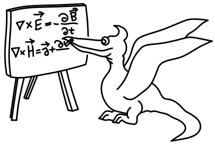

Seriál: Variační počet

Okrem Lagrangeovho formalizmu je ďalším pilierom, na ktorom stojí teoretická mechanika Hamiltonov formalizmus. V tomto seriáli sa nebudeme venovať Hamiltonovmu formalizmu. Dôvod, prečo ho ale vôbec spomínam, je ten, že sa budeme venovať niečomu, čo je akýmsi medzistupňom medzi Lagrangeovým a Hamiltonovým formalizmom. Tým je Hamiltonov variačný princíp. K pochopeniu Hamiltonovho variačného princípu ale budete potrebovať vedieť, čo je to Variačný počet a ako sa s ním pracuje. Pustime sa teda do toho.

Variačný počet

V roku 1696 Johann Bernoulli v časopise *Acta Eruditorum* sformuloval matematickú výzvu o nájdenie krivky spájajúcej dva body (neležiace v jednej horizontálnej ani vertikálnej rovine) tak, aby sa po nej pohybujúci hmotý bod v homogénnom tiažovom poli bez trenia dostal z jedného bodu do druhého za najkratší čas. Z toho je odvodený aj názov úlohy *Brachystochrona*, čo je z gréckych slov *brachystos* = najkratší a *chronos* = čas.

Výzvu Johanna Bernoulliho prijalo mnoho matematikov, medzi inými aj Newton, Huygens či Leibnitz, a všetci, ktorý na výzvu odpovedali, ju vyriešili správne. Jedným z mnohých riešení je aj možnosť využiť variačný počet, ktorý vznikol práve popri hľadaní riešenia tejto úlohy vďaka Leonardovi Eulerovi. Variačný počet je (vtedy ešte neexistujúca) časť matematiky, ktorá sa zaoberá hľadaním takzvaných extremál funkcionálov. Môžme si všimnúť, že názvoslovie nie je použité veľmi kreatívne. Medzi pojmami funkcia – funkcionál a extrém – extremála existuje analógia, ktorá je zároveň analógiou medzi klasickou analýzou funkcií (derivácie, hľadanie extrémov) a novou disciplínou, už viackrát spomínaným variačným počtom, ktorý skúma funkcionály, teda zobrazenia, ktoré funkciám priradzujú čísla.

Funkcionálom je teda (vo všeobecnej rovine) každé zobrazenie, ktoré funkciám prirazduje číslo. Teda napríklad, ak vezmete tabuľku a do jedného stĺpca budete vpisovať rôzne funkcie a do druhého rôzne čísla priradené týmto funkciám, definujete tak touto tabuľkou funkcionál. V praxi sa ale používajú funkcionály, ktoré majú nejaký lepší zmysel, a preto typickým príkladom funkcionálu je určitý integrál. Určitý integrál zrejme poznáte ako spôsob, akým spočítať plochu pod nejakou krivkou. Počíta sa tak, že krivku vyjadrenú pomocou funkcie $y = f(x)$ najprv zintegrujeme v zmysle neurčitého integrálu. Následne od seba odčítame funkčnú hodnotu neurčitého integrálu odpovedajúcu hornej hranici intervalu od funkčnej hodnoty odpovedajúcej dolnej hranici intervalu, čím dosteneme číslo, ktoré sa rovná ploche pod danou krivkou na danom intervale.

Predstavme si ale, že máme nejaký interval, v ktorého krajných bodoch máme definované hodnoty, napríklad interval (0,1), v nule hodnotu 0 a v jednične hodnotu 1. Tieto dva body môžme spojiť ľubovoľne veľa krivkami. Zadajme si teda úlohu nájsť spomedzi týchto kriviek takú, ktorá je zo všetkých možných kriviek najkratšia. Všetci z vás samozrejme viete, že riešením tejto úlohy je priamka, v tomto prípade priamka $y = x$. Táto úloha je ale typickou úlohou variačného počtu, to znamená úlohou, kde hľadáme, kedy je nejaký funkcionál extremálny. Jednoduchšie povedané, vieme zostaviť funkcionál, ktorý zadanej krivke popísanej funkciou $y(x)$ na nejakom intervale (v našom prípade na $(0, 1)$) priradí dĺžku tejto krivky. Takýto funkcionál vie spočítať dĺžku ľubovoľnej krivky, je teda dobrou analógiou funkcie. Líši sa akurát v tom, že funkcia je zobrazenie zobrazujúce z množiny reálnych čísel, kdežto tento funkcionál zobrazuje z množiny všetkých funkcií, ktoré majú na danom intervale pevne zadané hodnoty v krajných bodoch. Už všetci poznáme metódu, ako nájsť extrém funkcie - stačí položiť deriváciu tejto funkcie rovnú nule. Veľmi podobnej logiky využíva aj variačný počet. Vieme v ňom definovať takzvanú Gateauxovu (Gateaux čítaj „Gató“) deriváciu (názov je podľa mena matematika, nie je za tým nič hlbšie), ktorá je nulová pre funkciu ktorá maximalizuje/minimalizuje daný funkcionál.

