

Úvodem

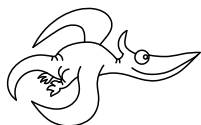
Milé řešitelky, milí řešitelé,

s první sérií jste se už ať už více či méně úspěšně poprali a nyní přichází série druhá. Pořád se budeme držet spíše mechaniky, ale zabrouzdáme i do modernějších témat, jako je supravodivost. S experimenty opět zůstaneme v kuchyni, tentokrát ale přejdeme od jídla k nápojům – snad nerozlijete moc mléka. V seriálové úloze si pak budete dále tříbit znalosti statistiky.

Rádi bychom vás upozornili, že 30. listopadu proběhne 6. ročník týmové soutěže Fyziklání online. Přihlašovat své týmy můžete na webu online.fyziklani.cz, registrace končí 28. listopadu.

Výtečné nápady při řešení úloh a úspěch ve Fyziklání přejí

Organizátoři



Zadání II. série

Termín uploadu: 29. 11. 2016 23.59

Termín odeslání: 28. 11. 2016

Úloha II.1 ... rande na pláži

3 body

Představte si, že vezmete svou přítelkyni/svého přítele na večerní rande na pláž a sledujete západ Slunce nad vzdálenou hladinou moře. Protože chcete prodloužit romantickou chvíli, vezmete si s sebou vysokozdvizný vozík, který se, jakmile Slunce začne zapadat za obzor, začne rovnoměrným pohybem zvedat vzhůru, abyste stále viděli Slunce dotýkající se horizontu. Jakou rychlostí se musí vozík pohybovat?

Úloha II.2 ... hypervysokoteplotní supravodivost

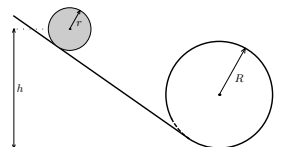
3 body

Velké části látek, obvykle kovům, roste s vyšší teplotou odpor. Jsou ovšem látky, jako například grafit či polovodiče, kterým odpor s rostoucí teplotou klesá. Také jste již pravděpodobně slyšeli o supravodivosti, což je jev, který obvykle nastává za velmi nízkých teplot a jedná se o stav, ve kterém látka nevykazuje žádný elektrický odpor a dokonale vede elektrický proud. V současné době jsou nejvyšší teploty, ze kterých byla supravodivost pozorována, hluboko pod pokojovou teplotou. Co kdybychom ale uvažovali, že se odpor mění dle vzorečku $R = R_0(1 + \alpha\Delta t)$, kde R_0 je odpor vodiče pro 20°C , α je teplotní součinitel elektrického odporu a Δt teplotní rozdíl vůči původní teplotě 20°C ? Tak při hodnotách součinitelů pro grafit $\alpha_{\text{C}} = -0,5 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$ a křemík $\alpha_{\text{Si}} = -75 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$ dostáváme nulový odpor pro vysoké teploty. Pro jaké? A jak to, že to ve skutečnosti nefunguje a jak uhlík, tak křemík nejsou za vysokých teplot supravodivé?

Úloha II.3 ... looping

6 bodů

Mějme nakloněnou rovinu pod úhlem α , na kterou hladce navazuje kruhová smyčka o poloměru R . Do jaké minimální výšky h



musíme na nakloněnou rovinu položit kouli o poloměru r (srovnatelném s R), aby smyčkou projela tak, že s ní bude po celou dobu v kontaktu? Předpokládejte, že koule neprokluzuje.

Úloha II.4 ... kulička

6 bodů

Představte si pohyb homogenní kuličky, který nejprve začíná pouze posunem (bez jakéhokoliv pohybu valením) a postupně přejde do naopak naprostého valení (bez prokluzování). Za jaký čas toto nastane? Kulička může mít různý poloměr, hmotnost, počáteční rychlost a třecí koeficient.

Úloha II.5 ... várnice potřetí

7 bodů

Uvažujte klasickou várnici s kohoutkem dole a se vzduchotěsným víkem nahoře. Kolik čaje je možné si nalít, než budeme muset otevřít ventil, který vyrovná tlak vzduchu nad čajem s okolním tlakem?

Úloha II.P ... efektivní (ná)stroj

9 bodů

Palné zbraně jsou vlastně takovými tepelnými stroji. Spočítejte jaká je účinnost nějaké pušky nebo pistole. (Jde o využití energie střeliva pro pohyb kulky.)

Úloha II.E ... jedno plnotučné, prosím

12 bodů

Tučnější mléko by mělo být „bělejší“ – více světla rozptýlí a méně propustí skrz. Proveďte měření tučnosti mléka na základě rozptylu světla, přičemž jako barevnou škálu použijte příložený papírek (pokud jste neřešili první sérii a chcete obdržet papírek, napište nám na fykos@fykos.cz). Rozdíly nejlépe vyniknou, pokud do různých druhů mléka budete přidávat barvivo tak, aby jej v mléku byla stejná (malá) koncentrace. Jako barvivo můžete použít černou tuš. Samozřejmě je možno použít jakékoliv jiné barvivo, ale pak si budete muset vyrobit vlastní barevnou škálu, kterou přiložíte k řešení. Zrealizujte měření pro různé druhy mléka a směsi mléka a vody. Diskutujte spolehlivost určení obsahu tuku.

Úloha II.S ... odhadnutelná

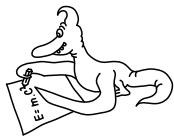
10 bodů

- Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu slouží intervalový odhad střední hodnoty v normálním rozdělení a uveďte jeho fyzikální interpretaci (postačí vlastními slovy popsat následující: fyzikální interpretace odhadu střední hodnoty, rozdíl mezi (bodovým) odhadem a intervalovým odhadem, nejdůležitější vlastnost intervalového odhadu, metoda zkráceného zápisu intervalového odhadu, nejistota měření). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- V příloženém datovém souboru *mereni1.csv* najdete naměřené hodnoty určité fyzikální veličiny (uvažujte nejistotu typu B $s_B = 0,1$). Zkonstruuje z těchto dat bodový i intervalový odhad měřené fyzikální veličiny a krátce interpretujte jejich význam.
- Předpokládejme, že měříme určitou fyzikální veličinu a víme, že vlivem použité metody měření budou mít naměřená data rozptyl rovný konstantě c (nejistotu typu B neuvažujte). Kolik musíme přibližně provést měření, abychom dosáhli nejistoty měření menší než s ?

- d) V přiloženém datovém souboru *mereni2.csv* najdete data měření stejné fyzikální veličiny dvěma různými způsoby (nejistotu typu B neuvažujte). U které metody byla použita měřicí aparatura přesnější? Který způsob měření dal přesnější výsledek měření? U obou otázek své závěry i stručně zdůvodněte.

Bonus: Zkuste odvodit, že v normálním rozdělení je výběrový rozptyl nestranným odhadem skutečného rozptylu (tj. střední hodnota výběrového rozptylu je rovna skutečnému rozptylu). Pro řešení tohoto úkolu můžete použít libovolné zdroje (pokud je budete řádně citovat).

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí *R*. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit přiložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka *R*.



Řešení I. série

Úloha I.1 ... s rumem či bez?

3 body; průměr 2,86; řešilo 118 studentů

Do kuchyňského kastrolu, který prakticky nevede teplo, vložíme tři látky: vodu, ocel a rum. Voda má hmotnost $m_v = 0,5$ kg, počáteční teplotu $t_v = 90$ °F a měrnou tepelnou kapacitu $c_v = 1$ kcal·kg⁻¹·K⁻¹. Ocelový váleček má hmotnost $m_o = 200$ g, teplotu $t_o = 60$ °C a měrnou tepelnou kapacitu $c_o = 0,260$ kJ·kg⁻¹·°F⁻¹. Rum má hmotnost $m_r = 100\,000$ mg, teplotu $t_r = 270$ K a měrnou tepelnou kapacitu $c_r = 3,5$ J·g⁻¹·°C⁻¹. Jakou teplotu (ve stupních Celsia) bude mít soustava po ustálení tepelné rovnováhy?

Lukáš Mirkovi sděloval svoje zkušenosti s alkoholem.

Toto je klasická úloha na kalorimetrickou rovnici. Označme teplotu soustavy po ustálení t . Změna celkového tepla musí být nulová, tedy, pokud nedojde ke změně skupenství, musí platit

$$c_v m_v (t - t_v) + c_o m_o (t - t_o) + c_r m_r (t - t_r) = 0.$$

Vyjáďřeme si t :

$$t = \frac{c_v m_v t_v + c_o m_o t_o + c_r m_r t_r}{c_v m_v + c_o m_o + c_r m_r}.$$

Pro výpočet t převedeme uvedené veličiny na navzájem si odpovídající jednotky, tedy třeba hmotnost na kg, teplotu na °C a měrnou tepelnou kapacitu na J·kg⁻¹·°C⁻¹. Platí $t_F = 1,8t_C + 32$, kde t_F je teplota ve stupních Fahrenheita a t_C teplota ve stupních Celsia, tedy rozdíl jednoho stupně Celsia je roven rozdílu 1,8 stupňů Fahrenheita. Převod hmotnosti je jednoduchý (čtenář provede sám) a dále platí $t_v \doteq 32,22$ °C, $t_r \doteq -3,15$ °C¹. Převod jednotek měrné tepelné kapacity provedeme krok po kroku. Začneme vodou. Platí 1 kcal = 4 184 J, tedy $c_v = 4\,184$ J·kg⁻¹·K⁻¹ = 4 184 J·kg⁻¹·°C⁻¹. U ocele podle výše uvedeného vztahu pro °C a °F platí

$$0,260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{°F}^{-1} \doteq 0,468 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1} = 468 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}.$$

Teď stačí dosadit do výše uvedeného vztahu a dostaneme výsledek

$$t = \frac{4\,184 \cdot 0,5 \cdot 32,22 + 468 \cdot 0,2 \cdot 60 - 3\,500 \cdot 0,1 \cdot 3,15}{4\,184 \cdot 0,5 + 468 \cdot 0,2 + 3\,500 \cdot 0,1} \text{°C} = \frac{71\,917,74}{2\,535,6} \text{°C} \doteq 28 \text{°C}.$$

Celková teplota soustavy je nad bodem mrazu vody, tedy obsah nádoby zůstane v kapalném skupenství a původní kalorimetrická rovnice byla správně.

Markéta Calábková
calabkovam@fykos.cz

¹V takovém stavu je rum ještě bezpečně v tekutém stavu, jak se můžeme dočíst z tabulky bodů tání etanolových směsí: http://www.engineeringtoolbox.com/ethanol-water-d_989.html.

Úloha I.2 ... brzdná

3 body; průměr 2,95; řešilo 103 studentů

Petr rád jezdí po rovině na kole rychlostí $v = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a jeho chytré kolo hlásí, že Petrův výkon je $P = 100 \text{ W}$. Po nehodě se zkrivily ráfkové brzdy, které teď na kolo působí třecí silou $F_t = 20 \text{ N}$ u obvodu. Po jakou dobu t' musí teď Petr jet na kole rychlostí v , aby vykonal stejnou práci jako předtím za čas t ? *Petr si uvědomil výhody zaseknuté brzdy.*

Před nehodou vykonával Petr práci W , kterou můžeme pomocou výkonu P vykonávaného za nějaký čas t spočítat ako

$$W = tP.$$

Tento výkon P zodpovedal pohybu rýchlostou v . Na to, aby si Petr udržal rovnakú rýchlosť aj po nehode, musel šliapať viac, a teda aj vynaložiť viac energie na to, aby sa stále pohyboval rovnakou rýchlosťou v . Rovnakú prácu W by teda vykonal za kratší čas t' pri väčšom výkone P' . Rovnosť energií môžeme zapísať ako

$$\begin{aligned} W &= W', \\ tP &= t'P'. \end{aligned}$$

Výkon P' , s ktorým Petr šliape po nehode, môžeme spočítat ako súčet pôvodného výkonu P s výkonom P_t , s ktorým kompenzuje stratu energie trením na pokazených brzdách

$$P' = P + P_t.$$

Keďže trecia sila pôsobí blízko obvodu kolesa, ktorého obvodová rýchlosť je v , výkon P_t spočítame ako súčin tejto rýchlosti a trecej sily F_t , proti ktorej pôsobíme

$$P_t = F_t v.$$

Celkovo teda dostávame rovnicu

$$tP = t'(P + F_t v),$$

ktorej úpravou prídeme k výsledku

$$\begin{aligned} \frac{P}{P + F_t v} t &= t', \\ \frac{1}{1 + \frac{F_t v}{P}} t &= t'. \end{aligned}$$

Po dosadení hodnôt do výsledku dostaneme $t' = t/3$. Petr teda s pokazenými brzdami vykoná rovnakú prácu za tretinový čas ako bez pokazených brzd.

