Úloha V.5 ... záludná kapka

8 bodů; průměr 6,21; řešilo 19 studentů

Mějme kulatou kapku o poloměru r_0 tvořenou vodou o hustotě ϱ_v, která shodou okolností padá v mlze v homogenním tíhovém poli g. Uvažujme vhodnou mlhu se speciálními předpoklady. Tvoří ji vzduch o hustotě ϱ_vzd a vodní kapičky s průměrnou hustotou ϱ_r, když uvážíme, že se rozptýlí zcela rovnoměrně. Jestliže kapka propadne nějakým objemem takové mlhy, vysbírá všechnu vodu, která se v tomto objemu nachází. Na místě zůstane pouze vzduch. Jaká je závislost hmotnosti kapky na vzdálenosti uražené v takovéto mlze?

Bonus *Řešte pohybové rovnice.*

Karel chtěl zadat něco, kde se bude měnit hmotnost.

Označme x svislou souřadnici kapky. Její poloměr potom bude $r(x)$. Jelikož kapka má tvar koule, pro její hmotnost platí

$$m = \frac{4}{3}\pi\varrho_\mathrm{v}r^3\,. \tag{1}$$

Nyní si představme, že kapka spadne o nějaké Δx dolů. Poloměr kapky se na této malé vzdálenosti změní pouze minimálně, proto můžeme předpokládat, že plošný průřez kapky bude po celou dobu

$$S = \pi r^2\,.$$

Kapka tím pádem projde mlhou o objemu

$$V = S\Delta x = \pi r^2\Delta x\,,$$

ze kterého vysbírá všechnu vodu. Jelikož známe hustotu vodních kapek v mlze ϱ_r, pro hmotnostní přírůstek kapky dostáváme

$$\Delta m = \varrho_\mathrm{r} V = \pi\varrho_\mathrm{r} r^2\Delta x\,,$$

kde si za r dosadíme z rovnice (1), potom platí

$$\Delta m = \pi\varrho_\mathrm{r}\left(\frac{3m}{4\pi\varrho_\mathrm{v}}\right)^{\frac{2}{3}}\Delta x = km^{\frac{2}{3}}\Delta x\,,$$

kde jsme si všechny parametry šikovně schovali do konstanty k. Pro nekonečně malé hodnoty přecházíme od Δ k diferenciálu, což vede na integrál

$$\int k\mathrm{d}x = \int m^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}m\,,$$

$$kx = 3m^{\frac{1}{3}} + C\,.$$

Na počátku byla uražená vzdálenost kapky $x = 0$ a kapka měla poloměr r_0, který můžeme přepočítat na počáteční hmotnost podle vztahu (1). Pro integrační konstantu potom vychází

$$C = -3\left(\frac{4}{3}\pi\varrho_\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{3}} r_0\,.$$

Dosazením do původní rovnice dostáváme

$$m = \left(\frac{1}{3}kx + \left(\frac{4}{3}\pi\varrho_\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{3}} r_0\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\varrho_\mathrm{v}\left(\frac{\varrho_\mathrm{r}}{4\varrho_\mathrm{v}}x + r_0\right)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\left(x\right)\varrho_\mathrm{v}\,, \tag{2}$$

kde $r(x)$ je poloměr kapky, který, jak si můžeme povšimnout, roste lineárně s x.

Při řešení bonusu vyjdeme z pohybové rovnice $F = \dot{p} = \dot{m}\dot{x} + m\ddot{x}$. Na kapku působí jediná síla, a sice tíhová,[1] kterou spočítáme jako $F = mg$. Dále můžeme spočítat časovou derivaci hmotnosti

$$\dot{m} = km^{\frac{2}{3}}\dot{x}\,.$$

Pro pohyb kapky tak platí

$$mg = \dot{m}\dot{x} + m\ddot{x} = km^{\frac{2}{3}}\dot{x}^2 + m\ddot{x}\,,$$

$$g = \frac{k}{\frac{1}{3}kx + \left(\frac{4}{3}\pi\varrho_\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{3}} r_0}\dot{x}^2 + \ddot{x}\,.$$