Derivácia Gateaux

Definujeme si deriváciu Gateaux podobne ako klasickú deriváciu funkcie. Keď S je nejaký funkcionál, v našom prípade reprezentovaný vždy určitým intergálom nejakej funkcie $y(x)$, a t je nejaké reálne číslo, potom limitu

$$\lim_{t\to 0}\frac{S[y(x)+t\cdot h(x)]-S[y(x)]}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\int_a^b f(y(x)+t\cdot h(x))\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(y(x))\,\mathrm{d}x}{t}$$

nazveme deriváciou Gateaux v smere $h(x)$. Dôležité je, ako si takúto deriváciu predstaviť. Predstavme si to nasledovne. Máme dva pevné body, ktoré môže spájať ľubovoľné množstvo funkcií. Chceme nájsť napríklad takú, ktorá by spĺňala zadanie úlohy o brachistochrone. Vezmeme teda nejakú krivku spájajúcu tieto dva body (reprezentovanú nejakou funkciou) a skúšame k nej pričítať rôzne iné funkcie. Sledujeme, ako sa mení (v tomto prípade) čas, za ktorý prejde naša gulička po tejto krivke z jedného bodu do druhého. Pričítavanie funkcií je v limite reprezentované pričítaním malého násobku nejakej reálnej funkcie $h(x)$, čo môže byť pre pôvodnú predstavu zradné. Jednoduchšie je si to predstaviť tak, že máme nejakú krivku spájajúcu tieto dva body. Pustíme po nej guličku a odmeriame čas, po ktorý pohyb tejto guličky trval. Potom krivku máličko upravíme (niektoré jej body pusunieme o trochu vyššie, iné trochu nižšie v zmysle osy y). Znova spustíme po krivke guličku a znova odmeriame čas. Ak bol druhý nameraný čas kratší, znamená to, že naše „modifikácie dráhy“ boli úspešné a spôsob, ktorým sme ich realizovali, bol správny. Teda sa pokúsime znova realizovať úpravy podobným smerom, čo robíme až dovtedy, kým sa čas pohybu guličky skracuje. Potom sa môžeme naďalej pokúšať modifikovať dráhu guličky iným spôsobom, až nakoniec dospejeme do štádia, že akákoľvek ďalšia modifikácia dráhy by znamenala predĺženie doby putovania guličky. Vtedy môžme prehlásiť, že sme našli trajektóriu, ktorá rieši zadanie úlohy brachistochrony.

Poďme sa teraz na to pozrieť z matematickejšieho hľadiska a vysvetliť si, ako nám matematika pomôže túto nekonečnú postupnosť naťahovaní špagátiku medzi dvoma bodmi zjednodušiť. Drobné zmeny v tvare dráhy guličky sa dajú vyjadriť, ako už bolo spomenuté, tak, že k súčasnému tvaru špagátiku (reprezentovanému nejakou funkciou $y(x)$) prirátame nejakú „malú“ funkciu $h(x)$. Malú v zmysle, že sa na skoro celom nami uvažovanom intervale veľmi málo líši od nuly. Potom sčítaním $h(x)$ a $y(x)$ dostenem funkciu, ktorá sa bude len veľmi málo líšiť od $y(x)$. Tieto drobné zmeny funkcie nazývame *variácie* funkcie, z čoho aj pochádza názov variačný počet.

Ak sa ďalej pozrieme na výslednú funkciu, ktorá v našom príklade minimalizovala dobu pohybu guličky, zistíme, že ak k nej pričítame akúkoľvek malú funkciu, doba pohybu guličky sa predĺži. To si vieme predstaviť aj tak, že zo všetkých okolitých kriviek je táto najoptimálnejšia pre riešenie našej úlohy. Nejakým spôsobom je „najminimálnejšia“ alebo „najextremálnejšia“.