Daniel Dupkala

daniel.dupkala@fykos.cz

Úloha I.3 ... hopsa hejsa

5 bodů; průměr 4,25; řešilo 68 studentů

Mějme ideální hopík dokonalé odrazivosti a zanedbatelných rozměrů. Tento hopík hodíme z nekonečných schodů, kde jeden schod má výšku h a délku l . Odrazy probíhají beze tření. Popište závislost nejvyšší dosažené výšky (měřeno od prvního schodu) hopíku po n -tém odrazu na počátečních parametrech. *Lubošek potkal v městské dopravě Mikuláše.*

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že hopík se na začátku pohybuje vodorovně na úrovni nejvyššího schodu. Hopík postupně, jak na něj působí gravitace, bude rovnoměrně zrychlovat směrem dolů, a jeho kinetická energie bude růst na úkor energie potenciální. Kvůli zákonu zachování energie musí platit

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1)$$

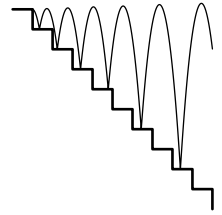
kde h je hloubka od horního schodu, ve které se hopík nachází, a v je rychlost směrem dolů (složku rychlosti ve vodorovném směru ignorujeme, neboť její příspěvek by se musel vyskytovat na obou stranách rovnice a odečetl by se). Nejvyšší rychlosti dosáhne při dopadu na schod (je jedno který) a kvůli dokonalé odrazivosti se se stejnou rychlostí vydá směrem nahoru. Nejvyššího bodu dosáhne v okamžiku kdy bude nulová složka rychlost ve svislém směru. Kvůli rovnici (1) pak musí být i hloubka nulová, a hopík tedy bude v úrovni prvního schodu. Protože toto bude platit i po n -tém odrazu, bude maximální výška po každém odrazu na úrovni prvního schodu.

Pokud bychom neučinili předpoklad o vodorovném vrhu, přibyl by v rovnici (1) na levé straně člen $\frac{1}{2}mv_0^2$, kde v_0 je počáteční rychlost ve vertikálním směru. Maximální výšku získáme položením pravé strany rovnice rovnou 0 a vyřešením pro h . Maximální výška bude konstantní a rovna maximální výšce po prvním odrazu.² Pokud by počátek pohybu nebyl v úrovni prvního schodu, stačilo by posunout referenční bod, od kterého počítáme hloubku, ve které se míček nachází.

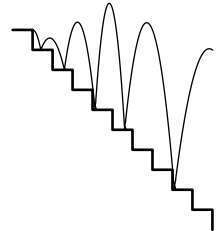
Mohlo by se tedy zdát, že stačí říci, že kvůli zachování mechanické energie zůstane maximální výška konstantní, na úrovni prvního schodu, ale situace je trochu složitější. Pokud má hopík nenulovou rychlost směrem dopředu (což mít musí, protože jinak by nikam nedoskákal), existují způsoby, jak se může složka rychlosti směrem dolů přeměnit ve složku směrem dopředu a naopak. Pak by se samozřejmě maximální výška během každého odrazu nezachovávala, ale netriviálním způsobem by závisela na čase.

Nejjednodušší způsob, jak by toto mohlo nastat, je, že hopík treffi hranu schodu. Protože ale zanedbáváme rozměry tělesa, tak tato možnost nenastane. Druhá možnost je, že hopík při dopadu vlivem tření získá rotaci. Pak nejenže by se rychlost změnila kvůli tomu, že část energie by se ukryla v rotaci hopíku, navíc by se při dalších odrazech vlivem rotace nemusel rovnat úhel dopadu úhlu odrazu. Jak by trajektorie mohla vypadat je naznačeno na obrázku 2. To ale v našem případě nenastane, protože odrazy probíhají bez tření. Proto se kvůli zákonu zachování hybnosti v horizontálním směru musí úhel dopadu rovnat úhlu odrazu. Tady tedy můžeme dojít k závěru, že se maximální výška během jednotlivých odrazů nebude měnit a míček bude mít trajektorii podobnou té na obrázku 1.

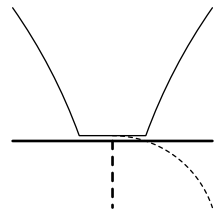
Ale nakonec je třeba zmínit, že jsme našli jednu hypotetickou možnost (kterou jsme po řešitelích samozřejmě nepožadovali), během které



Obr. 1: Trajektorie našeho idealizovaného hopíku



Obr. 2: Trajektorie neidealizovaného hopíku



Obr. 3: Možnost, jak by přece jen mohla ovlivnit hrana schodu maximální výšku.

²Zajímavé je, že nezáleží, jestli je směr pohybu na začátku šikmo dolů, nebo šikmo nahoru, maximální výška bude vždy větší než u vodorovného pohybu.

by se maximální výška nezachovávala. Předpokládáme-li, že hopík se při dopadu zdeformuje, tato deformace mu zabere nějaký krátký čas, po který bude bez tření klouzat po podložce.

Průběh tohoto je nakreslen na obrázku 3, pomocí plné čáry. Pokud ovšem během tohoto klouzání doklouže na hranu schodu, na obrázku 3 v místě označeném tlustší přerušovanou čarou, bude pokračovat vodorovně, po čárkované trajektorii, protože se již nemá od čeho odrazit. Energie, která byla uložena v deformaci hopíku, se skryje do oscilující deformace hopíku.

Mikuláš Matoušek
mikulas@fykos.cz

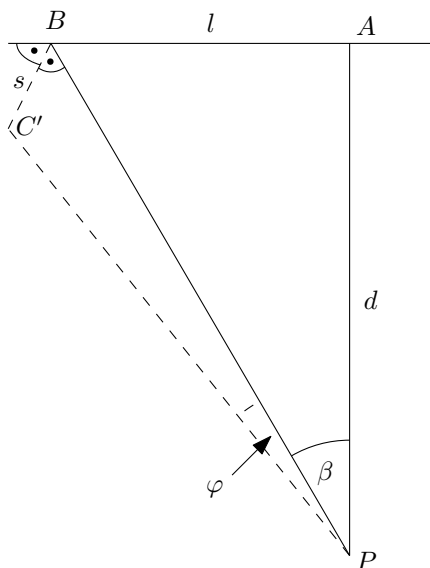
Úloha I.4 ... něco je tu nakřivo

6 bodů; průměr 3,03; řešilo 36 studentů

Pozorovatel se nachází na lodi na otevřeném moři ve výšce h nad hladinou. Je vzdálen d od vodorovného zábradlí a to v takové poloze, že dívá-li se kolmo na zábradlí, splývá dolní okraj zábradlí s horizontem. Podívá-li se ale na zábradlí ve vzdálenosti l na stranu od kolmice, vidí, že se obzor nachází o $s \pm s_s$ pod dolním koncem zábradlí. Určete poloměr Země.

Lubošek trpí mořskou nemocí.

V celé úloze budeme považovat Zemi za dokonalou kouli. Pro vyřešení úlohy je esenciální správné pochopení prostorové konfigurace a souvislostí jednotlivých parametrů systému. Začneme lokálním okolím pozorovatele jako na obrázku³ 4.



Obr. 4: Situace v okolí pozorovatele. Čárkované elementy se nachází mimo rovinu pozorovatel – zábradlí (konkrétně pod ní).

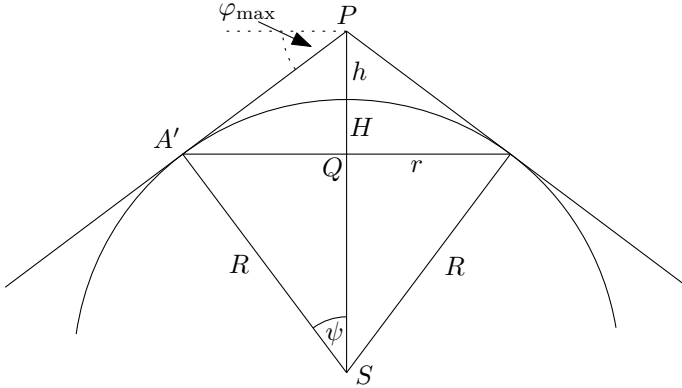
³V řešeném případě jsme uvažovali, že „o s níže“ je s měřené kolmo na přímkou pohledu. Tato formulace se dá též pochopit, že je s měřeno svisle, tj na spojnici se středem Země. Oba přístupy dávají nakonec po zanedbáních stejný výsledek.

Označme polohu pozorovatele P, patu kolmice od P k zábradlí A, bod na zábradlí ve vzdálenosti l označme B a konečně označme C' bod o s pod bodem B, tj. průsečík svislé roviny zábradlí, spojnic pozorovatele a bodů na obzoru a svislé roviny obsahující P a B. Rovněž zavedme označení úhlů $\angle BPC'$ jako φ a $\angle APB$ jako β . Ze situace je zřejmé, že

$$\varphi = \arctg \frac{s}{\sqrt{l^2 + d^2}} \approx \frac{s}{\sqrt{l^2 + d^2}}, \quad (2)$$

$$\cos \beta = \frac{d}{\sqrt{l^2 + d^2}}.$$

Ospravedlněním aproximace se budeme zabývat níže



Obr. 5: Řez Zemí znázorňující geometrický význam horizontu.

Dále se zamyslíme, co je vlastně horizont který vidíme. Bod v linii pohledu na obzoru označme A' , střed Země označme S, ψ označme úhel $|\angle A'SP|$ poloměr Země R , r poloměr kružnice-horizontu a H označme velikost výšky vrchlíku Země odděleným rovinou horizontu. Z geometrie systému a z Pythagorovy věty plyne

$$|A'P|^2 + R^2 = (R + h)^2,$$

$$|A'P|^2 = 2Rh + h^2,$$

$$|A'P| \approx \sqrt{2Rh},$$

kde jsme zanedbali člen h^2 vůči členu $2Rh$, protože je $2R/h$ krát menší, což je řádově milionkrát. Tento archetyp budeme používat během celé této úlohy, jelikož h je vůči R velice malé. Pro tuto velikost je i hodnota ψ :

$$\psi = \arctg \left(\frac{|A'P|}{R} \right) = \sqrt{\frac{2h}{R}} \ll 1.$$

Jak je známo, pro $\psi \ll 1$ platí

$$\operatorname{tg} \psi \approx \sin \psi \approx \psi,$$

⁴Bez újmy na obecnosti toto může být třeba bod na obzoru splývající se zábradlím.

kde ψ je velikost onoho úhlu v radiánech. Toto také umožňuje aproximace φ jakožto malého úhlu v (2), jelikož hodnota φ nikdy nepřesáhne ψ (viz obr. 5).

