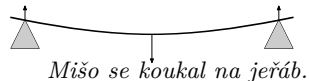


Úloha I.E ... pružnost špejle

12 bodů; průměr 9,90; řešilo 50 studentů

Změřte průhyb špejle položené na jejích koncích v závislosti na síle působící na jejím středu (viz obrázek).



Pokud špejli o délce L podepřeme na okrajích a uprostřed zatížíme, špejle se prohne. Jedná se o deformaci tahem i tlakem, kdy se spodní vrstvy protahují a horní vrstvy se zkracují. Vrstva uprostřed zůstane stejně dlouhá. Na internetu¹ jsme našli vzorec, podle kterého pro průhyb špejle při vzdálenosti podpěr L zatížené uprostřed silou F platí

$$d = \frac{FL^3}{48EI_a},$$

kde E je Youngův modul pružnosti v tahu a I_a je kvadratický moment průřezu, v tomto případě kruhu. Spočítá se jako součet druhých mocnin vzdáleností všech bodů plochy průřezu od osy, na které zůstává délka materiálu stejná, což je v tomto případě vodorovná osa. Pokud si vzdálenost každého bodu od této osy označíme y , máme

$$I_a = \int_S y^2 dS.$$

Nyní přejdeme do polárních souřadnic. Pomocí vzdálenosti od středu r a úhlu od vodorovné roviny φ si vyjádříme $y = r \sin \varphi$. Element plochy dS můžeme spočítat jako $dS = r d\varphi dr$. Dále si celý integrál rozdělíme na integrál přes kružnici pro konstantní r , a na integrál těchto kružnic přes r . Poloměr celého kruhu si označíme R a využijeme skutečnosti, že integrál přes celý kruh se rovná dvojnásobku integrálu přes půlkruh

$$I_a = 2 \int_0^R \int_0^\pi (r \sin \varphi)^2 r d\varphi dr = 2 \int_0^R r^3 \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Pomocí metody per-partes spočítáme

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi &= \sin \varphi \cos \varphi - \int_0^\pi \cos^2 \varphi = \sin \varphi \cos \varphi - \int d\varphi + \int \sin^2 \varphi d\varphi, \\ \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi &= \frac{1}{2} [\varphi - \sin \varphi \cos \varphi]_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$I_a = \pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Šřed špejle jsme zatěžovali závažím o hmotnosti m , výsledný vzorec pro průhyb špejle je

$$d = \frac{mgL^3}{12E\pi R^4}.$$

¹http://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/kontinuum/3_5

Postup

Měření jsme prováděli pro 5 různých špejlí, které jsme pro přehlednost barevně označili jako bílou, oranžovou, zelenou, žlutou a modrou. Podpěru špejlí jsme vytvořili z pojezdových šuplíků, mezi kterými jsme nastavovali mezeru o šířce postupně 25 cm, 20 cm, 15 cm a 10 cm. Přes ně jsme položili nezátíženou špejli, na kterou jsme nalepili milimetrový papír. Postupně jsme přes podpěry pokládali pokusné špejle, které jsme uprostřed zatěžovali lahví s vodou. Na milimetrovém papíru jsme pak odečetli průhyb špejle d . Pro každou špejli jsme naměřili prohnutí pro 11 až 30 hmotností, při kterých se špejle ještě nezlomila. Jelikož u kratších vzdáleností byly průhyby menší, mohli jsme použít těžší závaží. Nakonec jsme ještě pomocí posuvného měřítka změřili průměry špejlí.

Výsledky

Měření závislosti průhybu d na hmotnosti závaží m jsme pro každou špejli a každou vzdálenost L vynesli do grafu, pro ilustraci zde uvádíme graf 1 s hodnotami pro bílou špejli pro $L = 10$ cm. Vzdálenost podpěr jsme měřili pásmem, proto jeho chybu odhadujeme na 0,5 cm. Průhyb jsme měřili milimetrovým papírem, jehož nepřesnost odhadujeme na 0,5 mm. Všechny grafy jsme proložili přímkou s předpisem

$$f : d = Am,$$

kde A je konstanta úměrnosti, která představuje výraz

$$A = \frac{gL^3}{12E\pi R^4}.$$

Dále jsme do tabulky 1 vynesli výsledky měření průměru špejle, ze kterých jsme následně spočítali její poloměr včetně výběrové směrodatné odchylky průměru. Kombinací statistické chyby a chyby měřidla jsme určili celkovou nejistotu měření.