A práve na takomto princípe funguje variačný počet. Fyzikálne problémy sú častokrát formulované podmienkou extremály.[1] My túto extremálu nájdeme podobne ako pri hľadaní extrémov funkcií. Položíme Gateaux deriváciu funkcionálu rovnú nule a nájdeme takú funkciu, ktorá tento zderivovaný funkcionál nuluje. Prečo je to tak si hovoriť nebudeme, ale dá sa to povšimnúť z analógie, ktorú som načrtol vyššie. Minimum funkcie je taký bod, že ak sa pohnem ľubovoľným smerom, hodnota tejto funkcie bude stále vyššia. *Minimizér* funkcionálu je taká funkcia, že akákoľvek jej malá zmena (kde znova opakujem, že túto zmenu si vieme najlepšie predstaviť ako natiahnutie danej krivky nejakým smerom) spôsobí to, že náš funkcionál jej priradí vyššiu hodnotu ako tej nezmenenej/nevariovanej funkcii.

Dúfam, že teraz máte lepšiu predstavu o tom, ako variačný počet funguje. Vrhneme sa teda k ďalšej časti. Vieme už, že ak je nejaká funkcia minimizér, príp. maximizér (význam tohoto slova asi nie je potrebné vysvetľovať) funkcionálu, tak je pre túto funkciu Gateaux derivácia nášho funkcionálu nulová. Teraz si ešte ukážeme, ako sa táto derivácia počíta jednoducho, len pomocou znalostí derivácii funkcií jednej premennej.

Ako sme už povedali mnohokrát, funkcionál je zobrazenie z množiny funkcií do reálnych čísel. Zadefinujem si pomocné zobrazenie pre konkrétny funkcionál S, ktoré bude funkcia $g(t)$ z reálnych čísel do reálnych čísel, a to čisto pre účely výpočtu derivácie Gateaux tohto konkrétneho funkcionálu S

$$g(t) = S(y(x) + t \cdot h(x)) \,.$$

Vidíme, že sa skutočne jedná o funkciu reálnej premennej t, ktorá nám na výstupe vráti reálne číslo. Poprosím usilovných čitateľov seriálu, aby si za úlohu vyskúšali, že derivácia tejto funkcie v nule

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}$$

je rovná Gateaux derivácii funkcionálu v smere[2] $h(x)$. Poďme si toto všetko ukázať na nejakom konkrétnom príklade.

Príklad: Hľadanie najkratšej spojnice dvoch bodov

Využijeme príklad z úvodu seriálu: Nájdite najkratšiu možnú krivku spájajúcu bod $[0,0]$ a bod $[1,1]$.

Kľúčové pre riešenie tohto príkladu je poznať funkcionál, ktorý nám určí dĺžku nejakej krivky vyjadrenej pomocou funkcie $y(x)$. Odvodiť tvar tohto funkcionálu je jednoduché. Dá sa to pri správne nakreslenom obrázku za použitia Pythagorovej vety.

Bonus Na tomto mieste vyhlasujeme bonusovú úlohu, a tou je odvodiť tvar nasledujúceho funkcionálu

$$l_y = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x \,,$$

[1] Minimalizujeme energiu, svetlo sa pohybuje tak, aby mu dráha v priestore trvala čo najkratší čas (tzv. Fermatov princíp), kvapka vody má guľový tvar, pretože pri ňom má najnižšiu energiu. Na druhej strane, termodynamické deje sa dejú tak, aby sa maximalizovala entropia. To udávam ako veľmi dôležitý príklad, pretože mnoho ľudí to zjednodušuje tak, že príroda sa snaží veci minimalizovať. Toto ale nie je pravda, ako vidíme na príklade entropie. Pravdivý je teda skutočne princíp extremalizácie prírodných dejov, čo si ukážeme onedlho v tomto seriáli.

[2] Pojem v smere $h(x)$ si môžete predstaviť tak, že ak Gateaux derivácia nejakého funckionálu nadobúda istú hodnotu, napríklad nulu, tak extremála je to vtedy, ak nadobúda nulu pre všetky funkcie $h(x)$. Jednoduchšie povedané, ak je nejaká derivácia nulová, znamená to, že daný zderivovaný funkcionál je nula bez ohľadu na to, ako zvolím funkciu $h(x)$. To je niečo, čo si o chvíľku ukážeme na funkcionále v praxi.

kde l_y je dĺžka krivky vyjadrenej pomocou funkcie $y(x)$ ležiacej v intervale $[a, b]$ na osi x.

