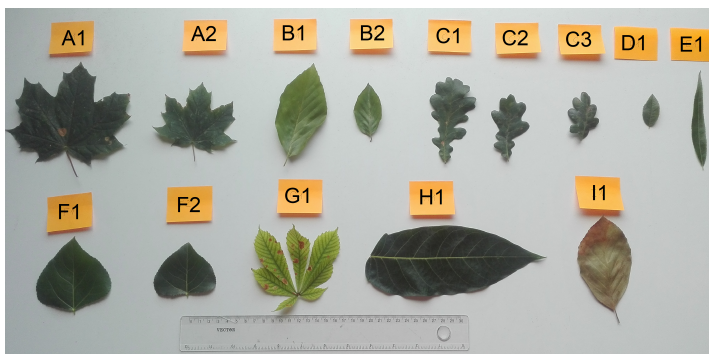
Ak by mal list vhodný tvar, aby sa netočil počas pádu, v istom okamihu by sa ťažová sila vyrovnala odporovej a list by padal rovnomerne priamočiara. Avšak keďže listy majú rôzne zvláštne tvary, ktoré nie sú ani zďaleka ideálne na nastolenie dynamickej rovnováhy síl, list sa počas pádu otáča, mení svoju rýchlosť a pohybuje sa po veľmi zložitej trajektórii.

Rýchlosť pádu tiež závisí od toho, ako veľmi je list suchý, či je skrútený a či môže bez poškodenia meniť svoj tvar pri páde. Trajektória pádu, otáčanie listu a teda aj priemerná rýchlosť bude pre konkrétny list závisieť na jeho počiatočnom natočení, spôsobe vypustenia, prípadných záchvevoch vzduchu a ďalších faktoroch, ktoré nemôžeme spoľahlivo ovplyvniť. Budeme sa teda spoliehať na to, že meranie pre každý list bude dostatočne početné, aby sme získali rozumnú štatistiku, z ktorej dostaneme priemernú rýchlosť s primeranou odchýlkou.

### Postup pri experimente

Natrhali sme si listy zo stromov, prípadne nazbierali už opadané, ale zachované. Vyberali sme listy z 8 stromov a kríkov, pričom sme sa snažili o diverzitu veľkostí.

Potom sme listy odvážili na laboratórnych váhach, výsledky sú v tabuľke 2. Zdokumentovali sme ich rozmery pomocou obrázku 2.



Obr. 2: Listy aj s meradlom dĺžky.

Jednotlivé listy sú označené písmenami, pričom písmenom im priradzujeme druh podľa legendy v tabuľke 1.

Následne sme si pripravili bod na stene vo výške  $h = 1,95$  m nad podložkou a nahrávaciu aparatúru s kamerou. Z výšky určenej značkou na stene sme voľne púšťali list (snažili sme sa neudelíť listu žiadnu počiatočnú rýchlosť) a celý pád nahrávali. Potom sme postup opakovali, približne desať krát pre každý list.

Tab. 1: Legenda označenia stromov.

označení	strom
A	javor
B	buk
C	dub
D	šípka
E	vřba
F	topol
G	pagaštan
H	pajaseň
I	buk (suchý)

Tab. 2: Hmotnosti použitých listov.

list	$\frac{m}{g}$
A1	0,89
A2	0,31
B1	0,29
C1	0,31
D1	0,07
E1	0,18
F1	0,79
G1	0,53
H1	2,00
I1	0,28

Nahrávky pádov listov sme spracovali pomocou programu Tracker. Jeho použitím sme zistili počet snímkov  $n$ , na ktorých bol list v stave pádu. Zo znalosti snímkovacej frekvencie kamery  $f^3$  sme vypočítali dobu trvania jedného snímku  $T$  podľa vzťahu  $T = f^{-1}$ . Pomocou nej sme dopočítali celkový čas pádu ako  $t = nT$ . Zo znalosti výšky  $h$ , z ktorej list padal, sme podľa vzťahu

$$v = \frac{h}{t} = \frac{h}{nT} = \frac{hf}{n}$$

vypočítali rýchlosť pádu.

Priemernú rýchlosť pádu každého listu sme vypočítali rovnakým spôsobom, akurát sme namiesto  $n$  dosadzovali priemerný počet snímkov  $\bar{n}$ . Zkúste si rozmyslieť, prečo sme dostali mierne odlišné (ale presnejšie) výsledky, ako kebyže vypočítame aritmetický priemer rýchlostí.

### Výsledky merania

V tabuľke 4 sú uvedené namerané počty snímkov, cez ktoré padali jednotlivé listy. Rovno sme z nich vypočítali aritmetický priemer a štandardnú odchýlku podľa vzťahu

$$u_{n_A} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2},$$

kde  $N$  označuje počet meraných pádov daného listu. Celková neistota merania sa vypočíta zo štatistickej odchýlky  $u_{n_A}$  a systematickej odchýlky  $u_{n_B}$  spôsobenej nepresnosťou meracích prístrojov, prípadne ľudským faktorom ako

$$u_n = \sqrt{u_{n_A}^2 + u_{n_B}^2}.$$

Neistota určenia presnej snímky, na ktorej bol list vypustený a na ktorej dopadol na podložku, vyústila v nepresnosť určenia počtu snímkov zachytávajúcich pád na  $u_{n_B} = 3$ .

<sup>3</sup>Počet snímok za sekundu. Hodnoty použité pre každé meranie sú uvedené v tabuľke 3.

Tab. 3: Použité frekvencie merania.

list	$\bar{f}$ Hz
A1	29,7
A2	29,7
B1	29,8
C1	29,7
D1	29,6
E1	29,7
F1	29,8
G1	29,7
H1	29,8
I1	29,7

Tab. 4: Namerané počty snímkov pre pády jednotlivých listov a ich priemery a smerodajné odchýlky priemerov.

list	$n$										$\bar{n}$	$u_{n \Delta}$
A1	61	74	63	57	55	56	69	63	51	66	61,5	2,2
A2	74	71	62	59	70	59	47	55	54	65	61,6	2,7
B1	62	65	58	66	60	60	61	62	59		61,4	0,9
C1	50	43	48	51	53	48	43	46			47,8	1,3
D1	32	36	41	33	36	41	32	33	38	38	36,0	1,1
E1	47	44	40	34	40	33	38	42	34	37	38,9	1,5
F1	41	43	46	46	37	41	37	45	45	45	42,6	1,1
G1	58	51	54	57	59	54	58	51	41	48	53,1	1,8
H1	38	42	50	46	40	41	42	40	36	37	41,2	1,3
I1	71	61	63	61	67	61	65	67	58	61	63,5	1,2

Nás však zaujíma, ako sa táto chyba prejavila v chybe merania rýchlosti. Podľa zákona šírenia neistôt máme

$$u_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial n} u_n\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial n} u_h\right)^2} = v \sqrt{\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{u_h}{h}\right)^2},$$

kde neistota merania výšky vypustenia nad podložkou bola  $u_h = 2$  cm.

Vypočítané priemerné hodnoty rýchlosti pádu jednotlivých listov a celkové neistoty merania rýchlostí sú uvedené v tabuľke 5.