Pro poloměr kružnice-obzoru je tedy⁵

$$r \approx |A'P| \approx \sqrt{2Rh}. \quad (3)$$

Další rozměr, který se nám bude hodit, je H . Napíšeme-li Pythagorovu větu pro trojúhelník $A'QS$,

$$\begin{aligned} r^2 + (R - H)^2 &= R^2, \\ H^2 - 2RH + r^2 &= 0, \end{aligned}$$

dosazením (3) dostáváme

$$\begin{aligned} H^2 - 2RH + 2hR &= 0, \\ H &= \frac{1}{2}(2R \pm \sqrt{4R^2 - 8hR}), \\ H &= R \pm \sqrt{R^2 - 2hR}, \\ H &= R \left(1 \pm \left(1 - \frac{h}{R} \right) \right), \end{aligned}$$

kde⁶ jsme použili binomickou aproximaci $(1 + \frac{h}{R})^n \approx 1 + n\frac{h}{R}$, jelikož $h \ll R$. Dostáváme tedy dvě řešení, jedno $H = h$ a k němu komplementární $H = 2R - h$, budeme tedy uvažovat

$$H \approx h. \quad (4)$$

Jak tohle souvisí s naším pozorováním? Na obrázku 6 je rovina PBC' , tj. rovina pozorovatele a měřené vzdálenosti obzoru od zábradlí v projekci do svislé roviny zábradlí. Chceme-li dát do vztahu φ s ostatními veličinami, můžeme jej například vyjádřit jako rozdíl úhlů $\angle QCP$ a $\angle QB'P$ (střídavý úhel), to jest

$$\varphi = |\angle QCP| - |\angle QB'P| = \arctg\left(\frac{H+h}{r}\right) - \arctg\left(\frac{H+h}{r+c}\right). \quad (5)$$

Podle (4) jsou čitatele argumentů zhruba $2h$, podle (3) jsou jmenovatele argumentů alespoň $\sqrt{2hR}$. Argumenty arkustangent jsou tedy velmi malé a je tedy možné použít aproximaci

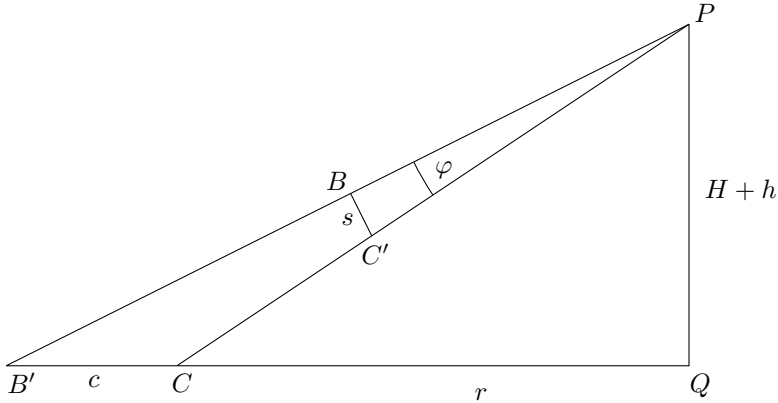
$$\arctg(x) \approx x, \quad x \ll 1,$$

z (5) tedy dostaneme

$$\varphi \approx \frac{H+h}{r} - \frac{H+h}{r+c} = (H+h) \frac{c}{r(r+c)}. \quad (6)$$

Tento vztah zatím v tomto tvaru ponecháme a zabýváme se velikostí c . Tak lze učinit podíváme-li se na řez rovinou horizontu jako na obr. 7. Vzhledem k pravoúhlosti trojúhelníku $B'A'Q$ platí

$$\begin{aligned} (c+r) \cos \gamma &= r, \\ c &= r \left(\frac{1}{\cos \gamma} - 1 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Obr. 6: Rovina obsahující s , tzn. rovina obsahující pozorovatele a svislici na zábradlí v bodě A.

Hodnota γ koresponduje s hodnotou β , jak se ukáže z obrázku 8 a následujících vztahů.

Napišme si kosinové věty pro trojúhelník $A'PB'$, resp. $A'QB'$ pro úhly β , resp. γ

$$\begin{aligned} |A'B'|^2 &= |A'P|^2 + |B'P|^2 - 2|A'P||B'P|\cos\beta, \\ |A'B'|^2 &= |A'Q|^2 + |B'Q|^2 - 2|A'Q||B'Q|\cos\gamma. \end{aligned}$$

Vezmeme-li Pythagorovy věty pro trojúhelníky $A'PQ$ a $B'PQ$, získáváme z rovnosti pravých stran kosinových rovnic

$$\begin{aligned} 2(H+h)^2 + 2r(H+h) + 2(r+c)(H+h) - \\ - 2\sqrt{((H+h)^2 + r^2)((H+h)^2 + (r+c)^2)}\cos\beta = -2r(r+c)\cos\gamma, \end{aligned}$$

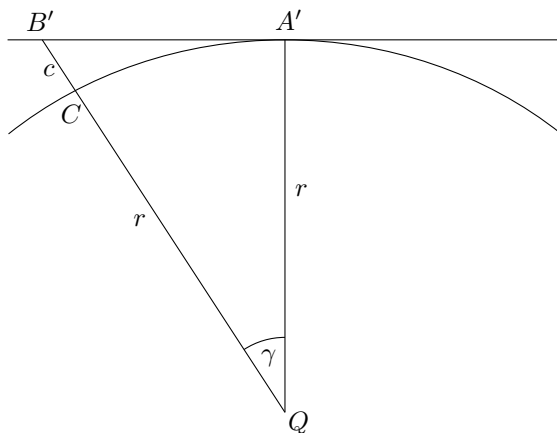
Do vztahu dosadíme (4), (3) a zanedbáme všechny členy typu h/R vůči členům typu 1 či $1/\cos\xi^7$ dostáváme zhruba

$$\cos(\gamma) \approx \cos(\beta). \quad (8)$$

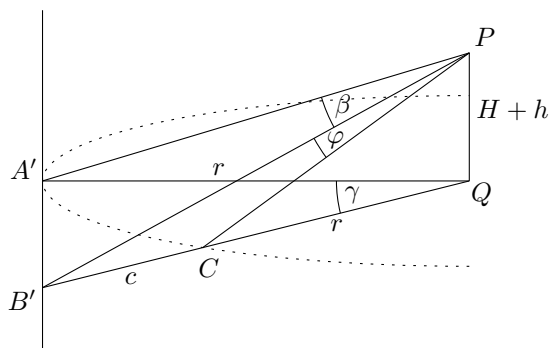
⁵Obdobné platí pro délku příslušného oblouku – tedy vzdálenost obzoru po povrchu Země (nebo po moři).

⁶Všimněme si, že kvadratická rovnice pro H by neměla reálné řešení pro $h > R/2$. Toto je důsledkem dříve provedené aproximace, která předpokládala $h \ll R$, tento charakter rovnice je tedy přijatelný.

⁷Předpokládáme, že l není řádově větší než d . Poté lze výrazy $s \cos\xi$ považovat za řádově 1 a $r+c$ řádově r . Navíc i v tom případě by aproximace byla na místě, jen by bylo třeba nahlédnout že výraz typu $h/(r+c)$ je ještě menší než $\sqrt{h/R}$.



Obr. 7: Rovina obsahující kružnici-obzor.

Obr. 8: Abstrakce znázorňující souvislost β a γ .

Nyní už stačí dát dohromady rovnosti (2), (3), (4), (6), (7) a (8) a dostáváme

$$\begin{aligned}\varphi &\approx (H+h) \frac{c}{r(r+c)}, \\ r(r+c)\varphi &\approx 2hc, \\ r\varphi \frac{1}{\cos\beta} &\approx 2h\left(\frac{1}{\cos\beta} - 1\right), \\ r &\approx 2h \cos\beta \left(\frac{1}{\cos\beta} - 1\right) \frac{1}{\varphi},\end{aligned}$$

$$\frac{2hd}{s} \left(\frac{\sqrt{l^2 + d^2}}{d} - 1 \right) \approx r \approx \sqrt{2hR},$$

$$R \approx \frac{2hd^2}{s^2} \left(\frac{l^2}{d^2} - \frac{2\sqrt{l^2 + d^2}}{d} + 2 \right),$$

což je odhad pro R v dost dobrém přiblížení. Podle Gaussova vzorce pro šíření chyb bude chyba určení poloměru Země s_R

$$s_R \approx \frac{4s_s h d^2}{s^3} \left(\frac{l^2}{d^2} - \frac{2\sqrt{l^2 + d^2}}{d} + 2 \right).$$

Uskutečnit tento nápad v praxi je technicky náročné, jelikož je potřeba široký úhel pohledu na moře, alespoň částečně stabilní pozorovatelskou základnu (malé lodě se budou hodně, rychle a často houpat) a také je tím citlivější na přesnost měření, čím níže jste nad hladinou. Pokud bychom provedli měření na velké výletní lodi,⁸ mohli bychom provést měření s parametry například $h = 40$ m, $d = 2$ m, $l = 1,5$ m a $(s \pm s_s) = (2,0 \pm 0,5)$ mm,⁹ naše výsledky udávají poloměr země jako $R = (5\,000 \pm 2\,500)$ km.

Komentáře k došlým řešením

Největší problémy dělalo správné pochopení zadání. Za zmínku stojí také jiný postup, který vychází z cylindrické symetrie soustavy pozorovatel – obzor.

Lubomír Grund
grund@fykos.cz

Úloha I.5 ... na procházce

7 bodů; průměr 5,13; řešilo 60 studentů

Katka si vyšla ráno před přednáškou na procházku, aby vyvenčila svého potkana. Vyšla s ním na rovný palouk, a když byl potkan ve vzdálenosti $x_1 = 50$ m od ní, hodila mu míček rychlostí $v_0 = 25$ m·s⁻¹ pod úhlem α_0 . V okamžiku výhozu potkan vyběhl směrem ke Katce rychlostí $v_1 = 5$ m·s⁻¹. Nalezněte obecnou závislost úhlu φ na čase, kde $\varphi(t)$ označuje úhel mezi vodorovnou rovinou a spojnicí potkana a míčku, a vykreslete tuto závislost do grafu. Na základě grafu určete, zda je možné, aby míček zakryl potkanovi Slunce, jež se nachází ve výšce $\varphi_0 = 50^\circ$ přímo před potkanem. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9,81$ m·s⁻² a pro zjednodušení uvažujte, že házíme z nulové výšky.

Mírek pozoroval, co se děje v trávě.

Popisujme situaci ze soustavy spojené s potkanem, zde se jedná o vyšetření šikmého vrhu. Označme x , y souřadnice míčku vzhledem k potkanovi. Poté dostáváme

$$x(t) = x_1 - (v_1 + v_0 \cos \alpha_0)t,$$

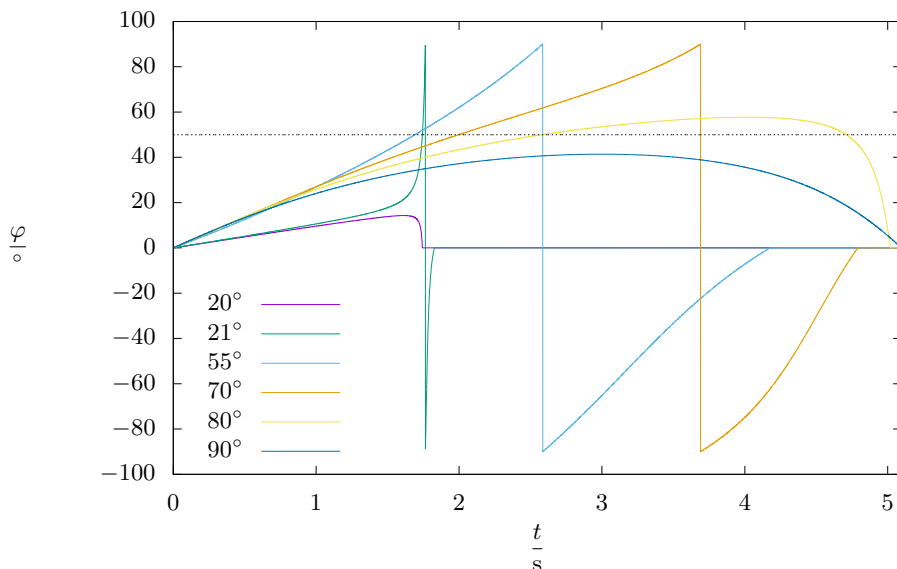
$$y(t) = v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

⁸např. https://en.wikipedia.org/wiki/MS_Carmonia

⁹Vzhledem k technické náročnosti by bylo velice komplikované dosáhnout vyšší přesnosti.

