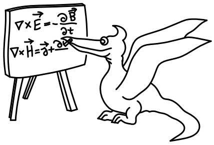

Seriál: Integrály pohybu

V tejto časti seriálu dokončíme príklad, ktorý sme minule začali – výpočet matematického kyvadla. K tomu ale budeme potrebovať vedieť, čo je to Taylorov rozvoj. Ďalej si ukážeme, ako sa dajú s pomocou Taylorovho rozvoja vyriešiť úlohy, ktoré analyticky riešiteľné nie sú. Potom sa pozrieme na to, aké nenumerické metódy riešenia Lagrangeovych rovníc existujú, a začneme sa venovať použitiu teoretickej mechaniky v nebeskej mechanike, čo bola historicky hlavná motivácia, kvôli ktorej bol Lagrangeov formalizmus vyvíjaný.

Taylorov rozvoj

Toto bude trochu matematická vsuvka do seriálu, kde sa čitateľom, čo vedia derivovať, pokúsim intuitívne vysvetliť, čo to je Taylorov rozvoj. Tiež ukážem, ako sa počíta, ale najmä uvediem základné vzťahy pre Taylorov rozvoj, ktoré sa v teoretickej mechanike zídu pri počítaní príkladov.

Asi najintuitívnejší spôsob, ako chápať a predstavovať si funkcie, je predstaviť si ich graf. Z grafu človek jasne vidí, ako sa funkcia správa, kde klesá alebo stúpa, ako veľmi klesá alebo stúpa, aké má korene a podobne. Mnohé funkcie sú ale veľmi náročné na analýzu a výpočet ich presných hodnôt, prípadne sa veľmi náročne integrujú (čo nám znemožňuje, či výrazne sťažuje riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré obsahujú takéto funkcie). Na druhej strane, existuje trieda funkcií, ktoré sa dajú veľmi triviálne integrovať a derivovať - polynómy (mnohočleny). S týmito funkciami ste sa už všetci stretli na konci základnej alebo začiatku strednej školy. Vlastnosti a rôzne manipulácie s lineárnymi a kvadratickými funkciami sú vám teda určite veľmi dobre známe a netreba vás presviedčať, že vypočítať hodnotu ľubovoľného polynómu v danom bode bez kalkulačky vie s ľubovoľnou presnosťou každý z vás. Keby som vám dal ale za úlohu zrátať na papieri sin(0,82), nikto (kto nepozná Taylorov rozvoj) by to nijako nedokázal.

Možno ste sa niekedy hrali s nejakým programom na vykresľovanie grafov funkcií a všimli si, že mnohé funkcie majú podobný tvar. Exponenciála je napríklad funkcia, ktorá veľmi rýchlo rastie. Aj x^2, x^3 alebo iné vyššie stupne polynómov rýchlo rastú. Ak si napríklad exponenciálu v takomto programe (napríklad WolframAlpha) vykreslíte a vo vedľajšom okne sa budete hrať so sčítavaním polynómov rôznych stupňov, s trochou šikovnosti a investovaného času sa dostanete k polynómu, ktorého graf sa bude veľmi podobať na graf exponenciály (aspoň vo vykreslenej oblasti, pre veľké x exponenciála začne rásť oveľa rýchlejšie ako akýkoľvek polynóm).

Tento fakt si ľudia všimli už oveľa skôr. Na takejto podobnosti správne zvolených polynómov a danej funkcie je postavený Taylorov rozvoj. V skratke sa jedná o to, že ľubovoľnú (dostatočne slušnú) funkciu vieme na nejakom intervale ľubovoľne dobre aproximovať určitým polynómom. Táto vlastnosť je veľmi užitočná, pretože častokrát nás funkcie zaujímajú len na nejakých krátkych intervaloch. Napríklad sínus. Sínus má periódu, takže pre ľubovoľne veľké číslo ho vieme spočítať, ak dokážeme spočítať sínus všetkých čísel na intervale o dĺžke periódy sínu 2π (napr. $(-\pi, \pi)$). Sínus by nám teda teoreticky stačilo dobre aproximovať len na tomto krátkom intervale. V prípade sínusu, ktorý chceme aproximovať v okolí nuly, môžeme použiť polynóm pozostávajúci napríklad z piatich členov

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\,.$$

Nie je ťažké si všimnúť vzor v správaní tohto polynómu. Ak by sme chceli aproximovať túto funkciu na celom intervale presne, mohli by sme pokračovať v pridávaní členov polynómu až do nekonečna. Ukazuje sa, že takýto nekonečný polynóm sa naozaj bude rovnať funkcii sínus dokonca na celom jej definičnom obore, teda všetkých reálnych číslach. V "modernej matematike" je práve takýto nekonečný polynóm (rad, súčet postupnosti) definíciou funkcie sínus (spolu s inými definíciami, ktoré sú tejto ekvivalentné). Sínus vieme potom zapísať pomocou nekonečného *Taylorovho radu* nasledovne