### Diskusia

Relatívna odchýlka merania rýchlosti sa pohybuje v rozmedzí od 5 do 11 %, čo považujeme za rozumne presné. Väčší podiel na celkovej odchýlke mala systematická chyba merania. Aby bola menšia, museli by sme napríklad zabezpečiť vypúšťanie listu zo stále rovnej výšky. Najväčší

Tab. 5: Priemerné rýchlosti pádu a ich neistoty.

list	$\bar{v}$ m·s <sup>-1</sup>	$u_v$ m·s <sup>-1</sup>
A1	0,94	0,06
A2	0,94	0,06
B1	0,95	0,05
C1	1,21	0,08
D1	1,60	0,14
E1	1,49	0,13
F1	1,36	0,10
G1	1,09	0,07
H1	1,41	0,11
I1	0,91	0,05

problém bolo však určenie presnej snímky, na ktorej bol list vypustený, resp. na ktorej už dopadol. V počiatočných fázach pádu sa totiž list hýbe veľmi pomaly a je ťažké rozoznať zmenu jeho polohy na jednotlivých snímkach. Taktiež na konci pohybu je náročné presne určiť, kedy sa už list nehýbe. Ako riešenie tohto problému vidíme sledovať len fázu pádu mimo jeho začiatok a koniec. V praxi to znamená vyznačiť si polohu pár centimetrov pod výškou vypustenia a pár nad podložkou a do úvahy brať len pád medzi nimi. V tomto prípade môžeme naraziť na problém, že list sa bude hýbať príliš rýchlo, aby sme zachytili presne jeho prechod vyznačenou polohou. Vtedy by pomohla len vysokorýchlostná kamera. Otázkou by ale ostalo rozhodnúť, ktorú časť listu vlastne chceme merať.

Ak sa pozrieme na veľkosť relatívnej odchýlky rýchlosti v závislosti na samotnej rýchlosti, vidíme, že vo väčšine prípadov s rastúcou rýchlosťou rastie aj jej relatívna odchýlka. Príčinou je menší počet snímkov zachycujúcich pohyb, čo zvyšuje relatívnu odchýlku  $n$ .

Keď porovnáme priemerné rýchlosti pádu jednotlivých listov, dospejeme k záveru, že najmenšiu rýchlosť má list I1. Tento list je ako jediný z použitých listov už vysušený. Zaujímavé je porovnanie s listom B1, ktorý je toho istého druhu, veľmi podobnej veľkosti a má zhruba rovnakú hmotnosť. Pravdepodobne sa však počas pádu ohýbal menej, čo mohlo spôsobiť väčší odpor vzduchu.

Najväčšiu rýchlosť má list H1, ktorý mal tiež najväčšiu hmotnosť, no zároveň aj plochu. Pravdepodobne jeho hmotnosť a tiež poddajnosť tvaru pri páde spôsobili, že padal najrýchlejšie. Len o niečo pomalšie padal list F1, ktorý je ale podstatne menší a ľahší. S listom H1 má spoločnú veľkú ohotu sa ohýbať. Budí to v nás dojem, že tento faktor do značnej miery ovplyvňuje rýchlosť pádu. Je ale pravda, že listie padajúce zo stromov samovolne je zväčša už vyschnuté, a teda tvar počas pádu mení len minimálne.

Keď porovnáme rýchlosti pádu listov A1 a A2, ktoré sa líšia vo veľkosti a hmotnosti, môžeme vidieť, že rozdiel rýchlostí je vrámci odchýlky naozaj takmer zanedbateľný. Je logické uvažovať, že ich hustota bude zrejme podobná. Vedie nás to k záveru, že veľkosť listu vrámci toho istého druhu zásadne neovplyvňuje priemernú rýchlosť pádu.

Z pozorovania pádu jednotlivých listov by bolo vhodné ešte poznamenať, že najmenej sa počas pádu točil list G1. To je spôsobené pravdepodobne jeho špecifickým tvarom, ktorý umožňuje obtekanie vzduchu aj pomedzi jeho články, čo zrejme stabilizuje jeho pád.

Vo výsledku z hľadiska najpomalšieho pádu vyhrávajú listy A a B z javora a buku. Vzhľadom na to, že tvar týchto listov sa výrazne líši, zrejme neexistuje niečo ako ideálny tvar listu pre najpomalší pád. Avšak asi je možné optimalizovať parametre listu - zmenšiť jeho hmotnosť, zväčšiť plochu, zabezpečiť vnútorné obtekanie ako stabilizáciu pri páde. A hlavne nechať list prirodzene vyschnúť na znemožnenie zmeny tvaru počas pádu.

### Záver

Namerané rýchlosti pádu jednotlivých listov sú v tabuľke 5.

Rýchlosť pádu zrejme ovplyvňuje viacero faktorov než len samotný tvar listu. Najmenšiu rýchlosť pádu mal vysušený bukový list, teda rýchlosť je závislá na možnosti listu meniť tvar počas pádu. Z hľadiska druhu stromu mali najmešiu rýchlosť javor a buk, teda ich parametre sú najideálnejšie pre náš účel, nájsť čo najpomalšie padajúci list.

Ideálny list by mal podľa nášho merania mať čo najmenšiu hmotnosť, najväčšiu plochu, tvarom zabezpečenú stabilizáciu počas pádu a hlavne by mal byť suchý.

*Daniela Pittnerová*  
daniela@fykos.cz@fykos.cz

## Úloha II.S ... zväzujúca

10 bodů; průměr 5,26; řešilo 23 studentů

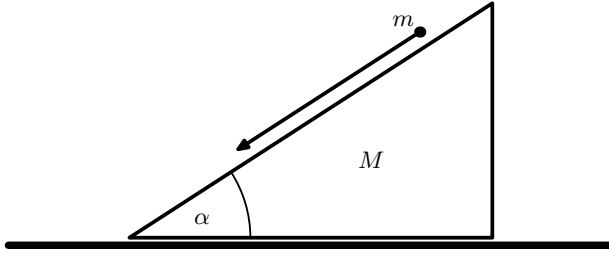
1. Majme činku tvorenú dvoma hmotnými bodmi s hmotnosťami  $m$  a  $M$ , ktoré sú spojené nehmotnou, ale veľmi pevnou tyčou. Táto činka padá voľným pádom. Napíšte väzbovú podmienku a zároveň aj Lagrangeove rovnice prvého druhu pre tento objekt.
2. Majme vodorovnú položku, na ktorej je umiestnený pravouhlý trojboký hranol s hmotnosťou  $M$  ako na obrázku 3. Po strane tohto hranolu, ktorá s podložkou zvierá uhol  $\alpha$ , sa sklzáva hmotný bod s hmotnosťou  $m$ . V celom príklade neuvažujte trenie.
  - Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre túto situáciu.
  - Ukážte, že celková hybnosť sústavy v smere osi  $x$  je pri nulovej počiatocnej rýchlosti hmotného bodu nulová.
  - Postupným riešením sústavy rovníc určte veľkosti rýchlostí hmotného bodu a hranolu v závislosti od času.
  - Určte pomer veľkostí týchto rýchlostí.
3. Majme kyvadlo zavesené na závесе. Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre túto situáciu a ukážte, že pre ňu platí zákon zachovania energie.
1. Činka pozostáva z dvoch hmotných bodov. Ak uvažujeme, že sa pohybuje v trojrozmernom priestore, bude sada Lagrangeovych rovníc obsahovať dohromady 6 rovníc – tri rovnice pre oba konce činky. Nech súradnice hmotného bodu s hmotnosťou  $M$  sú  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  a súradnice hmotného bodu s hmotnosťou  $m$  sú  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Ďalej máme jednu väzbovú podmienku, ktorá vraví o tom, že vzdialenosť koncov činky je vždy rovnaká. Vzdialenosť  $l$  bodov  $m$  a  $M$  spočítame ako

$$l = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}.$$

Keďže ale vieme, že väzbovú podmienku budeme derivovať, zapíšeme si ju jednoduchšie