Nyní jednoduše vyjádříme úhel φ z pravoúhlého trojúhelníku potkan – míček – průmět míčku na zem jako

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} = \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{1}{2} g t^2}{x_1 - (v_1 + v_0 \cos \alpha_0) t}.$$



Obr. 9: Vývoj úhlu φ v závislosti na čase pro několik hodnot parametru α_0 .

Z obr. 9 vidíme, že pro úhly zhruba od 21° do 80° je možné, aby míček zakryl potkanovi Slunce. „Je možné“ říkáme proto, že ještě bude záviset na velikosti míčku a jeho vzdálenosti od potkana, jestli dojde k úplnému nebo pouze částečnému „zatmění Slunce“.

Pokusme se však vyjádřit tyto hranice přesněji. Než začneme cokoli počítat, poznamenejme, že nás zajímají úhly pouze z intervalu $\alpha_0 \in (0^\circ, 180^\circ)$.

První nutná podmínka, která nás může napadnout, je, aby existoval čas t_0 , kdy platí $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Protože funkce $\operatorname{tg} \varphi$ je na intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$ prostá, můžeme ekvivalentně řešit rovnici

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y(t)}{x(t)}, \quad (9)$$

jejíž úpravou dostáváme kvadratickou rovnici

$$\frac{g}{2} t^2 - t[(v_1 + v_0 \cos \alpha_0) \operatorname{tg} \varphi_0 + v_0 \cos \alpha_0] + x_1 \operatorname{tg} \varphi_0 = 0. \quad (10)$$

Řešení takovéto rovnice existuje, pokud je její diskriminant větší nebo roven nule. Označme koeficient u lineárního členu jako b . Nerovnost

$$D = b^2 - 2g x_1 \operatorname{tg} \varphi_0 \geq 0$$

vyřešíme numericky, řešení pronikneme s intervalem $(0^\circ, 180^\circ)$ a dostáváme nový, užší interval $(0^\circ, 83^\circ)$. V tomto intervalu existuje řešení rovnice (10), nicméně čas t_0 , pro který je rovnice splněna nemusí být fyzikální, resp. může být záporný nebo vyšší než čas dopadu¹⁰. Proto je hledaný interval pro α_0 podintervalem $(0^\circ, 83^\circ)$.

Další jednoduchá podmínka, která nás napadne, tentokrát postačující, je, pokud potkan míček podběhne, než míček dopadne, pak je jisté, že bude existovat fyzikálně správný čas t_0 . Jinak řečeno, tehdy bude moci míček zakrýt potkanovi slunce.

Míček dopadne v čase, kdy platí $y(t) = 0$. Řešením této rovnice dostáváme

$$t_{\text{imp}} = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Dále potkan mine míček v čase, kdy platí $x(t) = 0$. Čas, ve kterém tak nastane, vyjádříme jako

$$t_{\text{meet}} = \frac{x_1}{v_1 + v_0 \cos \alpha_0}.$$

Dostáváme tedy nerovnici

$$\frac{x_1}{v_1 + v_0 \cos \alpha_0} \leq \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g},$$

kterou opět numericky vyřešíme. V intervalu $(20^\circ, 78^\circ)$ tedy potkan míček podběhne.

Nejjednodušší způsob, jak se vypořádat s intervaly $(0^\circ, 20^\circ)$ a $(78^\circ, 83^\circ)$ je projít je numericky. Nakonec se tedy vrátíme k první metodě obrázkové, kdy zjenníme skoky v úhlu α_0 , vyneseme si závislost $\varphi(t)$ do grafu a zjistíme, jestli v nějakém čase platí $\varphi = \varphi_0$. Celkově získáváme interval¹¹ $\alpha_0 \in (20^\circ, 83^\circ)$, kdy míček může potkanovi zakrýt Slunce.

Obě numerická řešení jsme zvolili, protože analytický postup vede na rovnice 4. řádu. Mohli jsme se numericky vypořádat přímo s rovnicí (9), ale jistý význam přikládáme i rozboru postačujících a nutných podmínek.

Přímé numerické řešení rovnice (9) v zásadě odpovídá vytvoření grafu 10, ze kterého můžeme rovnou číst výsledný interval úhlů α_0 . Pro zvolené α_0 představuje odpovídající vodorovná čára závislost $\varphi(t)$ až do času dopadu míčku na zem. Naším úkolem je tedy najít obor hodnot α_0 isočáry pro $\varphi = 50^\circ$.

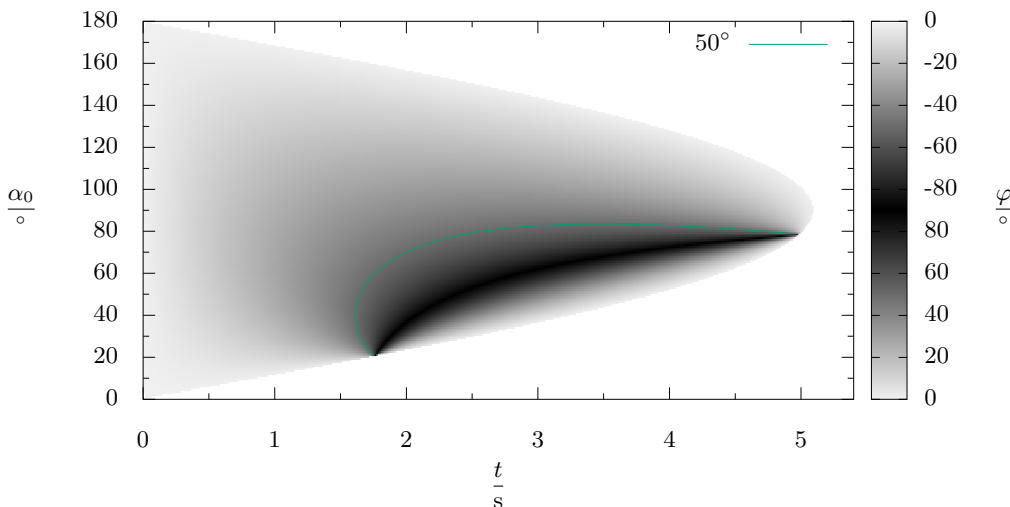
Komentáře k došlým řešením

Za správný vzorec pro $\varphi(t)$ jsme udělovali 4 body a za správný rozbor zakrytí Slunce až 3 body. Sice samotný rozbor byl těžší, ale otázka byla mířená více na samotnou závislost $\varphi(t)$. Protože bylo potřeba udělat bodové rozdíly mezi řešiteli, udělovali jsme za větu „může zakrýt“ vycházející ze zkoušky dvou hodnot α_0 1 bod ze 3 možných. Za graf, ze kterého šlo vyčíst úplné řešení (závěr ho neobsahoval) jsme udělovali plný počet bodů, vzhledem k nejednoznačnosti zadání (může zastínit kvůli velikosti míčku, nebo jestli lze najít alespoň jeden úhel α_0).

Mnoho lidí se snažilo vyjádřit úhel α_0 podle vlastního pravidla, že potkan musí míček chytout okamžitě při dopadu. Správným postupem ale bylo pouze vyšetřit výšku Slunce v závislosti na všech možných hodnotách úhlu α_0 .

¹⁰ V našem případě $\alpha_0 \in (0^\circ, 83^\circ) \subset (0^\circ, 90^\circ)$ však reálně může nastat pouze druhý případ.

¹¹ Ve skutečnosti je dolní mez přesněji $20,17^\circ$, proto na obr. 9 vidíme správně, že pro rovných $20,00^\circ$ míček nevystoupá dostatečně vysoko.

Obr. 10: Závislost výšky Slunce na čase a úhlu α_0 .

Někdo řešil, jestli výsledná funkce $\varphi(t)$ má dávat hodnoty z intervalu $(-90^\circ, 90^\circ)$, $(0^\circ, 180^\circ)$ nebo to vyřešili absolutní hodnotou a dostali interval $(0^\circ, 90^\circ)$. Pokud výsledky správně reprezentujete, pak na formě v zásadě nezáleží. Nicméně řešení tohoto příkladu obsahovalo v určitém bodě začít řešit (ne-)rovnice numericky. V tuto chvíli počítač nejspíš špatně vyhodnotí výsledky v absolutní hodnotě (kdy míček potkanovi zakryje Slunce, a kdy je naopak míček za potkanem). Toto špatné vyhodnocení se povedlo i některým z vás.

Část řešitelů uvažovala, že pokud míček zakryje Slunce, musí tak nastat během stoupání míčku (potkan ale mezitím přiběhne blíž) nebo že míček potkanovi zakryje Slunce pouze pokud potkan míček podběhne (protipříkladem je např. $\alpha_0 = 80^\circ$).

Úplné řešení by mělo obsahovat i variantu, kdy Katka hází míček za sebe. Pokud by byl potkan dostatečně rychlý nebo Slunce bylo níže, stejně by míček mohl potkanovi Slunce zastínit.

Jakub Dolejší
dolejsi@fykos.cz

Úloha I.P ... nebe nám padá na hlavu 8 bodů; průměr 4,78; řešilo 67 studentů

Už jste se někdy zamysleli nad tím, proč mraky nespadnou na zem, když jsou z vody, která má přece výrazně větší hustotu než vzduch? Dešťové kapky dopadnou na zem v řádech minut, tak proč ne i mraky? Zkuste tuto skutečnost fyzikálně objasnit. Veškerá svá tvrzení podložte výpočtem.

Mírek se zadíval na nebe a dostal strach.

Chrabří Galové se nebáli nikoho o ničem, snad jen toho, že by jim nebe mohlo spadnout na hlavu. Ukážeme si, že ač třeba nejsme tak stateční jako galští válečníci, rozhodně se nemusíme bát

toho, že by nás nebe neboli obloha zamáčklo do země. Pojem obloha není úplně jednoznačný, budeme ho proto používat z pohledu meteorologie jako označení pro troposféru, tedy dolní vrstvu atmosféry, ve které se „odehrává počasí“. Zde musíme přiznat, že atmosféra nás do země sice zamačkává poměrně velkým tlakem (jehož velikosti se ze zřejmých důvodů říká 1 atmosféra), ale na tento tlak je lidské tělo zvyklé a nepocituje ho jako zátěž. Co by tedy na nás z oblohy mohlo spadnout? První věc, která nás na nebi kromě Slunce upoutá, jsou mraky. A těmi se budeme nadále zabývat.

Jak zadání připomíná, mraky jsou tvořeny primárně vodou. Když se podíváme do tabulek, tak zjistíme, že hustota vody je za běžných atmosférických podmínek zhruba tisíckrát vyšší než hustota vzduchu. Když si nalijeme do rukou vodu a hodíme ji do vzduchu, tak spadne k zemi velmi rychle. Stejně tak však ze zkušenosti víme, že padání mraků nepozorujeme. Podívejme se proto, co přesně mraky jsou a jak vznikají.

Když za chladného počasí vydechnete, vytlačíte tak ze svých plic horký, vlhký vzduch do prostředí s nižší teplotou, která je pro vydechnutý vzduch pod tzv. rosným bodem. Za takových podmínek nastane kondenzace¹² vodních par a vy před svými ústy pozorujete nabělalý obláček. A přesně tak vznikají i velká oblaka na obloze – vlhký vzduch se z rozehráté země dostává do vyšších vrstev atmosféry s nižší teplotou a kondenzovanou páru vnímáme jako bílé mraky. Oblaka se mohou nalézat v různé výšce, dokonce i mlha není ve své podstatě nic jiného než oblak, který je velmi nízký. Dolní hranici velikost kulovitých kapiček, z nichž se mrak skládá, lze na základě Mieova rozptylu¹³ odhadnout na zhruba na 1 μm , běžné rozměry¹⁴ se pohybují mezi 10 až 20 μm .