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Pre usilovného čitateľa zadávam úlohu rozmyslieť si, najlepšie rozpísať na papier, že prvých 5 členov radu je naozaj rovnakých ako sú členy v polynóme aproximujúcom sínus uvedenom skôr. Ďalej môžem taktiež odporučiť usilovnému čitateľovi, aby si vyčíslil hore uvedený polynóm v bode π a zároveň si vyčíslil v bode π aj sínus. Budete mať lepšiu predstavu, ako dobre Taylorov rad aproximuje sínus.

Usilovní čitatelia mi určite môžu potvrdiť, že výsledok bol v oboch prípadoch veľmi podobný. Pre sínus to bola nula, pre polynóm to neprezradím, ale prezradím, že koreň tohto polynómu je $\sim 3{,}1487$, čo sa k číslu π blíži veľmi pôsobivo.

Častokrát nie je jednoduché zistiť Taylorov rad trikom alebo pozorovaním (aj v tých málo prípadoch, keď sa to dá, to chce veľmi veľkú skúsenosť a veľa napočítaných príkladov). Existuje ale metóda, ako vieme postupne dopočítavať jeden za druhým členy Taylovovho radu. Uvedieme rovno jeho vzorec a jedným dychom dodávame, že si môžete všimnúť, že daný rad je zvolený tak, aby mal všetky derivácie v danom bode rovnaké ako pôvodná funkcia.

Zoberme ľubovoľnú funkciu $f(x)$ v bode $(x = a)$, ktorá má v tomto bode všetky derivácie a všetky sú konečné (dôvod je jasný zo samotného vzťahu - ak by derivácie neexistovali, nemal by zmysel). Na intervale obsahujúcom bod a je potom Taylorov rad tejto funkcie

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}\,,$$

kde $f^{(n)}(a)$ je n-tá derivácia našej funkcie v bode a.

Každú normálnu (tzv. analytickú) funkciu f vieme potom zapísať ako $f(x) = T_f(x)$. Existujú aj funkcie, pre ktoré to neplatí, ale s nimi sa nestretneme. Overte si, prosím, že ak tento vzorec aplikujeme na sínus v bode $a = 0$, dostaneme postupne polynóm, ktorý sme uviedli ako aproximáciu sínu. Použime tento vzorec ešte pre odvodenie Taylorovho radu pre exponenciálu e^x v bode $a = 0$. Derivácia eponenciály je exponenciála. Exponenciála v bode 0 je rovná jednej. Taylorov rad exponenciály bude teda vyzerať nasledovne

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Ako cvičenie odporúčam odvodiť si zo vzorčeka Taylorov rad pre $\cos(x)$ a $\ln(1+x)$ so stredom v bode $a = 0$.

Matematické kyvadlo – In medias res

V minulej časti sme si ukazovali, ako postupne nájsť zovšeobecnené súradnice, z nich čisto mechanicky zostaviť Lagrangeovu funkciu a z nej postupným derivovaním zostaviť Lagrangeove rovnice. To sme si ale neukázali na našom príklade matematického kyvadla. Dokončíme to teraz. Pre pripomenutie, Lagrangeova funkcia kyvadla mala tvar

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\cos(\varphi)$$

a Lagrangeove rovnice zostavujeme nasledovne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\,.$$

Dosadíme za L Lagrangeovu funkciu matematického kyvadla a po prederivovaní dostaneme

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin(\varphi) = 0\,.$$

Vidíme, že sa jedná o obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu, pretože najvyššia derivácia našej hľadanej funkcie $\varphi(t)$ je druhá derivácia. Čo je ale oveľa väčší problém, rovnica je zároveň aj *nelineárna*, a to práve jej druhý člen, ktorý je tvorený sínusom nami hľadanej funkcie. Štandardne sa nedajú podobné diferenciálne rovnice riešiť analyticky, tj. pomocou známych dobre definovaných funkcií. Riešiť ich môžme napríklad numericky s presnosťou, akú uznáme za vhodnú. Inou možnosťou je riešiť rovnicu analyticky tak, že pred tým, ako sa pustíme do riešenia, danú nelineánu[1] funkciu aproximujeme. Toto je okamih, keď prvýkrát v praxi použijeme Taylorov rozvoj. Rozvinieme našu funkciu do Taylorovho radu. Vieme, že čím sa od bodu, v ktorom funkciu rozvíjame, nachádzame ďalej, tým viac členov jej rozvoja potrebujeme pre dosiahnutie požadovanej presnosti. Naopak, keď sme blízko stredu tohto rozvoja, stačí nám členov menej. V istej malej vzdialenosti nám dáva dostatočnú presnosť (čím vyššiu presnosť požadujeme, tým menšie je okolie bodu, kde je aproximácia presná) aj prvý člen Taylorovho rozvoja. Ten je obvykle lineárny, prípadne konštantný (v prípade konštantného člena vezmeme prvé dva členy). V tomto prípade vezmeme z rozvoja sínusu len prvý lineárny člen. Dostávame *linearizovanú* diferenciálnu rovnicu