Potom vieme dĺžku krivky, ktorú hľadáme, zapísať ako

$$l_y = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Teraz chceme spočítať jej Gateaux deriváciu a položiť ju rovnú nule, aby sme našli extremálne hodnoty dĺžky kriviek spájajúce body $[0, 0]$ a $[1, 1]$. Zapíšeme si našu funkciu $g(t)$ a vypočítame jej deriváciu

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y + t\cdot h)\right)^2}\,\mathrm{d}x\bigg|_{t=0}\,.$$

Pre zjednodušenie zápisu si označíme pre ľubovoľnú funkciu $a(x)$ jej deriváciu podľa x ako $\dot{a}(x) = \dot{a}$. Potom sa nám výraz vizuálne zjednoduší. Zároveň rozpíšeme dvojčlen umocnený na druhú, čím dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \sqrt{1 + \dot{y}^2 + 2t\dot{h}\dot{y} + t^2\dot{h}^2}\,\mathrm{d}x\bigg|_{t=0}\,.$$

Teraz zameníme integrál a deriváciu podľa[3] t. Derivovaním výrazu pod integrálom dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = \int_0^1 \frac{\dot{h}\dot{y} + t\dot{h}^2}{\sqrt{1 + \dot{y}^2 + 2t\dot{h}\dot{y} + t^2\dot{h}^2}}\,\mathrm{d}x\bigg|_{t=0}\,.$$

Teraz nám stačí dosadiť za $t = 0$ a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(0) = \int_0^1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\dot{h}\,\mathrm{d}x\,.$$

Extremála je taká funkcia, že pre ľubovoľnú funkciu $h(x)$ splňajúcu podmienky, ktoré sme spomínali vyššie, nuluje daný integrál. My máme pod funkcionálom ale niečo vynásobené deriváciou funkcie $h(x)$. Tejto derivácie sa zbavíme pomocou per-partes. Čitateľovi, ktorému nebude nasledujúci krok hneď jasný, odporúčam si to vedľa na papieri spočítať pomalšie

$$\int_0^1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\dot{h}\mathrm{d}x = \left[h\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) h\,\mathrm{d}x\,.$$

My vieme, že funkcia $h(x)$ – variácia funkcie $y(x)$ – mení tvar funkcie $y(x)$ ale tak, aby krivka popísaná súčtom týchto funkcií spájala tie isté body ako spája samotná krivka $y(x)$. Z toho vieme, že funkcia $h(x)$ musí vždy splňať podmienku, že v kraných bodoch intervalu je nulová. Ak budeme vyčíslovať „preintegrovaný“ člen v per-partes, ktoré sme práve urobili, tak hodnoty v krajných bodoch budú nulové, pretože je tam nejaká funkcia prenásobená funkciou $h(x)$. Chceme teda riešiť rovnicu

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}\right) h\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

[3]Z matematického hľadiska nie je jasné, či ak zameníme poradie derivácie a integrálu, tak dostaneme ten istý výsledok. Rozhodne totižto existujú funkcie, pre ktoré to neplatí. Jedná sa však skôr o výnimky a z fyzikálneho hľadiska, kde uvažujeme spojité a diferencovateľné (derivovateľné) funkcie, môžeme vymeniť poradie týchto dvoch operácií. Rovnako tak aj poradie limity a derivácie alebo limity a integrálu a podobne.

Hľadáme funkciu, pre ktorú je Gateaux derivácia funkcionálu nulová. Ako sme už naznačili vyššie, keďže táto rovnosť má platiť pre ľubovoľnú funkciu $h(x)$, musí platiť, že zvyšok pod integrálom je nulový (pre každé x). Potom máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right) = 0\,,$$

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = \mathrm{konst} = c\,.$$

Riešiť túto rovnicu je možné metódou separácie premenných. Môžeme si tiež všimnúť, že ju možno upraviť do tvaru $\dot{y} = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$, teda $\dot{y}$ je konštantné. Pre tých, ktorí nevedia riešiť diferenciálne rovnice, pomôže univerzálny nástroj Wolfram Alpha. Ako riešenie dostanete rovnicu všeobecnej priamky

$$y = ax + b\,.$$

Keďže v našom prípade sme chceli najkratšiu cestu z bodu $[0,0]$ do $[1,1]$, teda $y(0) = 0$ a $y(1) = 1$, vieme rýchlo dopočítať, že nami hľadaná extremála je $y = x$.