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 - l^2 = 0.$$





Obr. 3: Naklonená rovina

Bez ujmy na všeobecnosti můžeme zvolit směr gravitační síly v směru osy  $z$ . Potom budú Lagrangeove rovnice pre túto sústavu vyzerat

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda(x - X), \\ m\ddot{y} &= 2\lambda(y - Y), \\ m\ddot{z} &= 2\lambda(z - Z) + mg, \\ M\ddot{X} &= -2\lambda(x - X), \\ M\ddot{Y} &= -2\lambda(y - Y), \\ M\ddot{Z} &= -2\lambda(z - Z) + Mg. \end{aligned}$$

2. V tomto príklade je najdôležitejšie si správne predstaviť celú situáciu, potom už za nás všetku ťažkú prácu spravia pravidlá zavedené v tomto formalizme.

- Prezačiatok chceme zostaviť Lagrangeove rovnice prvého druhu. Keďže úlohu budeme riešiť dvojrozmerné, budeme mať 4 rovnice. Už na prvý pohľad ale vidíme, že kváder sa nebude pohybovať v smere osy  $y$ , takže sústava pohybových rovníc sa nám zredukuje na 3 rovnice. Ako prvé musíme nájsť správnu väzbu. Hmotný bod sa vzhľadom ku kváдру bude pohybovať po priamke so sklonom  $\alpha$ . Bude sa teda jednať o lineárnu funkciu so smernicou  $\operatorname{tg} \alpha$ . Za premennú tejto funkcie musíme ale položiť nie  $x$ -ovú súradnicu hmotného bodu, ale túto súradnicu musíme posunúť ešte o súradnicu bodu, kde sa hrana kvádra dotýka podložky. Keďže kváder bude vykonávať len posuvný pohyb, môžeme bez ujmy na všeobecnosti umiestniť všetku jeho hmotnosť práve do tohto bodu, čo bude mať pre nás veľkú výhodu. Potom budem môcť túto súradnicu stotožniť s  $x$ -ovou súradnicou kvádra ako celku. Väzbová podmienka bude teda vyzerat

$$y_1 - (x_1 - x_2) \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

kde súradnice s indexom 1 sú súradnice hmotného bodu a súradnice s indexom 2 sú súradnice kvádra. Ďalej predpokladajme, že smer gravitačnej síly je totožný so smerom osy  $-y$ . Potom dostaneme Lagrangeove rovnice v tvare

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\lambda \operatorname{tg} \alpha, \\ m\ddot{y}_1 &= \lambda - mg, \\ M\ddot{x}_1 &= \lambda \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

- Toto je úloha, ktorá vyžaduje trochu zamyslenia. Dôležité je uvedomiť si, že sila je časová zmena hybnosti. Z Lagrangeových rovníc je rýchlo vidieť, aká je výsledná sila pôsobiaca v smere osi  $x$ . Sčítaním prvej a tretej rovnice dostaneme

$$m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 = 0.$$

Ak je sila pôsobiaca v smere osi  $x$  nulová, znamená to, že časová zmena hybnosti v tomto smere je nulová, teda že hybnosť v smere  $x$  je konštantná. Ak je konštantná, je teda rovnaká ako na začiatku. Na začiatku bola ale celá sústava v pokoji, keďže zo zadania vieme, že počiatočná rýchlosť je nulová. A teda aj celková hybnosť v smere  $x$  je po celý čas nulová.

- Pri riešení Lagrangeových rovníc použijeme prvý trik so seriálu, a dvakrát zderivujeme väzbu

$$\ddot{y}_1 - \ddot{x}_1 \operatorname{tg} \alpha + \ddot{x}_2 \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Ďalej vyjadríme postupne všetky druhé derivácie z Lagrangeových rovníc a dosadíme ich do dvakrát zderivovanej väzbovej podmienky. Z tejto rovnice vyjadríme

$$\lambda = \frac{mMg}{M + M \operatorname{tg}^2 \alpha + m \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Nás až tak nezaujímá tvar  $\lambda$ , podstatné je skôr to, že je to konštanta. Lagrangeove pohybové rovnice teda nadobúdajú jednoduchý tvar typu hmotnosť krát zrýchlenie je nejaká konštanta. Preintegrovať takéto rovnice nebude preto vôbec problém. Dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{\lambda \operatorname{tg} \alpha}{m} t, \\ \dot{y}_1 &= \left(\frac{\lambda}{m} - g\right) t, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\lambda \operatorname{tg} \alpha}{M} t. \end{aligned}$$

Integračné konštanty nie sú uvedené, nakoľko majú význam počiatočných rýchlostí a my vieme, že tie boli pre oba predmety nulové. Rýchlosť hmotného bodu bude preto odmocnina zo súčtu kvadrátov zložiek jeho rýchlosti, čo je po dosadení

$$|\mathbf{v}_1| = t \sqrt{\frac{\lambda^2}{m^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - g \left(\frac{2\lambda}{m} - g\right)}.$$

Rýchlosť hranola má len jednu zložku, teda jej veľkosť sa rovná tejto zložke.

- Pomer veľkostí rýchlostí (napríklad rýchlosť hmotného bodu ku rýchlosti hranola) je potom

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{M}{\lambda \operatorname{tg} \alpha} \sqrt{\frac{\lambda^2}{m^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - g \left(\frac{2\lambda}{m} - g\right)},$$

čo po dosadení za  $\lambda$  a úpravách dáva

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{M}{m} \sqrt{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

3. Úlohu budeme riešiť v dvoch rozmeroch. Pre kyvadlo platí väzbová rovnica

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0,$$

kde  $x, y$  sú súradnice závažia kyvadla s hmotnosťou  $m$  a  $l$  je dĺžka závesu kyvadla. Gravitačná sila nech má opäť smer  $-y$ . Potom budú Lagrangeove rovnice

$$m\ddot{x} = 2\lambda x,$$

$$m\ddot{y} = 2\lambda y - mg.$$

Najjednoduchšie ako ukázať, že kyvadlo spĺňa zákon zachovania energie, je použiť rovnaký trik ako v seriáli. Prenásobíme teda prvú rovnicu  $\dot{x}$  a druhú  $\dot{y}$ . Následne rovnice sčítame

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = -mg\dot{y} + 2\lambda(x\dot{x} + y\dot{y}).$$

Toto si môžeme upraviť ako

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) + mg\frac{dy}{dt} = \lambda\frac{d}{dt}(x^2 + y^2).$$

Z väzbovej podmienky vieme, že  $x^2 + y^2 = l^2$ , čo je vždy konštanta. Časová derivácia konštanty je nula. Rovnica potom vyzerá