Jak Galileo experimentálně ověřil, zrychlení objektů při pádu nezávisí na jejich hmotnosti, kapička vody by tedy měla z výšky řekněme 10 km dopadnout na zem při konstantním zrychlení $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ za necelou minutu. Opět ale ze zkušenosti víme, že malé částičky z relativně hustého materiálu, například prach, padají k zemi poměrně pomalu (spíš se tak vznášejí). Příčinou pomalého pádu je odpor prostředí.¹⁵ Ačkoli je vzduch velmi řídký, dokáže v závislosti na rozměrech objektu a jeho rychlosti působit nezanedbatelnými odporovými silami. V zásadě nám stačí vědět pouze to, že odpor vzduchu je závislý na horizontálním průřezu objektu a na jeho hmotnosti nikoli. Potom už si stačí jenom uvědomit, že když zmenšujeme poloměr homogenní kuličky, tak její hmotnost klesá rychleji než obsah jejího povrchu. Z toho již plyne, že čím bude kulička menší, tím větší bude mít odpor vzduchu vliv v porovnání s tíhovou silou a kulička proto bude zrychlovat pomaleji.

Chceme-li být přesnější, pak musíme vědět, že na kuličku při začátku jejího pohybu začne působit Stokesova odporová síla daná vztahem (skalárně)

$$F_o = 6\pi r\eta v,$$

kde r je poloměr kuličky, η dynamická viskozita vzduchu a v rychlost kuličky. Pro jednoduchost budeme počítat se zaokrouhlenou hodnotou dynamické viskozity suchého vzduchu¹⁶

¹²Z molekulárního hlediska znamená kondenzace vznik vodíkových můstků mezi molekulami vody, přičemž energie tepelného pohybu molekul je natolik nízká, aby nedocházelo k okamžitému zpretrhávání těchto vazeb.

¹³Rozptyl elektromagnetického vlnění na dokonalých sférech. Pro objekty větší než vlnová délka slabně závislost na konkrétní vlnové délce, a protože mraky jsou bílé, musí být částice v nich větší než 350 až 750 nm (rozsah vlnových délek viditelného světla).

¹⁴Velmi přesné měření rozměrů částic v oblacích (konkrétně v cirrech, vysoká oblačnost) za pomoci lidarů je popsáno například zde: <http://www.atmos-chem-phys.net/7/3507/2007/acp-7-3507-2007.pdf>.

¹⁵Tento poznatek nám mimo jiné říká, že kdybychom byli v prostředí bez atmosféry, tj. kdybychom vytvořili mrak například na Měsíci, tak by spadl dost rychle.

¹⁶Obecně bychom se museli potýkat se závislostí na tlaku, teplotě a vlhkosti.

$\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, hustotu vody ρ zaokrouhlíme na $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Bude-li mít kulička rozměr $r = 10^{-5} \text{ m}$, dojde k vyrovnání odporové síly F_o a tíhové síly $F_g = mg$ při rychlosti¹⁷

$$v = \frac{mg}{6\pi r\eta} = \frac{2r^2 g \rho}{9\eta} \doteq 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Touto rychlostí by kapka dopadla na zem z výšky 10 km za čas

$$t = \frac{10 \text{ km}}{10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 10^6 \text{ s} \doteq 10 \text{ dní}.$$

Pokud by se jednalo o ještě menší kapky s rozměrem $r = 1 \mu\text{m}$, padaly by na zem stokrát déle, tedy zhruba 3 roky.

Jak jste si ale jistě během svých let na tomto světě všimli, mraky stále na zem nespady. Může za to opět vzduch – tentokrát ne čistě jeho přítomnost, ale jeho pohyb. Celá atmosféra je neustále v pohybu, a to jak v horizontálním, tak vertikálním. Především konvekce vzduchu (stoupání teplejších oblastí) zajišťuje, že mraky vznikající výparem vody z povrchu země vystupují do velkých výšek, kde postupně chladnou (adiabatické rozpínání) a jsou vytlačovány novými mraky s vyšší teplotou. Celá atmosféra je rozdělena do tzv. buněk, ve kterých vzduch, a tedy i mraky, cirkulují. Podrobnější informace naleznete například pod heslem „globální cirkulace atmosféry“. Pro nás je důležité, že rychlost tohoto pohybu se pohybuje v řádu jednotek až desítek¹⁸ $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, což je s rychlostí volného pádu vodních částic zcela nesrovnatelné.

Přece jen však nastává chvíle, kdy mrak v určitém smyslu spadne. Když se oblak stále více ochlazuje, tak se mikroskopické kapičky častěji srážejí (je jich více v dané prostorové oblasti) a spojují ve větší útvary, vzestupné proudy vzduchu je proto nedokáží tlačit vzhůru tak snadno jako jemnější částičky a mrak klesá. Větší kapičky ve velkém množství hůře propouštějí světlo a mraky se jeví jako šedé. Dosáhne-li poloměr kapek kritické velikosti, začnou se vzrůstající rychlostí nabírat stále více vlhkosti z okolí, dále rostou a nakonec rychlostí kolem $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dopadnou na zem,¹⁹ prší. V mracích se však nevyskytují pouze částičky vody, ale také částičky ledu, neboť teplota v horní atmosféře je hluboko pod bodem mrazu. V takovém případě pak padají kroupy, které jsou buďto malé a ještě před dopadem roztají,²⁰ nebo v mracích se silnými turbulencemi vydrží tak dlouho, dokud nenabudou velkých rozměrů a padají pak na zem ve formě ledových koulí, někdy s opravdu velkým průměrem.²¹

K závěru ještě připomeňme, že dokud se nezačnou v mraku formovat kapičky a jedná se tedy o směs vody a vzduchu v plynném stavu (vlhký vzduch), má tato směs menší hustotu než suchý vzduch. Vzduch se totiž skládá převážně z molekul dusíku a kyslíku, které mají větší hmotnost než molekula vody. To jen dále podporuje stoupání vlhkého vzduchu do horních vrstev atmosféry. Dojde-li však ke kondenzaci, vznikne aerosol a na něj již nelze aplikovat tvrzení platící pro plynné látky.

¹⁷Vypočtená velikost rychlosti nám také zaručuje, že jsme správně zvolili Stokesův vzorec, neboť s rostoucí rychlostí by se začala měnit závislost odporové síly na rychlosti samotné. Neuvažujeme zde, že se kapka pohybuje ze začátku zrychleně, neboť je to na časových škálách, se kterými pracujeme, zanedbatelné.

¹⁸https://www4.uwsp.edu/geo/faculty/lemke/geog101/lectures/05_pressure_wind.html

¹⁹<http://hypertextbook.com/facts/2007/EvanKaplan.shtml>

²⁰Občas i kapky vody nedopadnou na zem – vidíme tedy nad sebou déšť, ale nedopadá. Tento jev se nazývá *virga*. Dochází k němu vlastně neustále v těsné blízkosti mraků, neboť kapky, které jsou příliš malé, se odpaří velmi rychle a vracejí se okamžitě zpátky do mraku. Proto často mraky vypadají před deštěm a během něj tak „rozčuchané“.

²¹Kroupy obvykle vznikají v bouřkových mracích, kde vzestupné proudy mohou mít rychlost až přes $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, <https://en.wikipedia.org/wiki/Hail>. Za mírnějších podmínek vznikají sněhové vločky.

Suma sumárum tedy můžeme říct, že mraky na zem nepadnou díky zemské atmosféře a vůbec kvůli její přítomnosti vlastně existují. Nelze však vyloučit, že na nás z mraků občas spadne nějaký ten hydrometeor.

Komentáře k došlým řešením

Mraky z nebe nepadají a učení také ne, pokud se vám tedy něco nepovedlo dobře vysvětlit a nedostali jste plný počet bodů, nic si z toho nedělejte. Ve vašich řešeních se opakovaně vyskytovali některé více či méně závažné chyby.

Nemá dobrý smysl počítat vztakovou sílu působící na mrak, neboť mrak je heterogenní systém. Vztlak působící na jednotlivé kapičky je zanedbatelný, stačí porovnat hustoty vody a vzduchu. Odporovou sílu je pro malé kapičky (přesněji pro obtékání kapek vzduchem s malým Reynoldsovým číslem) potřeba počítat přes Stokesův vzorec, nikoli přes Newtonův $F_o = c_D S v^2 / 2$, výsledky se liší řádově. Nemalá část z vás zapomněla na vzestupné proudy, nebo naopak řešila pouze proudění a nezmínila sílu (odpor), kterým proudy vzduchu na kapičky působí. Napíšeme-li explicitně do zadání, že chceme výpočty, tak nemůžete čekat, že řešení bez jediné rovnice bude ohodnoceno plným počtem bodů – ale nemusíte zase přepisovat všechny vzorečky z Wikipedie.

Nakonec ještě podotkněme, že u problémové úlohy se vždy očekává, že ji pojmete široce, ačkoli zadání je stručné. Takže bavíme-li se zde o stabilitě mraků, je vhodné zmínit, jak vlastně mraky vznikly, že jsou velmi podobné mlze, že mohou „spadnout“ při dešti apod. Jakékoli relevantní informace jsou vždy vítány.

Miroslav Hanzelka

mirek@fykos.cz

Úloha I.E ... Pechschnitte

12 bodů; průměr 7,02; řešilo 56 studentů

Padá krajíc namazanou stranou dolů? Zkoumejte experimentálně tento Murphyho zákon s důrazem na statistiku! Záleží na rozměrech krajíce, složení a typu vrstvy? K experimentálním výsledkům hledejte teoretická zdůvodnění. Pro vaše měření použijte toastový chléb.

Terka má stůl ve špatné výšce.

Snad každý z nás už se nad tímto podivným tvrzením několikrát pozastavil a chtěl vědět, zda na tom opravdu něco je nebo je to jen mýtus. V této experimentální úloze padání chleba na namazanou stranu podrobíme důkladné fyzikální zkoušce a na závěr rozhodneme, zda je na tomto Murphyho zákoně něco pravdy.

Teorie

Tento experiment je díky velkému množství volných parametrů (například výška dopadu, způsob upuštění chleba, počáteční rotace chleba, tloušťka vrstvy namazání, rozměry krajíce atd.) velice komplikovaný. Abychom se do toho nezamotali, je nutné na začátku stanovit omezující podmínky, kterých bude hned několik. Budeme měřit četnost dopadu chleba na namazanou stranu jen v závislosti na následujících parametrech:

1. Rozměr krajíce.
2. Tloušťka namazané vrstvy.
3. Typ pomazánky.

4. Výška, ze které bude krajíc chleba padat.

5. Způsob upuštění chleba.

Jistě by mohl každý namítat, že svou roli bude hrát ještě velké množství jiných parametrů, ale vzhledem k rozsahu této úlohy závislost na ostatních parametrech zkoumat nebudeme (pokud to někdo ve své vzorovém řešení udělal, může získat bonusové body).

Teoretický popis pádu chleba je z hlediska fyziky velice komplikovaný (zejména z důvodu mnoha vstupních parametrů). Chleba bychom mohli při troše zjednodušení popsat jako nehomogenní kvádr a potom by bylo potřeba řešit pád tohoto nehomogenního kvádrů v homogenním gravitačním poli s vlivem odporu prostředí (včetně rotace při pádu) a ještě nějakým způsobem fyzikálně popsat dopad chleba na podložku. Přesný fyzikální popis tohoto procesu je příliš komplikovaný, proto se jím nebudeme dále zabývat. Tento experiment bude zaměřen na samotné měření a následné statistické zpracování naměřených hodnot.

Experiment

Dalším krokem je určení způsobu měření a popis měřící aparatury.

V našem experimentu budeme používat pouze čtvercový toustový chléb standardní velikosti. Při měření, zda strana dopadu závisí na velikosti chleba, budeme potom používat toustový chléb, který v každém ze dvou rozměrů (tloušťku ponecháme stejnou) rozpůlíme (tedy obsah bude čtvrtinový oproti původnímu stavu). Původní velikost krajíce toustového chleba budeme označovat jako „velká“ a zmenšenou velikost budeme označovat „malá“.