Hamiltonov variačný princíp

V predchádzajúcej časti sme si ukázali, ako funguje variačný počet. V tejto časti sa vrátime naspäť k fyzike. Bude to ale skôr rozprávacia časť o samotnej podstate toho, ako funguje svet (alebo ako sa nám na základe doterajších pozorovaní zdá, že funguje). Celé toto rozprávanie bude ale založené na pochopení toho, čo to je a aký význam má variačný počet. Preto ak si nie ste istí, či ste predchádzajúcu časť pochopili dostatočne správne, tak odporúčam si ju ešte raz prejsť predtým, ako sa vrhneme k fyzike.

Hamiltonov variačný princíp nám, zjednodušene, vraví o tom, že všetko, čo príroda robí, robí tak, aby pritom musela vynaložiť čo najmenej „námahy“. V potenciálovom poli sa rozmiestnia hmotné objekty tak, aby mali čo najmenší potenciál. Svetlo sa medzi dvoma bodmi šíri vždy tak, aby mu to trvalo najkratší (alebo najdlhší) možný čas. Telesá si pri vzájomnom kontakte začnú vymieňať teplo, až kým nedosiahnu tepelnú rovnováhu, a to preto, aby dosiahli najvyššiu možnú entropiu. Najvyššia entropia potom zároveň ale bude zodpovedať aj najnižšej možnej celkovej vnútornej energii telies, ktoré si vymieňali teplo. Všetky tieto fyzikálne zákonitosti má väčšina ľudí odpozorované a my si to teraz matematicky popíšeme. Ako sa dá vôbec vyjadriť „úsilie“ prírody veci minimalizovať?

Vo fyzike je definovaná veličina *akcia*. Ako už z názvu vyplýva, jedná sa akoby o množstvo „akcie“, ktoré bolo pri nejakom deji vykonané. Akcia S je definovaná ako

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}(t), q(t))\,\mathrm{d}t\,,$$

kde L je naša stará známa Lagrangeova funkcia. Pripomeňme si značenie - $q(t)$ je zovšeobecnená súradnica lagrangiánu a jej derivácia je zovšeobecnená rýchlosť v smere tejto súradnice. Lagrangián môže samozrejme závisieť od viacerých súradníc.

Hamiltonov variačný princíp, alebo aj princíp najmenšej akcie, hovorí o tom, že každý fyzikálny dej medzi časovými bodmi t_1 a t_2 sa deje tak, aby bola akcia minimálna. Keď formulujeme zákon o nejakej funkcii $f(x)$, ktorý spočíva v tom, že táto funkcia nadobúda za istých podmienok svojho minima, znamená to, že za tých daných podmienok je derivácia tejto funkcie nulová. Rovnako, ak chceme o funkcii definovanej pomocou integrálu (napríklad našej akcii) povedať, že nadobúda svoje minimum, povieme, že je to vtedy, keď je jej Gateaux derivácia nulová. Spomínali sme si, že o Gateaux derivácii sa hovorí aj ako o variácii nejakej funkcie pod integrálom, z čoho pochádza asi najznámejšia slovná formulácia tohto princípu, a síce: *Variácia akcie je nula.* (Znovu rozumej Gateaux derivácia funkcionálu nazvaného „akcia“ je nulová.) Z tejto formulácie je samozrejme odvodený aj názov „Hamiltonov variačný princíp“.

Variačné princípy sú vo fyzike veľmi obľúbené, lebo skúsenému fyzikovi dávajú pri znalosti lagrangiánu nejakého systému častokrát rýchly nástroj, ako odvodiť isté všeobecné závery. Dá sa napríklad jednoducho ukázať, že Lagrangeove rovnice druhého druhu plynú z princípu najmenšej akcie, čo si my na úplný záver celého seriálu ukážeme.