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg\frac{dy}{dt} = 0.$$

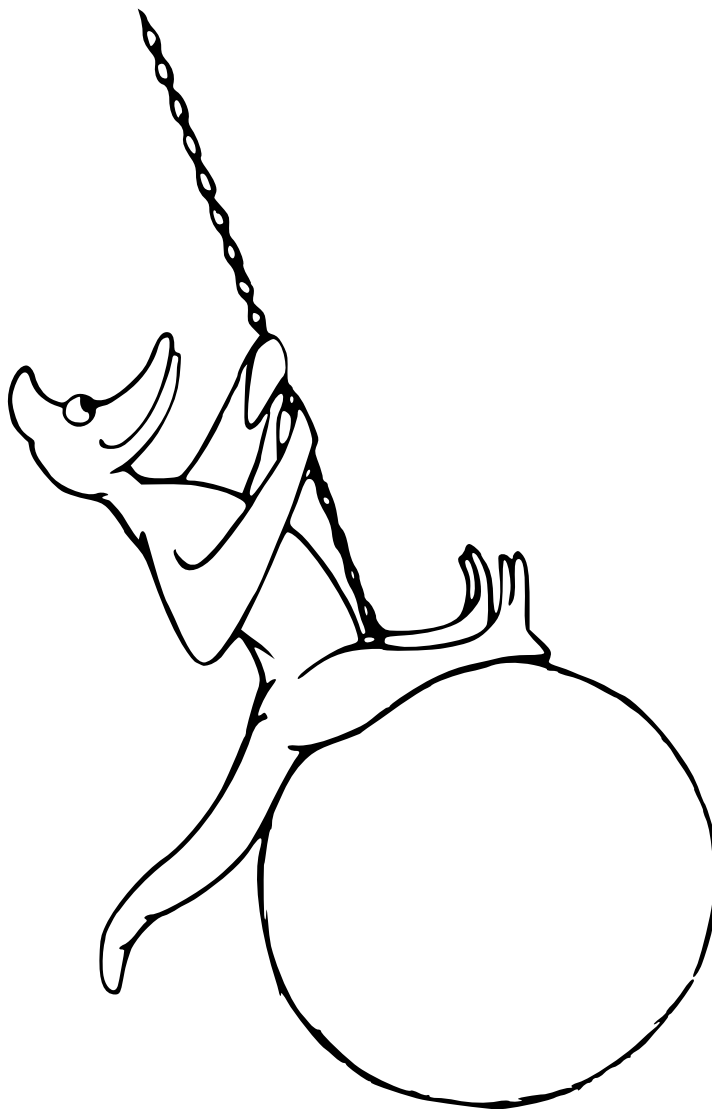
Po preintegrovaní dostaneme

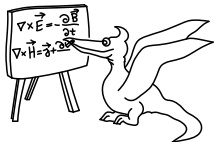
$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \text{konst},$$

čo je presne formulácia zákona zachovania energie.

*Jakub Jambrich*

`jakubj@fykos.cz@fykos.cz`





## Seriál: Lagrangeovy rovnice II. druhu

### Úvod

V tejto časti začneme s novou témou, ktorá nás bude sprevádzať až do konca seriálu. Po troch dieloch seriálu sa na konci tohto dostaneme k Lagrangeovým rovniciam 2. druhu. Tieto rovnice predstavujú novú, pokročilejšiu formuláciu mechaniky, kde na popis fyzikálneho problému budeme potrebovať iba jednu jedinú skalárnu funkciu, z ktorej sa následne naučíme jednoducho určiť pohybové rovnice.

### Zovšeobecnené súradnice

Pri riešení nejakého fyzikálneho problému musíme na úvod vždy, aj ke spravidla to robíme mimovoľne, urobiť rozhodnutie, v akých súradniciach budeme danú úlohu riešiť. V prípade pokročilejšej stredoškolskej úrovne fyziky je to obvykle tak, že volíme za tieto súradnice súradnice kartézske. Dokonca častokrát prirodzenú trojrozmernú trojicu súradníc  $x, y, z$  zredukujeme len na dvojicu  $x, y$  a problém riešime v jednej rovine. Mnohokrát je ale aj v tomto prípade úloha riešiteľná veľmi obtiažne.

Pri konštrukcii Lagrangeových rovníc je problém obtiažnosti systému eliminovaný do maximálnej možnej podoby hneď od začiatku, a to použitím zovšeobecnených súradníc. Jedná sa o sústavu súradníc, ktoré vystihujú symetriu daného problému tak, že berú ohľad na väzby, ktorým sú objekty podrobené.

Toto sa potom odráža na počte zovšeobecnených súradníc. Napríklad poloha planéty pohybujúcej sa okolo Slnka môže byť popísaná tromi kartézskymi súradnicami. Alebo, nakoľko na planétu pôsobia 2 väzby<sup>4</sup> môže byť jej poloha popísaná jedinou súradnicou, a to napríklad uhlom (od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ ), ktorý zvierá spojnicu Slnka a planéty s hlavnou poloosou jej dráhy.

Podobne napríklad činku z úlohy k predchádzajúcemu dielu seriálu, ktorá sa pohybuje v 2D priestore, môžeme namiesto dvoch kartézskych súradníc pre každý bod popísať dvoma kartézskymi súradnicami ťažiska činky a súradnicou, ktorá zodpovedá uhlu natočenia činky voči osi  $x$ .

Nie je tak ťažké z týchto dvoch príkladov odpozorovať, koľko zovšeobecnených súradníc potrebujeme na popis systému. Ak  $N$  je počet kartézskych súradníc potrebných na popis všetkých hmotných bodov (obvykle troj- alebo dvojnásobok počtu hmotných bodov, podľa toho či riešime troj- alebo dvojrozmernú úlohu) a  $v$  je počet väzieb, tak potom

$$n = N - v$$

je počet zovšeobecnených súradníc potrebných pre popis systému. Tento počet je zároveň aj počet *stupňov voľnosti* telesa, čo je vlastne neprekvapujúce, nakoľko každej možnosti pohybu telesa vieme prisúdiť jednu súradnicu, v ktorej miere tohto pohybu, ako aj polohu, vieme odmerať.

Pre nás bude ďalej dôležité, že vždy vieme nájsť transformačný vzťah medzi kartézskymi a zovšeobecnými súradnicami. Pre naše potreby bude dôležité vedieť najmä vyjadriť kartézske

<sup>4</sup>Planéta sa pohybuje v rovine, a zároveň po elipse. Obe tieto tvrdenia si v rámci seriálu dokážeme.

súradnice pomocou zovšeobecnených. Ako a aj prečo je to dôležité si ukážeme na nasledujúcom príklade.

*Príklad: Aká je kinetická energia kyvadla?*

Pokúsme sa nájsť vzťah pre kinetickú energiu matematického kyvadla s hmotnosťou  $m$  a dĺžkou závesu  $l$ . Vieme, že kinetická energia je definovaná ako

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Čo po rozdelení rýchlosti do dvoch kartézskych zložiek a s vedomosťou, že zložka rýchlosti v nejakom smere je (v kartézskych súradniciach) časová derivácia danej súradnice vieme napísať ako

$$E_k = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Dalo by sa argumentovať, že úloha je splnená, čo je samozrejme čiastočne pravda, avšak z nášho vzťahu nie je vidieť, že sa jedná o kyvadlo, nakoľko tento vzťah platí pre každý hmotný bod v 2D priestore. Na to, aby šlo o kinetickú energiu kyvadla, by sme museli ešte pridať väzbu v tvare  $x^2 + y^2 = l^2$  a nejako ju do vzťahu pre  $E_k$  zakomponovať. Preto zavedieme zovšeobecnenú súradnicu  $\varphi$ , ktorá bude vyjadrovať uhol náklonu kyvadla od osi  $y$  meraný proti smeru hodinových ručičiek. Považujme bod závesu kyvadla za počiatok kartézskej sústavy súradníc. Ak je dĺžka závesu  $l$ , potom je prevod medzi kartézskymi súradnicami závažia na kyvadle  $x$ ,  $y$  a našou zovšeobecnenou súradnicou  $\varphi$

$$\begin{aligned}y &= l \cos \varphi, \\x &= l \sin \varphi.\end{aligned}$$

Z týchto vzťahov vieme derivovaním podľa času získať vzťahy pre jednotlivé kartézske zložky rýchlosti hmotného bodu vyjadrené pomocou zovšeobecnenej súradnice.