Do tabulky 2 jsme zapsali všechny vypočítané fitovací koeficienty včetně chyby fitu. Podle teorie by koeficient A měl záviset na třetí mocnině vzdálenosti podpěr L . Do grafů jsme tak vynesli závislost A na L^3 (pro ilustraci zde uvádíme graf 2 s fitem pro bílou špejli) a hodnoty jsme proložili přímkou s předpisem

$$f : A = BL^3,$$

kde

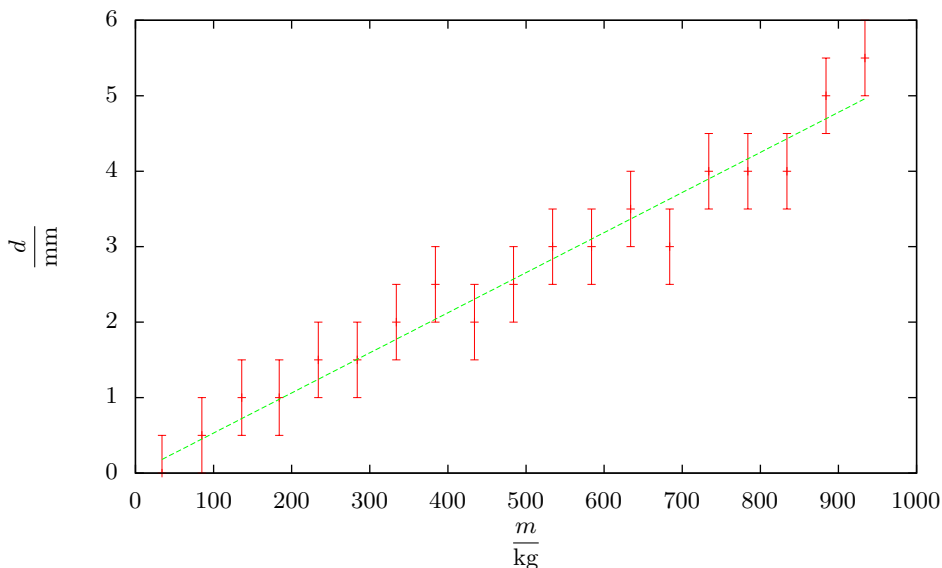
$$B = \frac{g}{12E\pi R^4}.$$

Výsledné hodnoty koeficientu B i s chybami jsou v tabulce 3. Z nich jsme následně pro každou špejli spočítali Youngův modul pružnosti podle vzorce

$$E = \frac{g}{12\pi R^4 B}.$$

Chybu měření jsme určili klasicky z parciálních derivací

$$u_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial B} u_B\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial R} u_R\right)^2} B \sqrt{\left(\frac{u_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{4u_R}{R}\right)^2}.$$



Obr. 1: Závislost průhybu bílé špejle na zatížení pro $L = 10$ cm.

Diskuse

Youngův modul pružnosti v ohybu nám pro jednotlivé špejle vyšel mezi 15 GPa a 23 GPa s přesností přibližně 4%, což je velmi přesné měření. Jako udávanou hodnotu modulu pružnosti v ohybu dřeva jsme na internetu ² našli hodnoty mezi 9 GPa a 16 GPa, což je sice číselně méně než naše naměřené hodnoty, ale řádově se shodují. Vyšší hodnota námi naměřeného modulu pružnosti může být způsobena tím, že udávané hodnoty jsou pro velká prkna a trámy, kde se ve dřevě nacházejí suky a jiné nepravidelnosti, zatímco špejle je tenká a tudíž je celá z kvalitního dřeva. To, že nám pro každou špejli vychází modul pružnosti jinak, je způsobeno tím, že dřevo je organický a navíc nepravidelný materiál. Proto i tabulkové hodnoty jsou pouze průměrné hodnoty pro jednotlivé druhy. Největší nepřesnosti našeho měření budou zřejmě způsobeny tím, že při malém průhybu se špatně odečítala jeho velikost na milimetrovém papíře, a dále také tím, že špejle se neprohýbala zcela rovnoměrně.

Závěr

Podařilo se nám ověřit teoretický předpoklad, že závislost průhybu špejle na působící síle je lineární. Dále jsme spočítali Youngův modul pružnosti v ohybu jednotlivých špejlí, výsledky

²<https://www.drevostavitel.cz/clanek/mechanicke-vlastnosti-dreva-domacich-drevin>

Tab. 1: Měření průměru jednotlivých špejlí a výpočet jejich poloměru. Chyba jednoho měření je 0,025 mm.