Tloušťku namazané vrstvy na krajíci chleba budeme měřit pomocí hmotnosti rovnoměrně rozetřené pomazánky na celém krajíci chleba. Před opakováním experimentu vždy převážním zajistíme, aby na chlebu bylo stejné množství pomazánky. Měření budeme provádět pro 2 různé vrstvy pomazánky na chlebu. Jako „malou“ vrstvu označíme případ, kdy na celý krajíc chleba namažeme 5 g pomazánky a jako „velkou“ vrstvu budeme označovat případ, kdy na celý krajíc chleba namažeme 15 g pomazánky. V případě „malé“ velikosti chleba bude tedy „malá“ vrstva pomazánky znamenat 1,25 g pomazánky a „velká“ vrstva pomazánky bude znamenat 3,75 g pomazánky.

V našem experimentu budeme zkoušet jen 2 typy pomazánky, a sice klasické máslo a lučinu.

Budeme pouštět chleba z různé výšky, abychom proměřili také závislost orientace chleba při dopadu na výšce, ze které byl chleba upuštěn. Nejvíce se zaměříme na výšku odpovídající výšce běžného kuchyňského stolu (80 cm), výšku, kde se nachází ústa běžně urostlého sedícího člověka (110 cm) a výšku, ve které má běžně urostlý stojící člověk ústa (150 cm). Tyto 3 výšky pracovně označíme jako „malá“, „střední“ a „velká“ výška. Právě z těchto třech výšek bude v praktickém životě namazaný chleba nejčastěji padat.

Důležitou věcí je správné popsání upouštění namazaného chleba a dodržování tohoto postupu při všech měřeních. V celém našem experimentu budeme namazaný chleba pomalu sunout přes hranu stolu (nebo jiné vodorovné plochy). Tímto se zajistí, že chleba nebude mít na počátku pádu žádnou (nebo jen zanedbatelnou) vodorovnou složku rychlosti ani žádnou rotaci. Orientace chleba budeme měnit a budeme měřit závislost na orientaci. Budeme zkoušet pouze 2 polohy. První poloha bude taková, že hrana chleba bude rovnoběžná s hranou desky (pracovně tuto polohu označíme jako „rovnoběžná“) a druhá poloha bude taková, že hrana desky a hrana chleba budou svírat úhel 45° (pracovně tuto polohu označíme jako „přes roh“).

Tab. 1: Naměřené četnosti dopadu chleba na namazanou a nenamazanou stranu v závislosti na zvolených parametrech (první polovina měření).

výška	vrstva	mazání	velikost	shazování	namaz. stranou	odhad psti.	směr. odch.
malá	malá	máslo	velká	rovnoběžné	10	1	–
malá	malá	máslo	velká	přes roh	10	1	–
střední	malá	máslo	velká	rovnoběžné	8	0,8	0,13
střední	malá	máslo	velká	přes roh	7	0,7	0,15
velká	malá	máslo	velká	rovnoběžné	0	0	–
velká	malá	máslo	velká	přes roh	0	0	–
malá	velká	máslo	velká	rovnoběžné	10	1	–
malá	velká	máslo	velká	přes roh	10	1	–
střední	velká	máslo	velká	rovnoběžné	5	0,5	0,17
střední	velká	máslo	velká	přes roh	5	0,5	0,17
velká	velká	máslo	velká	rovnoběžné	0	0	–
velká	velká	máslo	velká	přes roh	0	0	–
malá	malá	lučina	velká	rovnoběžné	10	1	–
malá	malá	lučina	velká	přes roh	10	1	–
střední	malá	lučina	velká	rovnoběžné	8	0,8	0,13
střední	malá	lučina	velká	přes roh	8	0,8	0,13
velká	malá	lučina	velká	rovnoběžné	0	0	–
velká	malá	lučina	velká	přes roh	0	0	–
malá	velká	lučina	velká	rovnoběžné	10	1	–
malá	velká	lučina	velká	přes roh	10	1	–
střední	velká	lučina	velká	rovnoběžné	5	0,5	0,17
střední	velká	lučina	velká	přes roh	6	0,6	0,16
velká	velká	lučina	velká	rovnoběžné	0	0	–
velká	velká	lučina	velká	přes roh	0	0	–

Měření

Pro jednotlivé konfigurace vstupních parametrů, jak jsou popsány výše, jsme provedli vždy 10 pokusů upuštění chleba. Jelikož pokus mohl dopadnout vždy jen dvěma způsoby, jimiž jsou pád na namazanou stranu nebo pád na nenamazanou stranu, není nutné uvádět výsledky jednotlivých pokusů, postačí pokaždé uvést počet pádů na namazanou stranu. Výsledky měření včetně odhadů pravděpodobnosti pádu chleba na namazanou stranu a její směrodatné odchylky můžeme vidět v tabulkách 1 a 2.

Diskuze

Z naměřených výsledků je vidět, že hlavním faktorem, který má vliv na dopad chleba, je výška, ze které chléb upustíme. Je to díky tomu, že chléb při pádu rotuje a výška upuštění rozhoduje o době trvání pádu a ta rozhoduje o počtu otáček (nebo půlotáček), které chléb při pádu

Tab. 2: Naměřené četnosti dopadu chleba na namazanou a nenamazanou stranu v závislosti na zvolených parametrech (druhá polovina měření).

výška	vrstva	mazání	velikost	shazování	namaz. stranou	odhad psti.	směr. odch.
malá	malá	máslo	malá	rovnoběžné	10	1	–
malá	malá	máslo	malá	přes roh	10	1	–
střední	malá	máslo	malá	rovnoběžné	7	0,7	0,15
střední	malá	máslo	malá	přes roh	6	0,6	0,16
velká	malá	máslo	malá	rovnoběžné	0	0	–
velká	malá	máslo	malá	přes roh	0	0	–
malá	velká	máslo	malá	rovnoběžné	10	1	–
malá	velká	máslo	malá	přes roh	10	1	–
střední	velká	máslo	malá	rovnoběžné	5	0,5	0,17
střední	velká	máslo	malá	přes roh	5	0,5	0,17
velká	velká	máslo	malá	rovnoběžné	0	0	–
velká	velká	máslo	malá	přes roh	0	0	–
malá	malá	lučina	malá	rovnoběžné	10	1	–
malá	malá	lučina	malá	přes roh	10	1	–
střední	malá	lučina	malá	rovnoběžné	7	0,7	0,15
střední	malá	lučina	malá	přes roh	6	0,6	0,16
velká	malá	lučina	malá	rovnoběžné	0	0	–
velká	malá	lučina	malá	přes roh	0	0	–
malá	velká	lučina	malá	rovnoběžné	10	1	–
malá	velká	lučina	malá	přes roh	10	1	–
střední	velká	lučina	malá	rovnoběžné	6	0,6	0,16
střední	velká	lučina	malá	přes roh	6	0,6	0,16
velká	velká	lučina	malá	rovnoběžné	0	0	–
velká	velká	lučina	malá	přes roh	0	0	–

vykoná. Rotaci chléb získá díky způsobu upouštění, kdy se převálí přes hranu stolu. Jediným dalším faktorem, který ovlivňoval četnost pádu chleba na namazanou stranu významněji než v rámci směrodatné odchylky, byla tloušťka namazané vrstvy (pouze v případě střední výšky upuštění), kdy se ukazuje, že chleba s velkou vrstvou pomazánky má menší četnost pádu na namazanou stranu než chleba s malou vrstvou pomazánky (tento efekt je ovšem pozorovatelný pouze u velké velikosti chleba, při použití malého chleba není tolik významný). Toto je pravděpodobně způsobeno tím, že chléb s větší vrstvou pomazánky při pádu rotuje rychleji, a proto je zde větší pravděpodobnost, že během pádu vykoná celou jednu otáčku, a dopadne tedy na nenamazanou stranu zatímco chléb s malou vrstvou pomazánky díky pomalejší rotaci pravděpodobně vykoná jen polovinu otáčky a dopadá tedy častěji na namazanou stranu. Vliv tohoto parametru je ale v porovnání s vlivem výšky upuštění chleba malý. Ostatní zkoumané parametry podle naměřených výsledků nemají na stranu dopadu chleba žádný statisticky významný vliv (všechny rozdíly v četnostech pádů na namazanou

stranu jsou v rámci statistické chyby a nemohou tedy být považovány za statisticky významné).

Na závěr musíme uvést, že naše naměřená data potvrzují doporučení kuchařského guru Ládi Hrušky, že pokud nechcete, aby vám při snídani spadl namazaný chléb namazanou stranou dolů, měli byste snídat buď na podlaze, nebo u stropu (zdroj: <https://www.youtube.com/watch?v=4r7SGcA2fLE>).

Michal Nožička
nozicka@fykos.cz

Úloha I.S ... náhodná

10 bodů; průměr 6,96; řešilo 47 studentů

- Zkuste vlastními slovy popsat, co je to náhodná veličina a jaké má vlastnosti (postačí vlastními slovy objasnit následující pojmy: náhodná veličina, rozdělení náhodné veličiny, realizace náhodné veličiny, střední hodnota, rozptyl, histogram).
- Vygenerujte grafy hustot pravděpodobnosti (případně pravděpodobností nabývání jednotlivých hodnot) všech v seriálu popsaných rozdělení náhodných veličin pro různé typy parametrů daného rozdělení a popište, jaký má změna parametru/ů vliv na tvar hustoty pravděpodobnosti (případně pravděpodobností nabývání jednotlivých hodnot).
- Vygenerujte z přiložených dat histogramy a pokuste se určit, ze kterého rozdělení tato data pocházejí.
- Definujte si náhodnou veličinu X jako výsledek hodu „férovou“ šestistěnnou kostkou (všechna čísla padají se stejnou pravděpodobností). Určete rozdělení náhodné veličiny X a dále spočítejte EX a $\text{var}X$.

Bonus Uveďte příklad dvou náhodných veličin, které mají stejnou střední hodnotu i stejný rozptyl, ale mají různá rozdělení.

Pro práci s daty a vykreslování grafů použijte výpočetní prostředí R . Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit přiložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka R . *Michal stanovil zadání úlohy náhodně, snad nebude moc těžká.*

- Detailní odpověď na tuto otázku dostanete přečtením 1. dílu seriálu, na tomto místě si vysvětlíme jen ty opravdu nejdůležitější pojmy. Náhodné veličiny se používají k matematickému modelování situací, u kterých nemůžeme dopředu s jistotou znát přesný výsledek. Náhodnou veličinu si můžeme představovat jako proměnnou, která ale nemá jednu pevnou hodnotu (ať už známou či neznámou), ale může nabývat (s různými pravděpodobnostmi) různých hodnot.

Rozdělení náhodné veličiny je potom to, čím je náhodná veličina určená (podobně jako je klasická proměnná určena svojí hodnotou). Rozdělení náhodné veličiny může být buď diskrétní (potom je toto rozdělení určeno pravděpodobnostmi nabývání jednotlivých hodnot), nebo spojité (potom je toto rozdělení určeno hustotou pravděpodobnosti).

Realizace náhodné veličiny je hodnota, kterou dostaneme v konkrétním případě, kdy budeme náhodnou veličinu měřit.

Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny představují jakýsi zjednodušený popis náhodné

veličiny (plný popis je právě rozdělení náhodné veličiny), jsou určeny následujícími vzorci

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k),$$

$$\text{var}X = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) (k - EX)^2,$$

pokud se jedná o diskrétní náhodnou veličinu, případně vzorci

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

$$\text{var}X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$$

v případě, že se jedná o spojitou náhodnou veličinu s hustotou f . Střední hodnota vyjadřuje, jakou hodnotu bychom měli v průměru očekávat při konkrétní realizaci náhodné veličiny a rozptyl vyjadřuje míru rozptýlenosti náhodné veličiny kolem její střední hodnoty.

Histogram je potom typ grafu, který vykresluje naměřená data (tedy realizace nějaké náhodné veličiny) a slouží k odhadování typu rozdělení, ze kterého naměřená data pocházejí.