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -l \sin(\varphi)\dot{\varphi}, \\ \dot{x} &= l \cos(\varphi)\dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Po dosadení do rovnice pre kinetickú energiu dostávame

$$E_k = \frac{1}{2}m \left( (l \sin(\varphi)\dot{\varphi})^2 + (l \cos(\varphi)\dot{\varphi})^2 \right).$$

Keďže vieme, že súčet kvadrátu sínusu a kosínusu rovnakého argumentu je rovný jednej, dostávame

$$E_k = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Keďže  $\dot{\varphi}$  je vlastne uhlová rýchlosť, vidíme, že to čo sme dostali, je vlastne úplne očakávateľné, nakoľko ak do tohto vzťahu dosadíme

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{l},$$

dostaneme pôvodný vzťah.

Vidíme teda, že zavedenie zovšeobecnených súradníc má svoju výhodu už aj na prvý pohľad, a to v tom, že dôležité fyzikálne vzťahy vyzerajú jednoduchšie a prirodzenejšie. Poďme si teraz pomocou nich ukázať, ako sa dajú zaviesť Lagrangeove pohybové rovnice.

## Lagrangeove rovnice II. druhu

Lagrangeove rovnice si odvodíme v jednorozmernom priestore a pre jeden hmotný bod. Tento postup sme zvolili, aj keď je možno mierne neštandardný, preto, že je jednoduchší na uchopenie, a pritom je úplne rovnaký, ako kedy sme to robili pre  $n$  hmotných bodov a v 3D priestore. Celý postup postupne rozložíme do niekoľkých krokov a posnažíme sa ich popísať čo najviac zrozumiteľne. Tak si držíme palce.

### Diferenciál polohy a kinetická energia

Majme v 1D priestore popisovanom súradnicou  $x$  zvošeobecnenú súradnicu  $q$ . Vo všeobecnosti je potom  $x$  nejakou funkciou našej súradnice  $q$  a času  $t$ , píšeme  $x(q, t)$ . Ak predpokladáme, že  $x(q, t)$  je funkciou udávajúcou polohu nejakej konkrétnej častice, je pre nás veľmi cenná informácia vedieť určiť kinetickú energiu tejto častice, ktorej hmotnosť si môžeme pre naše potreby označiť  $m$ . Nato potrebujeme určiť rýchlosť danej častice, teda úplnú časovú deriváciu funkcie  $x(q(t), t)$ . To znamená derivovať najprv podľa jednej a potom podľa druhej premennej, pričom ak je jedna z premenných funkciou času, samozrejme musíme derivovať aj tú ako zloženú funkciu. V našom prípade to vyzerá nasledovne

$$\frac{dx(q, t)}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Prečo je pri derivácii  $q$  znak obyčajnej, a nie parciálnej derivácie? V tomto prípade sa jedná skutočne o úplnú časovú deriváciu tejto súradnice. Pravdou je ale aj to, že súradnica  $q$  nemá, tak ako sme si ju zadefinovali, žiadne iné závislosti ako časovú (čo vyplýva priamo z toho že je to súradnica pohybujúceho sa bodu), a teda pre tento konkrétny prípad platí

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} = \dot{q}.$$

Napriek tomu je ale formálne správnejšie písať to ako ozajstnú, a nie parciálnu deriváciu.

Teraz môžeme napísať vzťah pre kinetickú energiu nášho hmotného bodu. Zvolím značenie, na ktoré nie ste pravdepodobne zvyknutí, no budeme sa ho odtiaľ držať, nakoľko sa v analytickej mechanike používa vždy. Kinetickú energiu budeme značiť od tohto okamihu  $T$ . Potom platí

$$T(t) = \frac{1}{2}m \left( \frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2}m \left( \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2.$$

### Zastavenie času

Teraz náš hmotný bod v čase stojí. Inými slovami, pozeráme sa naň v jednom konkrétnom čase, v ktorom skúmame jeho vlastnosti. Jeho poloha a rýchlosť sú teda v konkrétnom časovom okamihu na sebe nezávislé. Keď budeme skúmať, ako by vyzerala energia tohto bodu v prípade, že trochu zmeníme jeho polohu alebo rýchlosť budeme predpokladať, že pri malej zmene polohy sa nezmení jeho rýchlosť a obrátene. V matematickej reči, keď budeme derivovať podľa polohy alebo rýchlosti, tak bude platiť

$$\frac{dq}{dq} = \frac{d\dot{q}}{dq} = 0.$$

čo je vlastne len matematický zápis toho čo sme povedali, teda že rýchlosť a poloha sú v konkrétnom časovom okamihu vnímané ako na sebe nezávislé.

To nám dovolí spočítať parciálne derivácie kinetickej energie podľa polohy a podľa rýchlosti. Znova vám odporúčam, aby ste si to skúsili sami a výsledok si iba skontrolovali. Pamätajte pri tom ale na to, že parciálne derivácie  $x$  podľa času aj podľa zovšeobecnenej súradnice  $q$  sú stále funkcie aj zovšeobecnenej súradnice  $q$ . Výsledok by vám mal vyjsť nasledovne:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \left( \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m \left( \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right).$$

### Rozmrazenie času

Teraz všetky rovnice, ktorými disponujeme, môžeme znova chápať ako časovo závislé. Dovolím si pre prehľadnosť ešte jednu úpravu, namiesto

$$\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}$$

budeme písať kratšiu verziu

$$\frac{dx}{dt}.$$

Aplikujme na rovnicu pre  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$  operáciu úplnej derivácie podľa času. Druhú rovnicu necháme nepozmenenú, čím dostaneme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m \frac{dx}{dt} \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial q}.$$

Teraz spravíme trik – od prvej rovnice odčítame druhú. Vo všetkých prípadoch, ktoré sú pre fyziku užitočné, môžeme ďalej predpokladať, že platí

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Táto vlastnosť sa nazýva *zámennosť derivácií*. Až na malé výnimky je operácia derivácie sama zo sebou komutatívna.