	bílá	oranžová	modrá	žlutá	zelená
	$\frac{2R}{\text{mm}}$	$\frac{2R}{\text{mm}}$	$\frac{2R}{\text{mm}}$	$\frac{2R}{\text{mm}}$	$\frac{2R}{\text{mm}}$
1.	2,75	2,85	2,85	2,70	2,70
2.	2,70	2,80	2,80	2,70	2,70
3.	2,70	2,85	2,80	2,75	2,60
4.	2,75	2,80	2,75	2,80	2,60
5.	2,90	2,85	2,75	2,75	2,75
6.	2,75	2,80	2,85	2,85	2,70
7.	2,65	2,85	2,85	2,80	2,60
8.	2,70	2,80	2,80	2,85	2,70
9.	2,65	2,85	2,80	2,80	2,60
10.	2,80	2,80	2,85	2,75	2,65
$2R$	2,74	2,83	2,81	2,78	2,66
σ_{2R}	0,024	0,008	0,012	0,017	0,018
R	1,37	1,41	1,41	1,39	1,33
u_R	0,02	0,01	0,01	0,02	0,02

jsou v tabulce 3.

Kateřina Rosická
kackar@vyfuk.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

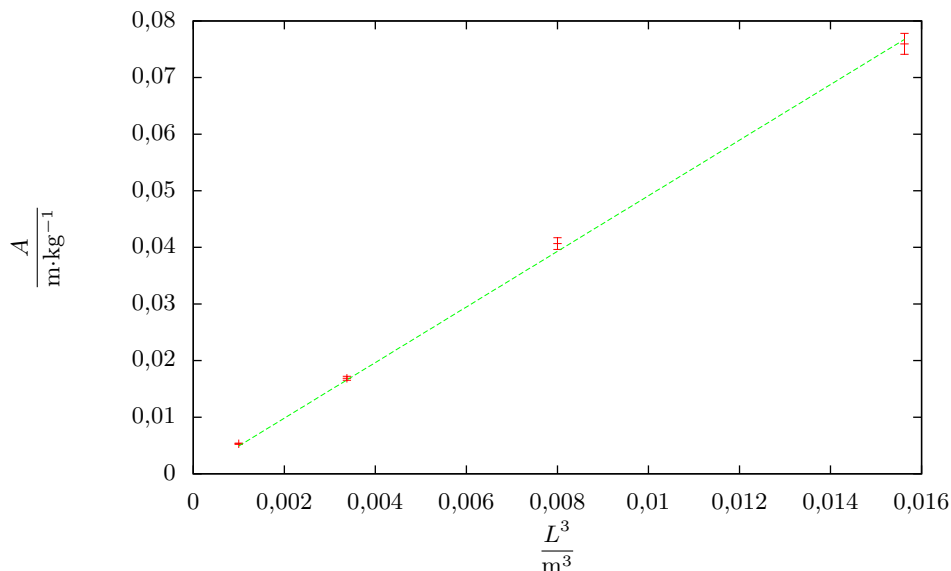
Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

Tab. 2: Spočítané fitovací koeficienty včetně chyby fitu.

	bílá	oranžová	zelená	žlutá	modrá
$\frac{L}{m}$	$\frac{A}{10^{-3} \cdot m \cdot kg^{-1}}$	$\frac{A}{10^{-3} \cdot m \cdot kg^{-1}}$	$\frac{A}{10^{-3} \cdot m \cdot kg^{-1}}$	$\frac{A}{10^{-3} \cdot m \cdot kg^{-1}}$	$\frac{A}{10^{-3} \cdot m \cdot kg^{-1}}$
0,25	$76,0 \pm 1,9$	$58,0 \pm 0,9$	$65,0 \pm 1,3$	$59,0 \pm 0,9$	$56,0 \pm 0,6$
0,20	$41,0 \pm 1,0$	$31,0 \pm 1,2$	$38,0 \pm 1,0$	$29,0 \pm 1,2$	$29,0 \pm 0,7$
0,15	$17,0 \pm 0,4$	$14,0 \pm 0,4$	$14,0 \pm 0,3$	$14,0 \pm 0,3$	$15,0 \pm 0,4$
0,10	$5,0 \pm 0,1$	$5,0 \pm 0,2$	$4,0 \pm 0,3$	$5,0 \pm 0,2$	$6,0 \pm 0,1$

Tab. 3: Spočítané hodnoty fitovacího koeficientu B a výpočet Youngova modulu pružnosti v ohybu.

	$\frac{B}{kg^{-1} \cdot m^{-2}}$	$\frac{u_B}{kg^{-1} \cdot m^{-2}}$	$\frac{E}{GPa}$	$\frac{u_E}{GPa}$
bílá	4,91	0,05	15,1	0,5
oranžová	3,77	0,08	17,4	0,4
zelená	4,25	0,13	15,7	0,6
žlutá	3,76	0,08	18,7	0,6
modrá	3,63	0,11	22,9	0,9

Obr. 2: Závislost koeficientu A na třetí mocnině vzdálenosti podpěr u bílé špejle