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0\,.$$

Táto rovnica sa dá jednoducho riešiť. Na riešenie diferenciálnych rovníc sa však v tomto seriáli nebudeme sústrediť, ale necháme ich riešenie na počítač. Osobne preferujem, ako ste si už mohli všimnúť, na riešenie rovníc WolframAlpha, ktorý nám v tomto prípade dá výsledok

$$\varphi(t) = c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\,.$$

Kde c_1 a c_2 sú integračné konštanty. Ich hodnoty si vieme jednoducho dopočítať. Napríklad tak, že budeme požadovať, aby na začiatku malo kyvalo výchylku φ_0 a uhlovú (a teda aj klasickú) rýchlosť $\dot{\varphi} = 0$. Z prvej podmienky vidíme, že $c_1 = \varphi_0$, čo dostaneme po dosadení $t = 0$ do našej pohybovej rovnice.

[1] Medzi nelineárne funkcie samozrejme patria aj kvadratické, kubické a iné mocninné funkcie. Nemožnosť analyticky riešiť rovnice je však najmä pri nelineárnych rovniciach, kde nelinearita je spôsobená inou ako polynomiálnou funkciou.

Rýchlosť dopočítame tak, že prederivujeme rovnicu pre polohu kyvadla, aby sme dostali rovnicu pre uhlovú rýchlosť kyvadla

$$\dot{\varphi}(t) = c_2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) - \sqrt{\frac{g}{l}}\varphi_0\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\,.$$

Z tejto rovnice a podmienky, že rýchlosť má byť na počiatku nulová, dopočítame druhú konštantu. Celý druhý člen rovnice bude po dosadení $t = 0$ rovný nule, zatiaľčo prvý bude nulový len ak $c_2 = 0$. Naše riešenie pre dané počiatočné podmienky bude teda vyzerať

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\,.$$

Práve sme si podrobne ukázali jeden zo spôsobov riešenia Lagrangeovych rovníc. Jedná sa o to najjednoduchšie, čo nám môže napadnúť. Hlavnou nevýhodou je ale to, že riešenie, ktoré takto nájdeme, nie je presným riešením, a správne výsledky dáva len pre body blízke nule (pretože spravidla linearizujeme funkciu v nule). Existuje ale ďalší trik použiteľný pri niektorých príkladoch, ktorý nám výrazne uľahčuje ich analytické riešenie.

Integrály pohybu

Jeden z trikov, ktoré môžeme pri riešení Lagrangeovych rovníc použiť, je získať dodatočné rovnice, ktoré nám zjednodušia riešenie samotných Lagrangeovych rovníc. Zo strednej školy viete, že pri riešení úloh z mechaniky ste častokrát využívali zákony zachovania. Univerzálny sa môže zdať zákon zachovania mechanickej energie, ktorý ale neplatí vždy. Ďalej sú užitočné aj zákony zachovania hybnosti a momentu hybnosti. Častokrát nebolo jednoduché zistiť, najmä pri veľmi komplexných problémoch, ktorá zložka hybnosti sa zachováva a prečo. Prípadne či sa zachováva alebo nezachováva energia. V Lagrangeovom formalizme je tento problém náležite ošetrený a z matematických vlastností Lagrangiánu (Lagrangeovej funkcie) vieme jednoducho určiť, ktoré veličiny sa zachovávajú počas celého deja. Tieto veličiny nazývame *integrály pohybu*. Matematickejšie povedané, integrál pohybu hľadáme ako funkciu $f(q_j, \dot{q}_j)$ zovšeobecnených súradníc a zovšeobecnených rýchlostí, pričom od tejto funkcie požadujeme, že na skutočnej trajektórii riešiacej Lagrangeove rovnice bude nadobúdať po celý čas jednu konštantnú hodnotu. Povedali sme si, že v praxi sa jedná napríklad o hybnosť telesa. Z Lagrangeovych rovníc vidíme, kedy sa niečo ako „zovšeobecnená hybnosť“ zachováva, celkom rýchlo.