Po už spomínanom odčítaní za použitia komutativity derivácií dostaneme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} \right).$$

Táto rovnica by sa už dala považovať za formuláciu Lagrangeových rovníc, avšak najmä jej pravá strana nie je veľmi dobre zrozumiteľná. Podme sa teda pozrieť, aký význam má pravá strana tejto rovnice. Už na prvý pohľad je zrejme že časť

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, t)$$



je nejaká vonkajšia sila pôsobiaca na náš hmotný bod. K tomu, aký význam má časť  $\frac{\partial x}{\partial q}$ , si pripomenieme niečo z druhej série seriálu, a síce, aký tvar má gradient. V tomto prípade totižto, keďže sme len v jednorozmernom priestore, je gradient k danej krivke  $x(t)$  iba číslo – jedna derivácia  $\frac{\partial x}{\partial q}$ . Celá pravá strana má potom význam zovšeobecnenej sily (prenásobenej konštantou závislou len na voľbe zovšeobecnených súradníc), ktorú si môžeme označiť  $Q$ . Dostávame

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

To ale ešte nie je podoba Lagrangeových rovníc tak, ako ju poznáme. Vieme ale, že so silami sa vo všeobecnosti spája skalárna veličina nazývaná potenciál. Ak máme konzervatívne pole,<sup>5</sup> v ktorom pôsobí na teleso sila  $\mathbf{F}$ , potom je potenciál  $V$  tohto poľa implicitne definovaný ako

$$F_i = -\nabla V_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Pre náš prípad bude mať sila len jednu zložku

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

a použitím pravidla pre derivovanie zloženej funkcie máme

$$Q(q, t) = -\frac{dV}{dx} \frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial V(q, t)}{\partial q}.$$

Dosadením tejto rovnice do Lagrangeových rovníc za predpokladu, že riešime pohyb v konzervatívnom poli, a následným presunutím všetkých členov na jednu stranu dostávame

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

Keďže potenciál  $V$  nie je závislý na rýchlosti telesa,<sup>6</sup> platí

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0.$$

Teraz môžeme tento nulový výraz pripočítať k Lagrangeovej rovnici a po úprave dostaneme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q} = 0,$$

kde funkcia  $T - V$  predstavuje rozdiel kinetickej a potenciálnej energie. Nazývame ju *Lagrangian* a značíme  $L$ . Rovnicu teda môžeme zapísať aj takto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

<sup>5</sup>Pole, v ktorom objekt nestráca mechanickú energiu, teda keď sa objekt v tomto poli bude pohybovať je celková zmena jeho kinetickej energie nezávislá na trajektórii pohybu, ale len na počiatocnom a koncovom bode. Ak sa takýto objekt v konzervatívnom poli pohybuje po uzavretej krivke, nestráca ani nezískava žiadnu energiu. Príkladom takéhoto poľa je napríklad pole gravitačné.

<sup>6</sup>Ak by bol, môže existovať tzv. zovšeobecnený potenciál, pre ktorý stále platia Lagrangeove rovnice v nasledujúcom tvare. Napríklad pri elektromagnetickej sile to platí len pri istej špeciálnej voľbe potenciálu, nazvanej Lorentzova kalibračná podmienka.

Čo by sa ale stalo vo viacerých rozmeroch? Pri pohľade na rovnicu vidíme, že jediné čo nejak závisí na počte rozmerov je súradnica  $q$ . Preto rozšírenie tejto rovnice na viacrozmerný prípad je veľmi triviálne, a síce len také, že pre viacero súradníc dostaneme viacero rovníc tak, že vždy budeme týmto spôsobom derivovať Lagrangian podľa príslušnej súradnice a rýchlosti. Preto počet rovníc zodpovedá počtu zovšeobecnených súradníc.<sup>7</sup> Tím dostaneme najznámejší tvar Lagrangeových rovníc, s ktorým sa v tomto seriáli budeme stretávať ešte veľmi dlho

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Celá táto kapitola bola venovaná odvodeniu Lagrangeových rovníc. Berte ju skôr informatívne, rozhodne od vás nikto nebude vyžadovať, aby ste toto odvodenie ovládali.<sup>8</sup> Dôvod prečo som to tu ukazoval je, aby ste mali predstavu, že k veľkým fyzikálnym zákonom sa dá prísť hraním sa s deriváciami rôznych vecí a sčítaním a odčítaním zdanlivo nesúvisiacich vecí od seba, až nakoniec vznikne niečo tak zásadné ako Lagrangeove rovnice. Z vášho pohľadu sme ale ešte len na začiatku. Práve ste dočítali odvodenie niečoho, čoho využiteľnosť pravdepodobne vôbec nevidíte. Že je to na niečo vôbec dobré mi zatiaľ musíte veriť. V seriáli sa ďalej postupne prepracujeme cez zostavenie a riešenie Lagrangeových rovníc pre rôzne prípady. V dnešnej sérii si ešte ukážeme prvý krok k riešeniu fyzikálneho problému.

## Nájdenie Lagrangeovej funkcie

Priamo z definície Lagrangeovej funkcie vyplýva, ako ju treba hľadať. Musíme nájsť vzťah pre kinetickú a potenciálnu energiu systému. Keďže celý problém chceme riešiť v zovšeobecnených súradniciach, je azda najkľúčovejším krokom nájsť vhodné zovšeobecné súradnice. To znamená popísať ich a nájsť vzťah medzi nimi a kartézskymi súradnicami. Potom deriváciou tohto vzťahu určíme, ako vyzerajú jednotlivé zložky rýchlostí, teda funkcií  $\dot{q}(q, t)$ . Tieto vzťahy dosadíme do vzťahov pre potenciálnu a kinetickú energiu, aby sme dostali Lagrangian, z ktorého už nie je problém určiť pohybové rovnice. Poďme sa na toto pozrieť krok po kroku a simultánne s tým hľadať Lagrangian pre matematické kyvadlo.

### 1. Zavedenie zovšeobecných súradníc

V našom prípade, ako sme už spomínali skôr, bude zovšeobecnou súradnicou uhol vychýlenia  $\varphi$ . To, že nám stačí jedna súradnica, je vidieť z toho, že kyvadlo riešime ako dvojrozmerný problém, pričom je v ňom jedna väzba – hmotný bod musí byť vždy v rovnakej vzdialenosti  $l$  od bodu závesu.

### 2. Vyjadrenie kartézskych súradníc pomocou zovšeobecných

Ako sme uviedli skôr, vzťah medzi zovšeobecnou súradnicou a kartézskymi súradnicami  $x, y$  je

$$\begin{aligned} y &= l \cos \varphi, \\ x &= l \sin \varphi. \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Dôležitou poznámkou je, aj keď je to možno zjavné, že zovšeobecné súradnice môžu samozrejme byť súradnice viacerých hmotných bodov, ktorých pohyb vyšetrujeme.

<sup>8</sup>Samozrejme len pokiaľ nepôjdete študovať všeobecnú fyziku.

