Úloha II.1 ... rande na pláži

3 body; (chybí statistiky)

Představte si, že vezmete svou přítelkyni/svého přítele na večerní rande na pláž a sledujete západ Slunce nad vzdálenou hladinou moře. Protože chcete prodloužit romantickou chvilku, vezmete si s sebou vysokozdvižný vozík, který se, jakmile Slunce začne zapadat za obzor, začne rovnoměrným pohybem zvedat vzhůru, abyste stále viděli Slunce dotýkající se horizontu. Jakou rychlostí se musí vozík pohybovat? *Dominika vzpomínala na Itálii.*

Aproximujeme si Zemi kružnicí a Slunce vnějším bodem S této kružnice, pozorovatel budiž bod P, který na začátku leží na kružnici a který se pohybuje po radiále. Z bodu S vedou dvě tečny ke kružnici, budeme uvažovat jen jednu z nich (druhá symbolizuje východ Slunce). Pozorovatel vidí zapadající Slunce, právě když tečna prochází bodem P. Tedy na začátku se musí tečna dotýkat kružnice v bodě P. Slunce se pohybuje úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi \sin\alpha/T$, bod dotyku se bude po obvodu Země pohybovat stejnou rychlostí. Přitom T zde značí délku dne a α je úhel, pod kterým Slunce zapadá (jeho velikost závisí na naší zeměpisné poloze). Označme si střed Země jako Z a bod dotyku „posledního paprsku“ jako T. Potom je trojúhelník ZTP pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu T. Úhel u vrcholu Z se s časem mění v závislosti na poloze bodu T, tedy v čase t je jeho velikost rovna $\varphi = \omega t = 2\pi t \sin\alpha/T$. V závislosti na něm se mění i přepona trojúhelníku, jejíž délku chceme vědět. Poloměr Země označme r, tedy délka přepony trojúhelníku ZTP bude

$$\frac{r}{\cos\varphi} = \frac{r}{\cos\frac{2\pi t\sin\alpha}{T}}\,.$$

Když odečteme poloměr Země, získáme aktuální pozici pozorovatele nad zemským povrchem

$$h(t) = r\left(\frac{1}{\cos\frac{2\pi t\sin\alpha}{T}} - 1\right).$$

Průměrnou rychlost od začátku pohybu vozíku v čase t zjistíme vydělením výšky časem. Tedy

$$v_{\mathrm{p}}(t) = \frac{r}{t}\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right).$$

Pokud chceme časovou závislost vyjádřit přesně, nezbývá než derivovat. Tedy okamžitá rychlost zvedáku po dosazení v čase t je

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r\left(\frac{1}{\cos\frac{2\pi t\sin\alpha}{T}} - 1\right) = r\left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi t\sin\alpha}{T}\right)}{\cos^2\left(\frac{2\pi t\sin\alpha}{T}\right)}\frac{2\pi\sin\alpha}{T}\right).$$

Nyní dosadíme např. hodnotu $\alpha \approx 50^\circ$ odpovídající italské pláži, délka dne je $T = 86\,400\,\mathrm{s}$. Maximální výšku vozíku odhadneme na $h = 2\,\mathrm{m}$; z rovnice pro $h(t)$ potom dokážeme získat maximální čas pozorování západu $t_{\max} \doteq 14\,\mathrm{s}$. V tomto čase se bude vozík pohybovat rychlostí $v(t) \doteq 0{,}28\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Vzhledem k tomu, že $2\pi t_{\max} \ll T$, můžeme zavést následující aproximace,

$$\sin\left(\frac{2\pi t\sin\alpha}{T}\right) \approx \frac{2\pi t\sin\alpha}{T}\,,$$
$$\cos\left(\frac{2\pi t\sin\alpha}{T}\right) \approx 1\,.$$

Poté dostáváme závislost rychlosti vozíku na čase ve tvaru

$$v(t) = rt \left(\frac{2\pi \sin \alpha}{T} \right)^2 ,$$

který je o poznání jednodušší a stále velmi přesný. Zjistili jsme, že vozík se bude pohybovat přibližně rovnoměrně zrychleně se zrychlením $a = r \left(2\pi \sin \alpha / T\right)^2 \doteq 0{,}02\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Poznámky k došlým řešením

V zadání bylo napsáno, že pohyb má být rovnoměrný, ačkoliv tomu tak nebylo. Za tuto chybu se hluboce omlouváme.

Markéta Calábková
`calabkovam@fykos.cz`