Predpokladajme, že Lagrangeova funkcia závisí na všetkých zovšeobecnených súradniciach okrem nejakej jednej q_i. Potom i-tu Lagrangeovu rovnicu získame

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,.$$

Derivácia Lagrangiánu podľa tejto súradnice bude teda 0 (pretože pri zmene tejto súradnice sa Lagrangián nezmení). Z toho dostávame

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0\,.$$

Na záver preintegrujeme podľa času

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \mathrm{konst}\,.$$

Vidíme, že tento výraz sa bude stále zachovávať, nakoľko je po celej trajektórii konštantný. Na záver možno ešte poznámka k názvu „zovšeobecnená hybnosť“. Keďže Lagrangián má fyzikálny rozmer energie (jedná sa o rozdiel dvoch energií), keď zderivujeme „energiu“ podľa „rýchlosti“, dostaneme niečo, čo má fyzikálny rozmer hybnosti.

Okrem toho existuje ešte jeden integrál pohybu,[2] a ten sa nazýva „zovšeobecnená energia“. Zaujímavejšie než jeho konštrukcia je, že k Lagrangiánu existuje zachovávajúca sa zovšeobecnená energia práve vtedy, keď Lagrangián explicitne nezávisí na čase (teda na čase závisí len prostredníctvom zovšeobecnených súradníc a rýchlostí). Jej definícia je

$$h(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L\,.$$

Znova si všimnene, že táto veličina má fyzikálny rozmer energie, takže jej názov dáva dobrý zmysel.

Ešte predtým, ako reálne začneme riešiť príklady, je podľa mňa dôležité ukázať (pre niektorých zopakovať) nový spôsob hľadania zovšeobecnených súradníc.

Najčastejšie krivočiare súradnice

V mnohých úlohách sa stretávame s pohybom po povrchu sféry alebo po kružnici, alebo s problémom, ktorý má rotačnú symetriu. Hlboko v podstate prírody je totižto zakorenená jedna vlastnosť, ktorej sa snáď budeme venovať v poslednom diele seriálu a z ktorej sa dá odvodiť celá fyzika. Zjednodušene by sa dalo povedať, že príroda je „lenivá“, a preto nechá planéty obiehať okolo Slnka po elipsách a nie po napríklad štvorcoch. Vďaka tejto podivuhodnej vlastnosti sa zakrivený pohyb najčastejšie odohráva po elipsách veľmi blízkych kružniciam (mimo mechaniky na Zemskom povrchu, kde uvažujeme homogénne gravitačné pole). Preto je častokrát výhodnejšie počítať v súradniciach, ktoré dobre vystihujú symetriu danej sféry alebo kružnice. Zavádzajú sa preto polárne a sférické súradnice.

Polárne súradnice definujeme

$$x = r\cos(\varphi)\,,$$
$$y = r\sin(\varphi)\,.$$

Ak si v rovine nakreslíme kartézsku mriežku, potom bod s kartézskymi súradnicami $[x, y]$ môžeme popísať aj pomocou uhlu φ zovretého medzi kladným smerom osy x a polpriamkou z počiatku do nášho bodu; uhol meriame proti smeru hodinových ručičiek (smerom od osi x k osi y). Súradnica r je potom vzdialenosť tohto bodu od nuly meraná po ich spojnici.

Druhé, o čosi ťažšie na predstavu, sú sférické súradnice. Prevod medzi sférickými a kartézskymi súradnicami je nasledovný

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\vartheta)\,,$$
$$y = r\sin(\varphi)\sin(\vartheta)\,,$$
$$z = r\cos(\vartheta)\,.$$

Môžeme si všimnúť, že je to podobné ako pri polárnych súradniciach, len ešte prenásobené sínusom a kosínusom ďalšieho uhla, ktorý sme si označili ϑ. To, že vzdialenosť bodu od počiatku

[2] V skutočnosti môžu existovať aj iné integrály pohybu, spomenuté sa však dajú nájsť pomerne jednoducho.

je r je zrejme zjavné. Ostatné dva uhly si vieme jednoducho predstaviť, keď si predstavíme, ako to vyzerá v planetáriu (tam sa nad nami nachádza sféra). V tomto prípade je polomer sféry pevný a nemení sa. Ak stojíme v strede, tak spojnica nás a nejakého význačného bodu (v planetáriu sa používa juh) je naša kartézska os x. Súradnice nejakej hviezdy vieme určiť pomocou sférických súradníc: hviezdu spojíme najkratšou možnou čiarou po sfére s horizontom. Teda spravíme jej priemet na „horizont". Potom odčítame uhol medzi týmto jej priemetom a nami zavedenou osou x proti smeru hodinových ručičiek, čo bude naša súradnica φ. Na záver určíme súradnicu ϑ tak, že od 90° odčítame uhol medzi horizontom a hviezdou po nami nájdenej najkratšej spojnici.