3. *Spočítanie kartézskych rýchlostí*

V našom prípade musíme len usilovne derivovať, čo dopadne presne tak ako na začiatku seriálu

$$\dot{y} = -l \sin(\varphi)\dot{\varphi},$$

$$\dot{x} = l \cos(\varphi)\dot{\varphi}.$$

4. *Dosadením do definície  $T$  a  $V$  vypočítame kinetickú energiu a potenciál v zovšeobecnených súradniciach*

$$T = \frac{1}{2}m \left( (l \sin(\varphi)\dot{\varphi})^2 + (l \cos(\varphi)\dot{\varphi})^2 \right) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2,$$

$$V = -mgy = -mgl \cos(\varphi).$$

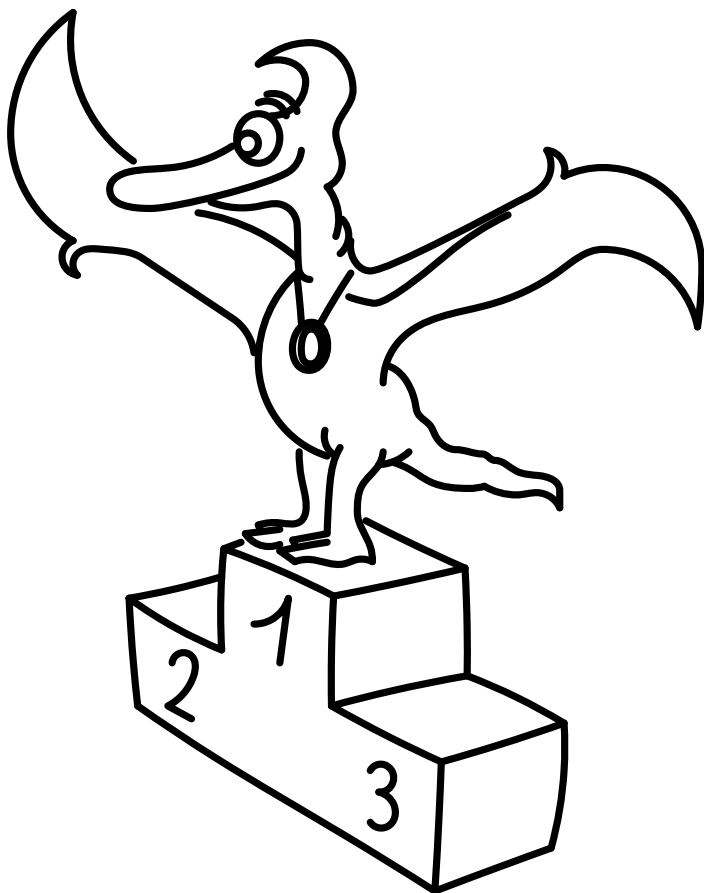
5. *Zostavíme Lagrangeovu funkciu*

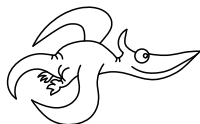
$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos(\varphi).$$

6. *Postupným usilovným derivovaním zostavíme Lagrangeove rovnice*

Toto je časť, ku ktorej sa dostaneme v ďalšom diele seriálu. Zostavenie rovníc totižto súvisí s ich riešením, preto je konzistentnejšie urobiť to spolu v jednom diele seriálu.

Dúfam, že ste si z tohto dielu odniesli niečo nové. Zároveň dúfam, že vás to more vysokoškolskej matematiky neodradilo a pri riešení úloh k seriálu použijete svoj dôvtip, a nájdete tie správne zovšeobecnené súradnice, a následne sa doderivujete úspešne až k správnej Lagrangeovej funkcii.





## Pořadí řešitelů po II. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
Student Pilný	MFF UK	6	6	6	7	9	10	12	10	66	100	132	
1. <i>Eva Feldbabelová</i>	Katolické gymnázium Třebíč	8	6	6	5	4	6	9	10	<b>54</b>	81	107	
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	2	6	6	7	4	–	12	–	<b>37</b>	79	81	
3. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	2	4	–	7	–	–	12	–	<b>25</b>	68	58	
4. <i>Benedikt Bareš</i>	G Dobruška	6	6	4	4	2	–	–	–	<b>22</b>	71	55	
5. <i>Vojtěch Votruba</i>	G Jana Keplera, Praha	6	6	–	7	–	–	–	5	<b>24</b>	58	49	
6. <i>Adam Hůstava</i>	European School Luxembourg II	6	6	5	–	–	4	9	–	<b>30</b>	77	40	
7.–8. <i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	6	–	–	–	–	–	11	–	<b>17</b>	82	37	
7.–8. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	1	4	3	6	11	–	<b>37</b>	66	37	
9.–10. <i>Sára Byšková</i>	G Jana Keplera, Praha	4	6	–	–	–	8	–	–	<b>18</b>	63	33	
9.–10. <i>Barbora Čemanová</i>	G, Park mládeže, Košice	4	6	–	–	–	–	8	–	<b>18</b>	49	33	
11. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	2	–	–	–	–	4	9	–	<b>15</b>	45	28	
12. <i>Adéla Kolembusová</i>	European School Luxembourg II	4	6	–	–	1	–	8	–	<b>19</b>	52	27	
13. <i>Filip Zikeš</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	24	
14. <i>Petr Šicho</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	32	18	
15. <i>Milan Marek</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	2	–	–	–	–	–	–	<b>2</b>	35	15	
16. <i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	6	–	–	–	–	–	–	–	<b>6</b>	100	12	
17. <i>Jan Ptáček</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	11	
18. <i>Zuzana Lisztwanová</i>	G J. Słowackiego, Český Těšín	4	–	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	83	10	
19. <i>Lukáš Veškna</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	8	
20.–21. <i>Natália Kalinová</i>	G, P. Horova, Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	7	
20.–21. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	7	
22.–26. <i>Jiří Antoňů</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6	
22.–26. <i>Tereza Preclíková</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6	
22.–26. <i>Matyáš Svoboda</i>	G, Mikulov	2	4	–	–	–	–	–	–	<b>6</b>	50	6	
22.–26. <i>Adam Šebesta</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6	
22.–26. <i>Jan Šurán</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6	

## Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	6	6	6	7	9	10	12	10	66	100	132	
1. Robert Gemrot	G Komenského, Havířov	8	6	2	7	4	4	12	3	<b>46</b>	70	93	
2. Patrik Kašpárek	Katolické gymnázium Třebíč	4	6	3	4	3	6	10	4	<b>40</b>	63	78	
3. Martina Daňková	Klasické a španělské G, Brno	6	6	–	7	–	7	12	–	<b>38</b>	77	77	
4. Lubor Čech	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	4	6	3	3	9	10	1	<b>42</b>	61	75	
5. Adam Mendl	G P. de Coubertina, Tábor	2	6	5	8	5	–	–	9	<b>35</b>	84	74	
6. Elena Chochoňáková	G L. Svobodu, Humenné	6	6	–	7	3	–	11	–	<b>33</b>	84	68	
7. Soňa Husáková	G, Českolipská, Praha	6	6	7	3	3	–	12	–	<b>37</b>	71	65	
8. Marco Souza de Joode	G Nad Štolou, Praha	6	6	0	7	1	–	11	–	<b>31</b>	66	59	
9. Radek Lacko	G Komenského, Havířov	6	6	–	–	–	7	9	–	<b>28</b>	65	47	
10. Tomáš Tuleja	G L. Svobodu, Humenné	6	6	–	8	5	–	–	–	<b>25</b>	94	44	
11. Jan Klivan	G, Dačice	4	6	–	2	2	–	–	–	<b>14</b>	58	42	
12. Jarmila Terpáková	G L. Svobodu, Humenné	6	6	–	–	3	–	–	–	<b>15</b>	82	28	
13. Karolína Letochová	G, Šternberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	26	
14. Jan Červeňan	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	23	
15. Daniel Perout	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	6	–	4	–	–	–	–	<b>14</b>	65	20	
16. Šárka Štěpánková	G J. Resslera, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	19	
17.–18. Matěj Dvořák	G Jana Keplera, Praha	4	–	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	72	18	
17.–18. Lucia Gintnerová	G Sv. Františka, Žilina	6	–	–	4	–	–	–	–	<b>10</b>	90	18	
19. Martin Polyácko	G Alejová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	15	
20. Gabriel Ščurka	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	10	
21. Daniel Czimege	SPŠ chemická, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	9	
22. Vojtěch Janota	G, Strakonice	–	–	–	–	1	–	–	–	<b>1</b>	47	7	
23. František Krůs	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	6	