- b) V seriálu byly uvedeny celkem čtyři nejčastěji se vyskytující rozdělení náhodných veličin (normální, exponenciální, Poissonovo a rovnoměrné rozdělení). Budeme postupně vykreslovat hustoty pravděpodobnosti (případně pravděpodobnosti nabývání jednotlivých hodnot) pro tato čtyři rozdělení.

Začneme normálním rozdělením, které, jak bylo uvedeno v seriálu, závisí na dvou parametrech $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení je dána vztahem

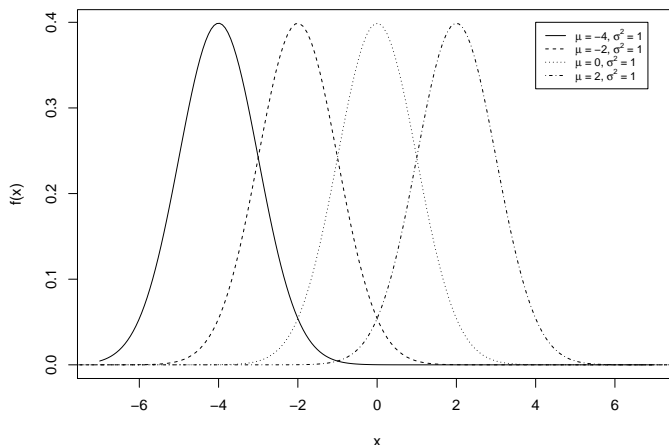
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

Grafy hustot normálního rozdělení pro různé hodnoty parametrů μ, σ^2 můžeme vidět na obrázcích 11 a 12. Jak je z těchto obrázků patrné, parametr μ ovlivňuje pouze posun po ose x a parametr σ^2 škáluje graf hustoty v horizontálním směru (laicky řečeno graf rozšiřuje nebo zužuje).

Další v seriálu uvedené rozdělení je exponenciální rozdělení, které závisí na jednom parametru $\lambda > 0$. Hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení je určena vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Grafy hustot exponenciálního rozdělení pro různé hodnoty parametru λ jsou vykresleny na obrázku 13. Jak je na obrázku vidět, tvar hustoty pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení zůstává stále stejný, parametr λ je zodpovědný pouze za škálování v horizontálním směru.

Obr. 11: Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení pro různé hodnoty parametru μ

Posledním v seriálu uvedeným spojitým rozdělením je rovnoměrné rozdělení, které závisí na dvou parametrech $-\infty < a < b < \infty$. Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení je určena vztahem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a, b) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

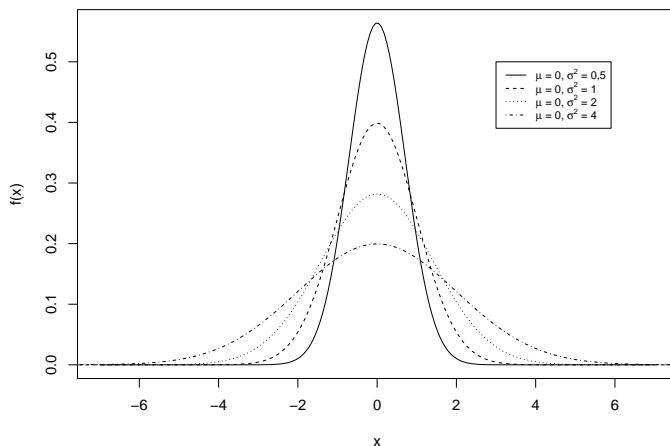
Grafy hustot rovnoměrného rozdělení pro různé hodnoty parametrů a, b si můžeme prohlédnout na obrázku 14. Jak je z obrázku vidět, hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení je nulová mimo interval (a, b) a na intervalu (a, b) nabývá takové konstantní hodnoty, aby platilo $P(a \leq X \leq b) = 1$.

Jediným v seriálu uvedeným diskrétním rozdělením je Poissonovo rozdělení, které je určeno jedním parametrem $\lambda > 0$. Pravděpodobnosti nabývání jednotlivých hodnot jsou určeny vztahem

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

Grafy pravděpodobností nabývání jednotlivých hodnot pro různé hodnoty parametru můžeme vidět na obrázku 15. Opět je vidět, že se tvar závislosti pravděpodobností nabývání jednotlivých hodnot při změně parametru λ nemění, ale pouze škáluje v horizontálním směru.

- c) Vygenerované histogramy můžeme vidět na obrázcích 16, 17, 18 a 19. Z těchto obrázků lze odhadovat, že první vzorek dat pochází z rovnoměrného rozdělení, druhý vzorek z Poissonova rozdělení, třetí vzorek z normálního rozdělení a čtvrtý vzorek z exponenciálního rozdělení. Je nutno poznamenat, že toto jsou pouze odhady, nelze to chápat jako rigorózní matematický postup určování typu rozdělení.



Obr. 12: Graf hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení pro různé hodnoty parametru σ^2

- d) Takováto náhodná veličina může nabývat jen konečně mnoha hodnot (jen hodnot 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6), proto se bude jednat o diskrétní náhodnou veličinu. Rozdělení náhodné veličiny X tedy bude určeno výčtem pravděpodobností nabývání těchto jednotlivých hodnot, jelikož podle zadání budou všechny výsledky hodu touto kostkou stejně pravděpodobné, musí platit

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, P(X = 2) = \frac{1}{6}, \dots, P(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

Toto je rozdělení náhodné veličiny X .

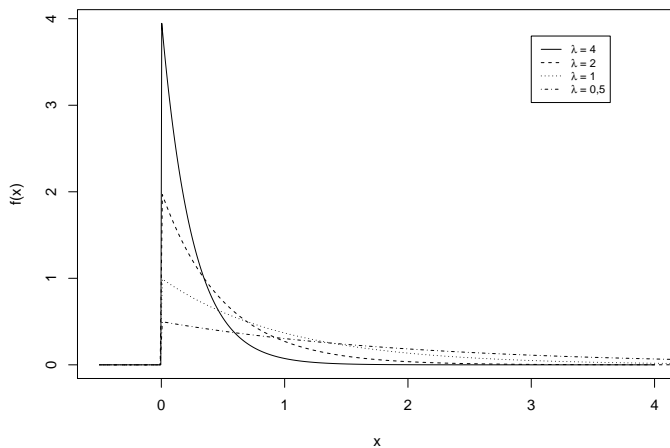
Pro výpočet střední hodnoty a rozptylu pouze dosadíme do vzorců uvedených výše. Dostáváme, že střední hodnota X je rovna

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5.$$

Když nyní známe střední hodnotu náhodné veličiny X , můžeme spočítat i její rozptyl, který je roven

$$\text{var}X = (1 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}.$$

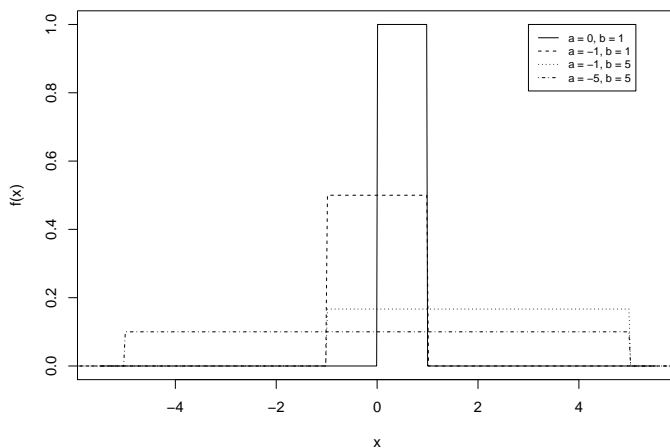
Bonus: Tento úkol je velice jednoduchý, stačí ze seznamu nejčastěji se vyskytujícími rozdělení náhodných veličin vybrat dvě vhodná rozdělení (různá) a vhodně navolit jejich parametry tak, aby se jejich střední hodnoty a rozptyly rovnaly. Jako příklad můžeme uvést náhodné veličiny X a Y , kde X bude mít exponenciální rozdělení $Exp(2)$ a náhodná veličina Y bude mít rozdělení $N(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Pomocí vzorců uvedených v seriálu si každý může ověřit, že střední hodnota obou těchto náhodných veličin jsou rovny $\frac{1}{2}$ a rozptyl obou těchto náhodných veličin



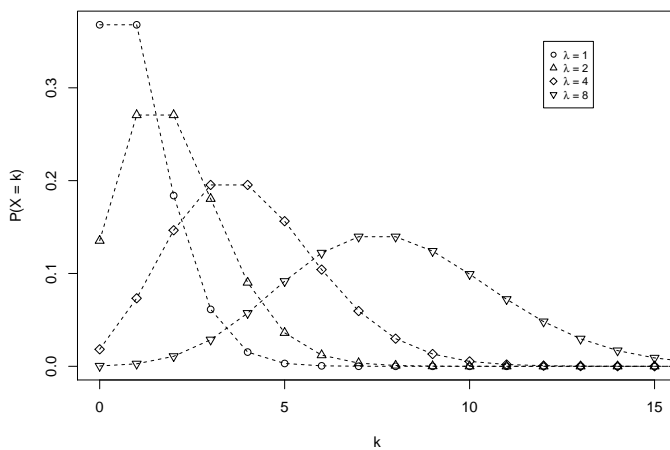
Obr. 13: Graf hustoty pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení pro různé hodnoty parametru λ .

je roven $\frac{1}{4}$. Takovýchto příkladů lze samozřejmě vymyslet mnoho, pro udělení bonusových bodů stačí uvést jeden.

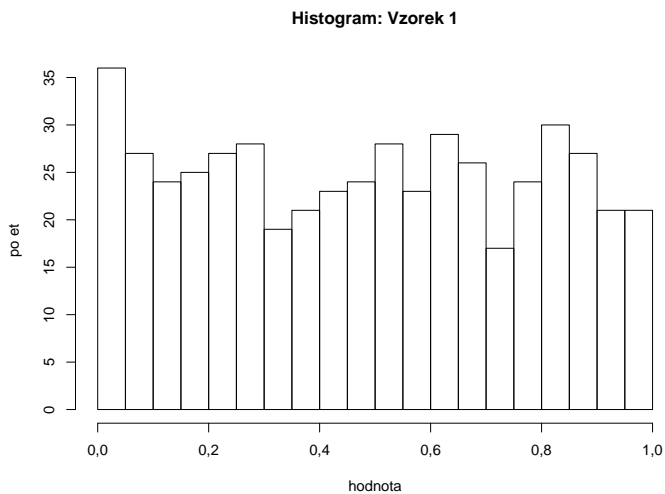
Michal Nožička
nozicka@fykos.cz



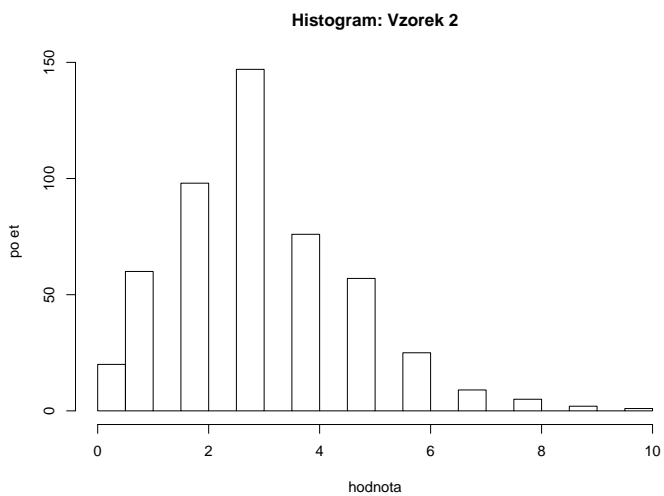
Obr. 14: Grafy hustot pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení pro různé hodnoty parametrů a, b .



