Úloha III.3 ... IDKFA

6 bodů; průměr 2,16; řešilo 31 studentů

Vypálili jste na impa z plazmové pušky, která střílí stabilní shluk částic s rovnoměrným rozdělením podélné rychlostí v intervalu $\langle v_0, v_0 + \delta v\rangle$ (příčná rychlost je nulová) a s celkovou energií E_0. Hlaveň pušky má průřez S a pulz trvá nekonečně krátký čas. Jak daleko musí imp stát, aby se mu nic nestalo? Předpokládejte, že jeho kůže bez problémů uchladí na malém prostoru tepelný tok q.

Na DOOMa si vzpomněl Aleš.

Kinetická energie částic je přímo úměrná druhé mocnině jejich rychlosti. Rozdělme tedy celé spektrum rychlostí na úseky o délce Δv. Protože délku jednotlivých úseků můžeme zvolit libovolně malou, můžeme předpokládat, že všechny částice z daného úseku mají stejnou rychlost v. Kinetická energie daného úseku potom bude $\Delta E_k = k\ v^2 \Delta v$ (Δv tady vyjadřuje počet částic s rychlostí v daném úseku), kde k je nějaká konstanta, kterou dále spočítáme.

Pokud sečteme ΔE_k ze všech úseků, dostaneme energii celého svazku částic, neboli E_0. Pokud umíme integrovat, nahradíme konečné rozdíly Δ diferenciály d a čeká nás jednoduchý výpočet

$$E_0 = \int_{v_0}^{v_0+\delta v} \mathrm{d}E_k = \int_{v_0}^{v_0+\delta v} kv^2 \mathrm{d}v = \frac{k}{3}\left((v_0+\delta v)^3 - v_0^3\right),$$

$$k = \frac{3E_0}{(v_0+\delta v)^3 - v_0^3}\,. \tag{1}$$

Pokud zatím integrovat neumíme, můžeme se pokusit integrál nahradit sumou. Označíme-li počet všech úseků

$$n = \frac{\delta v}{\Delta v}\,,$$

přičemž rychlost v j-tém úseku (číslujeme od 1) bude $v_j = v_0 + j\Delta v$, dostáváme rovnici

$$E_0 = \sum_{j=1}^{n} \Delta E_{k,j} = \sum_{j=1}^{n} k\left(v_0 + j\Delta v\right)^2 \Delta v = k\Delta v \sum_{j=1}^{n}\left(v_0^2 + 2jv_0\Delta v + j^2\Delta v^2\right) =$$

$$= k\Delta v\left(nv_0^2 + 2v_0\Delta v\frac{n(n+1)}{2} + \Delta v^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right),$$

kde po dosazení za n a za předpokladu libovolně malého Δv (kdy můžeme využít odhad $n+1 \approx n$) dostáváme

$$E_0 = k\left(v_0^2\Delta v + v_0\Delta v^2 + \frac{1}{3}\Delta v^3\right) = \frac{k}{3}\left((v_0+\Delta v)^3 - v_0^3\right),$$

což je to samé, co jsme odvodili výše.

Nyní uvažujme, že imp stojí ve vzdálenosti x od pušky. V čase t na něj za nějaký malý časový úsek Δt dopadnou částice z rychlostního intervalu $\langle v, v + \Delta v\rangle$, pro které platí

$$v = \frac{x}{t}\,,$$

$$v + \Delta v = \frac{x}{t - \Delta t}\,,$$

$$\Delta v = \frac{x}{t-\Delta t} - \frac{x}{t} = x\frac{\Delta t}{t\,(t-\Delta t)}\,.$$

Za předpokladu, že Δt zvolíme dostatečně malé, můžeme Δ nahradit diferenciálem a psát

$$\mathrm{d}v = x\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{v^2}{x}\mathrm{d}t\,.$$

Kinetickou energii těchto částic můžeme spočítat jako $\mathrm{d}E_k = kv^2\mathrm{d}v$. Pro výkon svazku potom platí

$$P = \frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = kv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{kv^4}{x}\,.$$

Z tohoto vzorce vyplývá, že největšího výkonu bude dosaženo pro největší rychlost, což je $v_0+\delta v$.

Můžeme předpokládat, že částice dopadají rovnoměrně na část povrchu impa o obsahu S. Maximální výkon, který imp zvládne absorbovat, tak bude $P = qS$. Dostáváme rovnici

$$qS = \frac{k\left(v_0+\delta v\right)^4}{x}\,,$$

ze které po vyjádření x a dosazení za k z (1) vyplývá

$$x = \frac{3E_0}{qS}\frac{\left(v_0+\delta v\right)^4}{\left(v_0+\delta v\right)^3 - v_0^3}\,.$$

Spočítali jsme, v jaké nejmenší vzdálenosti od zbraně může imp stát, aby mu plazmový výstřel nic neudělal. Kdo by čekal, že fyzika DOOMa bude *takhle* zajímavá?

Poznámky k došlým řešením

Většina řešitelů chybovala už v samotné úvaze, když chtěla maximální tepelný tok, který imp vydrží, porovnávat s dlouhodobým průměrem výkonu celého svazku. Taková úloha je samozřejmě výrazně jednodušší a proto byla hodnocena maximálně třemi body.

Správná úvaha vychází z toho, že aby imp přežil, musí být výkon v každém okamžiku menší než maximální výkon, který imp vydrží, tedy qS.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.