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK	3	6	7	9	10	12	10	60	100	120
1. Viktor Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	2	7	2	11	13	4	<b>45</b>	85	102	
2. Jaroslav Herman	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	4	7	5	7	10	3	<b>42</b>	73	88	
3. Jakub Jobus	G Jura Hronca, Bratislava	3	3	4	7	2	10	9	5	<b>43</b>	70	84	
4. Martin Schmied	G, Jihlava	3	3	6	7	4	6	10	3	<b>42</b>	68	82	
5. Jaroslav Scheinpflug	G Jírovcova, České Budějovice	3	3	–	7	5	6	10	10	<b>44</b>	68	78	
6.–7. Radka Křížová	G J. Heyrovského, Praha	3	3	5	7	4	–	11	–	<b>33</b>	84	76	
6.–7. Martin Vavřík	G, Šumperk	3	3	–	7	4	–	–	8	<b>25</b>	83	76	
8. David Kománek	G, Špitálská, Praha	5	3	4	8	3	4	8	3	<b>38</b>	67	74	
9. Jan Benda	G, Litoměřická, Praha	3	3	6	7	–	–	12	10	<b>41</b>	82	65	
10. Jiří Zelenka	G Z. Wintra, Rakovník	3	3	1	2	1	–	12	–	<b>22</b>	59	59	
11.–12. Jan Divila	G, Lesní čtvrť, Zlín	3	3	6	2	1	–	8	–	<b>23</b>	52	52	
11.–12. Jakub Strnad	Klvaňovo G Kyjov	3	3	3	7	2	–	6	3	<b>27</b>	53	52	
13. Ronald Doboš	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	51	
14. Pavla Rudolfová	G, Videňská, Brno	3	3	–	–	5	–	12	–	<b>23</b>	90	45	
15. Veronika Hendrychová	G, Turnov	3	3	–	4	–	–	11	5	<b>26</b>	65	42	
16.–17. Lukáš Hronek	G, Pisek	3	3	–	–	–	–	–	–	<b>6</b>	100	37	
16.–17. Jan Obořil	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	37	
18. Jakub Pravda	ŠpMNDaG, Bratislava	2	3	–	–	–	–	8	–	<b>13</b>	67	34	
19. Kateřina Barotová	G, Olomouc-Hejčín	3	–	–	–	–	–	7	–	<b>10</b>	60	28	
20. Matěj Krátký	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	27	
21.–22. Petra Pálkovácsová	G, Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	23	
21.–22. Václav Zvoníček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	23	
23. Josef Polášek	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	22	
24. Rachel Johnson	Richardson High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	21	
25. Milan Tichavský	Slezské G, Opava	–	–	–	6	–	–	–	5	<b>11</b>	67	20	
26. Kryštof Jasenský	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	19	
27.–28. Minh Khoi Ho	Hanoi - Amsterdam HS, Viet- nam	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	16	
27.–28. Filip Zukal	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	16	
29. Matěj Holubička	Zemědělská akademie a Gym- názium	2	3	3	–	–	–	–	–	<b>8</b>	64	14	
30. Eva Vochozková	Biskupské G, Brno	1	–	–	–	–	–	–	–	<b>1</b>	62	13	
31.–32. Dominika Kodlová	PORG, Praha	3	1	1	2	2	–	–	2	<b>11</b>	29	11	
31.–32. Jan Vondra	G Týn nad Vltavou	–	–	–	–	–	–	6	–	<b>6</b>	50	11	
33. Daniel Krátký	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59	10	
34. Kateřina Roupová	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	23	9	
35. Erika Žitniaková	Evanjelické G, Banská Bystri- ca	1	1	–	2	1	–	–	–	<b>5</b>	23	5	
36.–37. Lucia Krajčoviechová	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	4	
36.–37. Martina Pivková	Evanjelické G, Banská Bystri- ca	2	–	–	2	–	–	–	–	<b>4</b>	40	4	

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	3	6	7	9	10	12	10	60	100	120		
1. Martin Vaněk	G, Vysoké Mýto	3	3	6	9	5	-	12	10	48	90	88	
2. Ivan Hudák	ESS, Lip. Mikuláš	3	3	-	7	-	9	12	4	38	90	79	
3. Kateřina Rosická	G J. Ortena, Kutná Hora	2	-	-	-	-	-	-	10	12	93	68	
4.-5. Marie Grunová	G, Moravský Krumlov	1	3	3	4	1	4	9	3	28	54	65	
4.-5. Jindřich Jelínek	G, Olomouc-Hejčín	3	-	-	12	-	-	-	-	15	108	65	
6. Vojtěch Ulman	G Jaroslava Seiferta, Praha	3	3	4	5	3	5	8	1	32	46	55	
7. Jiří Blaha	G, Uherské Hradiště	3	3	-	6	6	-	-	-	18	77	46	
8. Vojtěch Klimeš	G, Třeboň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	40	
9. Matej Moško	G Grösslingova, Bratislava	3	3	-	-	-	-	-	-	6	72	39	
10. Michal Jůza	G, Benešov	3	3	-	3	-	11	-	-	20	57	38	
11.-12. Tomáš Drobil	G, Dačice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	36	
11.-12. Kristián Matušík	G, Benešov	3	2	1	4	3	-	6	-	19	45	36	
13.-14. Jindřich Dušek	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	34	
13.-14. Filip Koňářik	G F. Palackého, Val. Mez.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89	34	
15. Leonardo Wimmer	Colégio pH, Tijuca, Brazil	3	3	6	8	8	4	-	-	32	84	32	
16. Marek Jankola	G M. Hattalu, Trstená	-	-	-	-	-	-	-	-	-	71	27	
17. Jakub Růžička	G, Nymburk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	24	
18. Tereza Prokopová	G Jura Hronca, Bratislava	3	-	-	-	-	-	-	-	3	92	22	
19. Tadeáš Wilczek	G F. Živného, Bohumín	3	3	6	-	-	-	-	-	12	66	21	
20. Andrej Rendek	G, Dubnica n. Váhom	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30	18	
21. Miroslav Horský	G, Českolipská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	52	16	
22. Dominik Majkus	G Na Vítězné pláni, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	46	13	
23. Karel Balej	G a SOŠ, Rokycany	3	-	-	-	-	-	-	-	3	100	11	
24. Kateřina Charvátová	G B. Němcové, HK	2	3	-	-	-	-	-	-	5	63	10	
25.-27. Bernadeta Maříková	G, Český Krumlov	3	-	-	-	-	-	-	-	3	56	9	
25.-27. Štěpán Tichý	G, Jateční, Ústí nad Labem	-	-	-	-	-	-	-	-	-	43	9	
25.-27. Marie Vaňáková	G Botičská, Praha	-	-	-	-	-	-	7	-	7	50	9	
28.-29. Vratislav Besta	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	6	
28.-29. Marek Talír	G, Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	60	6	
30. Marek Božon	G, Karviná	-	-	-	-	-	-	-	-	-	43	3	



**FKOS**

**UK, Matematicko-fyzikální fakulta**

**Ústav teoretické fyziky**

**V Holešovičkách 2**

**180 00 Praha 8**

www: <https://fykos.cz>

e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)



@FKOS



@fykosak

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.