Jednoduchými algebraickými úpravami a zjednodušením[2] $x_0 = \frac{3}{k}\left(\frac{4}{3}\pi\varrho_\mathrm{v}\right)^{\frac{1}{3}} r_0 = \frac{4\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{r}} r_0$ dostáváme

$$g\left(x + x_0\right) = 3\dot{x}^2 + \ddot{x}\left(x + x_0\right) \tag{3}$$

Nyní využijeme substituci $x = y^2 - x_0$, pro kterou platí

$$\dot{x} = 2y\dot{y}\,,$$

$$\ddot{x} = 2\dot{y}^2 + 2\ddot{y}y\,.$$

Snadno si můžete ověřit, že dosazení do rovnice (3) vede na

$$g = 14\dot{y}^2 + 2\ddot{y}y\,.$$

Nyní už konečně využijeme rovnost

$$\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}y} = \dot{y}\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}y}\,,$$

která nám umožní předchozí diferenciální rovnici separovat. Řešíme integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2\dot{y}\mathrm{d}\dot{y}}{g - 14\dot{y}^2}\,,$$

$$\ln y = -\frac{1}{14}\int \frac{-28\dot{y}\mathrm{d}\dot{y}}{g - 14\dot{y}^2} = -\frac{1}{14}\ln\left|g - 14\dot{y}^2\right| + C\,.$$

Dosazením z předchozích vztahů ukážeme, že

$$g - 14\dot{y}^2 = \frac{1}{6}\left(7\ddot{x} - g\right)\,,$$

[1] Zanedbáváme vztlakovou sílu a odpor vzduchu. Pokud bychom je chtěli uvažovat, stačilo by pouze změnit některé konstanty, ale rovnice jako takové by zůstaly stejné. Vztlakovou sílu totiž přidáme členem úměrným pouze objemu, ten je zase přímo úměrný hmotnosti. Člen mg už je ale obsažen díky tíhové síle. Podle Newtonova zákona odporu bychom zase museli brát v úvahu nový člen úměrný druhé mocnině rychlosti, ten je zase shodný se členem, který získáme z časové derivace hybnosti.

[2] Ze vzorce (2) vyplývá, že pokud otočíme směr času, kapka se postupně dostane do jednoho konkrétního bodu, ve kterém je její poloměr nulový. Můžeme si povšimnout, že hodnota x_0 má význam vzdálenosti tohoto bodu od polohy kapky s poloměrem r_0.

tedy že podmínka $g > 14\dot{y}^2$ je ekvivalentní s podmínkou $7\ddot{x} > g$. Jelikož na počátku platí $\ddot{x} = g$, podmínka je (alespoň na začátku) zřejmě splněna. Později však budeme muset ověřit, zda platí po celou dobu.

Z počátečních podmínek si vyjádříme integrační konstantu

$$C = \frac{1}{14} \ln \left(g x_0^7 \right) ,$$

tedy po zpětném dosazení do výsledku integrálu máme

$$\ln y^{14} = -\ln \left(g - 14\dot{y}^2 \right) + \ln \left(g x_0^7 \right) ,$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2g}{7}} \left((x + x_0) - x_0^7 (x + x_0)^{-6} \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\ddot{x} = \frac{g}{7} \left(1 + 6x_0^7 (x + x_0)^{-7} \right) .$$

Druhou časovou derivací jsme získali $\ddot{x}$, pomocí čehož jsme si dosazením do (3) ověřili, že jsme postupovali správně. Navíc zřejmě platí $7\ddot{x} > g$, takže podmínka z předchozí části řešení bude splněna vždy.

Další postup je jasný, předchozí rovnice pro $\dot{x}$ je separovatelná diferenciální rovnice, kterou stačí pouze zintegrovat

$$t = \sqrt{\frac{7}{2g}} \int \left((x + x_0) - x_0^7 (x + x_0)^{-6} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x .$$

Bohužel, tato lahůdka jen pro ty největší integrální gurmány nemá analytické řešení. Lze ho vyjádřit pomocí hypergeometrické funkce, ale to je jen nekonečná suma, kterou stejně musíme spočítat numericky. Nicméně si můžeme povšimnout, že pro dostatečně velké x jde výraz $x_0^7 (x + x_0)^{-7}$ velmi rychle k nule, tedy zrychlení se shora blíží hodnotě $\frac{g}{7}$. Zvolme nějaký dostatečně velký čas t_0, potom můžeme pro čas $t > t_0$ pohyb kapky aproximovat rovnoměrně zrychleným pohybem

$$\ddot{x}(t) \approx \frac{g}{7} ,$$

$$\dot{x}(t) \approx \frac{gt}{7} + \dot{x}(t_0) ,$$

$$x(t) \approx \frac{gt^2}{14} + \dot{x}(t_0)\, t + x(t_0) ,$$

kde $x(t_0)$ a $\dot{x}(t_0)$ jsou dráha a rychlost kapky v čase t_0. Jejich hodnoty musíme samozřejmě určit numericky, ale všechny další $x(t)$ už pak z předchozích rovnic snadno spočítáme analyticky. Jedná se sice pouze o aproximaci, ale pro dostatečně velké t_0 můžeme dosáhnout libovolné přesnosti. Navíc, vzhledem k tomu, jak vysoké mocniny se v původních rovnicích vyskytují, dostáváme i pro relativně malé hodnoty t_0 velmi přesné výsledky.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.