Odvodenie Lagrangeových rovníc z Hamiltonovho variačného princípu

Ako z názvu a odseku predtým vyplýva, budeme chcieť z nejakého všeobecného lagrangiánu odvodiť Lagrangeove pohybové rovnice. Ako uvidíme, bude sa jednať o matematicky omnoho korektnejšie a aj prirodzenejšie odvodenie Lagrangeových rovníc. Majme teda náš funkcionál, ktorého Gateaux deriváciu chceme mať nulovú

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}(t), q(t))\,\mathrm{d}t\,.$$

Parameter t pri Gateaux derivácii si preznačíme na s

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{t_1}^{t_2} L\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q(t) + s\cdot h(t)), q(t) + s\cdot h(t)\right)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Prederivujeme podľa s (Lagrangeovu funkciu L derivujeme ako zloženú funkciu podľa retiazkového pravidla) a dosadíme za $s = 0$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\cdot h(x) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\cdot \dot{h}(x)\right)\,\mathrm{d}t\,.$$

Prvý člen je presne v tvare, v akom ho potrebujeme. Teda v tvare nejakej funkcie $\dot{q}(t)$ a $q(t)$ krát nejaká naša funkcia $h(x)$, ktorá je nulová na hranici nášho uvažovaného intervalu. Druhý člen ale neobsahuje funkciu $h(x)$, ale jej deriváciu. Spravíme preto znova per-partes, pričom preintegrovaný člen znova zmizne, nakoľko bude obsahovať aj funkciu $h(x)$, ktorá je nulová na okrajoch intervalu, v ktorých sa celý člen vyčísľuje. Usilovným čitateľom, tentokrát už naposledy, odporúčam si to prepísať a celé spočítať vedľa na papieri. Potom dostaneme

$$0 = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right)\cdot h(x)\,\mathrm{d}t\,.$$

My už ale vieme, že ak má byť pre všetky nami uvažované funkcie $h(x)$ integrál nulový, musí byť nulový zvyšok pod integrálom. Z toho hneď plynú Lagrangeove rovnice v tvare, ako ich poznáme

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\,.$$

Záver

Po tom, ako sme v minulom seriáli ukončili kapitolu Lagrangeových rovníc, sme v tomto diele predstavili ešte mierne odlišný pohľad na mechaniku a na odvodenie Lagrangeových rovníc. Tento pohľad si vyžadoval hlbšie matematické znalosti, ktoré sme sa pokúsili čitateľovi sprostredkovať v natoľko stráviteľnej podobe, aby dokázal pochopiť záverečné odvodenie v seriáli. Toto odvodenie má totižto hlboký význam, nakoľko nám ukazuje, že tá „najelegantnejšia formulácia mechaniky“ vlastne nie je výsledkom nejakého vymysleného formalizmu, ktorý nemá reálny význam, ale je výsledkom princípu extremalizácie akcie, čo je... jednoducho povedané. Autor seriálu pevne dúfa, že to na vás spravilo rovnaký dojem ako naňho, keď sa to dozvedel.

Seriálové úlohy, ako zrejme mnohí z vás už vedia, sú zamerané na opakovanie toho, čo bolo spomenuté v predchádzajúcich častiach seriálu. To dáva možnosť precvičenia všetkého doteraz spomenutého. Zároveň sa vám chcem poďakovať za váš záujem a za vaše spätné väzby k seriálu a rád príjmem aj ďalšie, záverečné, aj keď tie už vývoj seriálu neovplyvnia. Samozrejme, nezabudnite riešiť FYKOS aj ďalší rok a s mnohými z vás sa určite uvidíme na sústredení, kde môžeme niečo, ak by to z doterajšieho výkladu nebolo jasné, prekonzultovať.

Zároveň by som chcel nazáver poďakovať profesorovi Jiřímu Podolskému, nielen za vynikajúce skriptá ktoré ma inšpirovali pri vytvorení seriálu a z ktorých som čerpal mnoho odvodení v tomto seriály, ale aj za to, že odprednášal tento predmet z môjho pohľadu tak kvalitne, že ma oslovil a rozhodol som sa o časti tohto predmetu napísať seriál, ktorý ste práve dočítali.

Ďalšie poďakovanie patrí technickému týmu FYKOSu za všetky korektúry, najmä jazykové korektúry, ktoré trpezlivo aj keď s frflaním robili.

Na úplný záver ďakujem vám, riešiteľom, za riešenie seriálových úloh, za tých pár pozitívnych ohlasov a pochvál, ktoré človeka veľmi potešia. Síce len malé množstvo z vás odovzdalo aj poslednú sériu, to sa ale dá pochopiť, nakoľko to bolo náročné najmä z matematického hľadiska. Tým čo to celé zvládli úprimne gratulujem. Riešte ďalej FYKOS a študujte fyziku, lebo to má zmysel!

Jakub Jambrich

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.