Snažil som sa to vysvetliť zrozumiteľne a názorne, na internete sa ale nachádza množstvo obrázkov pre tých z vás, ktorí veci potrebujú vidieť, a nestačí im vizualizovať si ich. A možno ešte jedna poznámočka k zavedeniu sférických súradníc. Možno vám prišlo neintuitívne, ako som v poslednom kroku odčítal uhol medzi hviezdou a obzorom od 90°. Samozrejme, dostaneme rovnako dobre použiteľné súradnice, ak ϑ definujeme priamo ako uhol medzi (pre náš prípad) horizontom a hviezdou. Prevodné vzťahy sa potom trochu pozmenia. Ak ste zvyknutí na túto definíciu sférických súradníc, pokojne ich používajte, no pamätajte, že nemusí byť na prvý pohľad jasné, že vzťahy získané pri týchto rôznych zavedeniach súradníc sú totožné.

Na záver tejto časti si spomenieme ešte jeden príklad, z ktorého výsledkov budeme intenzívne ťažiť nabudúce.

Pohyb hmotnej častice v gravitačnom poli

V roku 1889 Nórsko-Švédsky kráľ Oskar II. vyhlásil k príležitosti svojich 60-tych narodenín súťaž o nájdenie analytického riešenia problému troch telies vo forme konvergujúceho mocninného radu, ktorú sám označil za (vo voľnom preklade): „Súťaž o dôležitý objav v ríši vysokej matematickej analýzy". Už nasledujúci rok Henry Poincaré publikoval článok v časopise Acta Mathematica, v ktorom dokázal, že neexistuje dostatok integrálov pohybu na analytické vyriešenie problému troch telies, čo kráľa uspokojilo a odmena za "výhru" v súťaži mu bola udelená.

Až v roku 1912 sa Fínskemu matematikovi Karlovi Sundmanovi podarilo vyriešiť tento problém, avšak formou radu s exponentmi, ktoré sú celočíselným násobkom $\frac{1}{3}$. Tento rad však konverguje veľmi pomaly, a aby dosahoval presnosť porovnateľnú s numerickými výpočtami, je nutné vziať približne jeho prvých $10^{8000000}$ členov. Problém troch telies je tak prakticky riešiteľný iba numericky. Existujú však zjednodušené prípady, ktorých riešenia s rozumnou presnosťou môžeme získať aj analyticky. Takým je napríklad systém Slnko-Zem-Mesiac.

Než sa ale dostaneme k tomuto problému, musíme si prejsť cez problém dvoch telies. A predtým ako sa dostaneme k tomu, je potrebné si ukázať, ako vyzerá Lagrangián hmotného bodu, ktorý sa pohybuje v nejakom potenciálovom poli. Budeme predpokladať, že naše skúmané teleso svojím pohybom toto potenciálové pole nijako neovplyvňuje.

Naše teleso sa bude pohybovať v centrálnom poli s potenciálom $V(r)$ a zo skúseností vieme, že sa bude pohybovať v jednej rovine (túto skúsenosť si v úlohách k seriálu budete mať možnosť overiť). Na jeho popis preto použijeme polárne súradnice. V nich bude jeho Lagrangián

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - V(r)\,.$$

Teraz uvidíme silu integrálov pohybu. Vo všeobecnosti by boli Lagrangeove rovnice v tomto prípade 2 rovnice druhého rádu, kdežto ak určíme integrály pohybu, dokážeme z nich po úpravách zostaviť jedinú diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Pre premennú r bude naša výsledná diferenciálna rovnica

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right) ,$$

kde E je mechanická energia a l moment hybnosti telesa - dva integrály pohybu.

K riešeniu tejto rovnice sa dostaneme v seriálovej úlohe a ďalšom diele seriálu. Následne plynule prejdeme k problému dvoch telies, riešeniu Keplerovej úlohy a možno aj odvodeniu Keplerovych zákonov.

Mnohým z vás ďakujem za reakcie na výzvu k spätnej väzbe, dojmy boli zatiaľ celkom pozitívne, za čo som rád, pretože je to pre mňa povzbudzujúce. Samozrejme naďalej platí, že budem rád za vaše návrhy, pripomienky a komentáre k seriálu. Som optimista a dúfam, že počet riešiteľov seriálu sa nebude znižovať, tak si všetci navzájom držme palce.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.