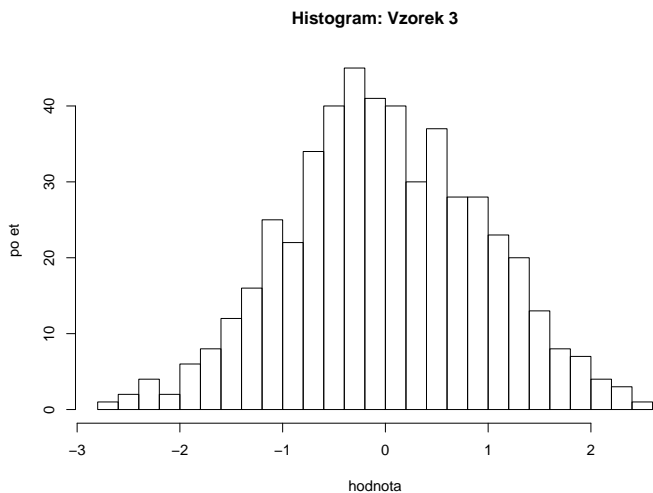
Obr. 15: Pravděpodobnosti nabývání jednotlivých hodnot Poissonova rozdělení pro různé hodnoty parametru λ .



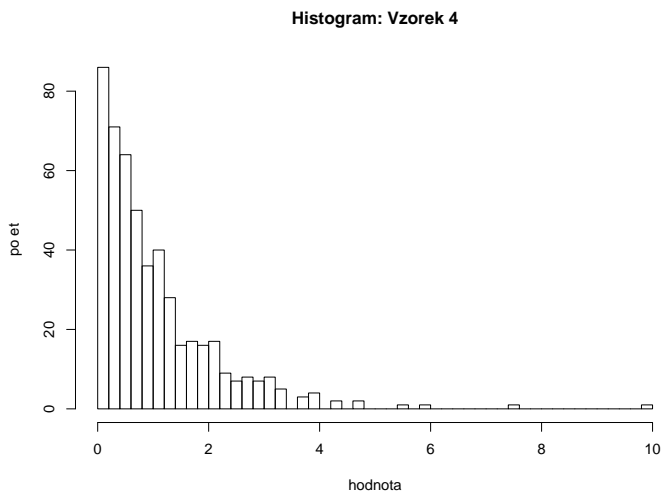
Obr. 16: Histogram prvního vzorku dat.



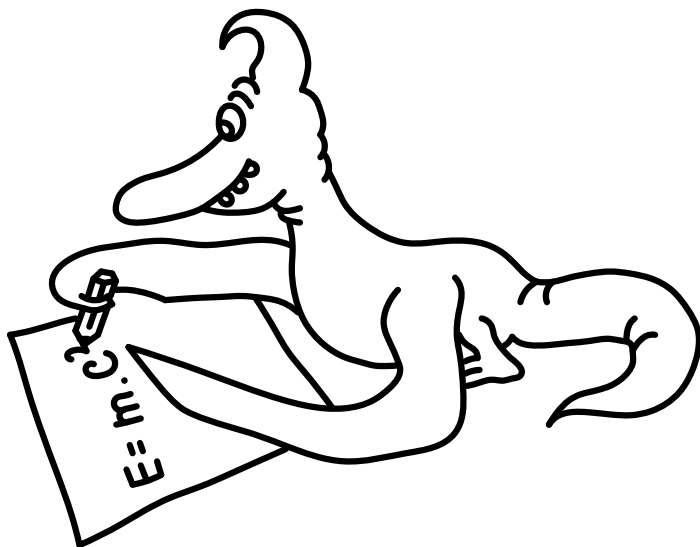
Obr. 17: Histogram druhého vzorku dat.

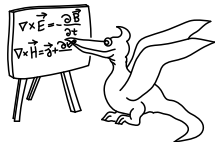


Obr. 18: Histogram třetího vzorku dat.



Obr. 19: Histogram čtvrtého vzorku dat.





Seriál: Zpracování dat fyzikálních měření

V minulém díle seriálu jsme se seznámili s tím, co je to náhodná veličina, hustota pravděpodobnosti a jak se dá v některých případech odhadnout typ rozdělení náhodné veličiny z naměřených dat pomocí histogramu. V tomto díle se zaměříme na odhadování střední hodnoty a rozptylu z naměřených dat.

Proč je dobré z naměřených dat odhadovat střední hodnotu, případně rozptýl náhodné veličiny, ze které naměřená data pocházejí? Odpověď je jednoduchá: protože to je přesně to, o co fyzikové při experimentu především jde. Toto potřebuje trochu hlubší vysvětlení.

Fyzikální interpretace

V tomto odstavci uvedeme základní matematický model, který se při fyzikálních měřeních používá. Představme si, že měříme nějakou fyzikální veličinu (např. dobu kyvu kyvadla) a pro různá měření dostaneme různé hodnoty měřené fyzikální veličiny (v našem příkladě různé hodnoty naměřeného času). Jak toto interpretovat?

Je to naprosto jednoduché, v základním modelu uvažujeme, že ona fyzikální veličina, kterou měříme, je po celou dobu neměnná a při použití dokonalých měřicích přístrojů a dokonalého postupu měření bychom vždy naměřili právě tuto jednu neměnnou hodnotu. Vlivem různých nepřesností (nedokonalý měřicí přístroj, nedokonalá měřicí aparatura, vnější vlivy prostředí, lidský faktor atd.), ale tohoto nejsme schopni dosáhnout a při každém měření naměříme trochu odlišnou hodnotu. V základním modelu můžeme považovat výsledek měření za náhodnou veličinu (protože dopředu nevíme, jakou hodnotu naměříme, podobně jako u hodu kostkou). Při následném statistickém zpracování naměřených dat se potom snažíme pomocí naměřených dat (tedy vlastně realizací náhodné veličiny) zjistit co nejvíce informací o skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny.

Uděláme další důležitý předpoklad o tom, jaké mohou být ty vlivy, které způsobují, že nejsme schopni měřenou fyzikální veličinu měřit přesně. V našem základním modelu budeme uvažovat, že neexistuje žádný systematický posun naměřených hodnot oproti skutečné hodnotě. Jinými slovy měříme sice nepřesné hodnoty, ale tyto hodnoty nejsou systematicky větší nebo menší než skutečná hodnota, kterou chceme měřit. V našem příkladu při měření doby kyvu kyvadla může uvažovat poruchy okolního vzduchu, které způsobí nepřesnosti měření, ale budeme předpokládat, že nefouká vítr jedním směrem ale všemi směry přibližně stejně. Podobně pro ostatní zdroje nepřesností. Je potom odpovědností experimentátora, aby zajistil platnost tohoto předpokladu při samotném měření (pokud toho experimentátor není schopen dosáhnout, což se někdy stává, je potřeba tyto nepřesnosti řešit zvlášť, o tom více na konci tohoto dílu seriálu). Díky tomuto předpokladu můžeme tvrdit, že hodnota fyzikální veličiny, kterou chceme naměřit, se rovná střední hodnotě náhodné veličiny představující výsledek jednoho měření. Jediný problém je, že tuto střední hodnotu neznáme, budeme ji tedy muset odhadovat z naměřených dat. Už dopředu se musíme připravit na to, že z naměřených dat nikdy nebudeme schopni přesně zjistit hodnotu měřené fyzikální veličiny.

Pokud si vzpomeneme, jaký význam má rozptyl náhodné veličiny (míra rozptýlenosti okolo střední hodnoty), uvědomíme si, že rozptyl náhodné veličiny představující výsledek jednoho měření vlastně vypovídá o přesnosti našeho měření (o tom jak moc jsou naměřené hodnoty rozptýleny kolem skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny).

Další předpoklad, který si zavedeme je, že jednotlivá měření jsou na sobě nezávislá. Intuitivní představa, co to znamená, je, že výsledek jednoho měření nijak neovlivní výsledky ostatních měření. Experimentátor opět musí zajistit, že tento předpoklad bude splněn.

Odhadování parametrů normálního rozdělení z naměřených dat

V tomto díle seriálu se budeme zabývat pouze případem, kdy náhodná veličina představující výsledek jednoho měření má normální rozdělení. Tento předpoklad je téměř vždy splněn, normální rozdělení se vyskytuje opravdu téměř všude. Jak postupovat v případě, že je tento předpoklad porušen, si rozebereme v příštím díle seriálu.

Na tomto místě jen v rychlosti připomeneme, že normální rozdělení, které značíme $N(\mu, \sigma^2)$, je spojité rozdělení určené dvěma parametry μ , σ^2 , jeho hustota má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dále platí, že střední hodnota tohoto rozdělení je rovna μ a rozptyl tohoto rozdělení je roven σ^2 . Často se navíc definuje ještě tzv. směrodatná odchyłka jako odmocnina z rozptylu, tedy v případě normálního rozdělení platí, že směrodatná odchyłka je rovna σ .

Naším cílem bude z naměřených dat odhadovat skutečné hodnoty střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchyšky. Jak už bylo uvedeno dříve, musíme se smířit s faktem, že nikdy nemůžeme tyto hodnoty z naměřených dat odhadnout přesně (o tom více později). Ve zbytku seriálu budeme skutečné (při měření neznámé) hodnoty značit řeckými písmeny μ , σ , σ^2 a z naměřených dat odhadnuté hodnoty budeme značit stejnými písmeny se stříškou a dolním indexem uvádějícím z kolika měření jsme tuto hodnotu odhadli (tedy $\widehat{\mu}_n$, $\widehat{\sigma}_n$, $\widehat{\sigma}_n^2$). Odhadnuté hodnoty budeme nazývat jako výběrová střední hodnota, výběrová směrodatná odchyłka a výběrový rozptyl.

Odhad střední hodnoty

Uvažujme, že máme k dispozici výsledky našeho měření x_1, \dots, x_n , o kterých budeme předpokládat, že jsou vzájemně nezávislé a že pocházejí z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámými parametry. Odhadem střední hodnoty bude výběrová střední hodnota definovaná jako

$$\widehat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

kde výraz na pravé straně často zkráceně zapisujeme jen jako $\overline{x_n}$.

Nyní se zaměříme na analýzu vlastností výběrového průměru. Musíme si uvědomit, že jednotlivá měření jsou náhodné veličiny (není dopředu známe, jakým výsledkem dopadnou – jakou hodnotu naměříme) a v důsledku toho je i výběrová střední hodnota náhodná veličina (také není dopředu známé, jaké číslo nám vyjde). Při analýze vlastností výběrové střední hodnoty

nás bude zajímat zejména její rozdělení. Na výběrovou střední hodnotu se můžeme dívat jako na součet n nezávislých náhodných veličin vydělených číslem n . Nyní si musíme odvodit, jaké bude rozdělení součtu dvou nezávislých náhodných veličin. (Poznamenejme, že zde je velice důležité, že náhodné veličiny jsou opravdu nezávislé, jinak by následující odvození nebylo správné.)

Nechť máme náhodnou veličinu X se známým rozdělením a druhou náhodnou veličinu Y se známým rozdělením a tyto dvě náhodné veličiny jsou nezávislé. Nyní nás zajímá, jaké bude rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$. Uvažujme nejprve jednodušší případ, kdy mají obě náhodné veličiny diskrétní rozdělení. Například X představuje výsledek hodu kostkou a Y představuje výsledek hodu jinou kostkou a nás zajímá, jaké má rozdělení součet hodů na obou kostkách, tedy náhodná veličina $Z = X + Y$. V tomto jednoduchém případě stačí rozepsat si pravděpodobnosti, že nastanou všechny možné dvojice výsledků a sečíst pravděpodobnosti těch dvojic, které vedou na stejný součet, a toto bude pravděpodobnost, že náhodná veličina $X + Y$ nabyde právě této hodnoty. Matematicky zapsáno

$$P(Z = k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n, Y = k - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n)P(Y = k - n),$$

kde v prostředním výrazu $P(X = n, Y = k - n)$ značí pravděpodobnost, že nastanou oba případy zároveň (tedy že bude platit $X = n$ a zároveň $Y = k - n$). Tento výraz lze rozepsat na součin dvou dílčích pravděpodobností díky nezávislosti náhodných veličin X a Y . Výraz na pravé straně si potom lze představovat jako součet pravděpodobností těch případů, kdy je součet náhodných veličin X a Y roven k (to nastane právě tehdy, když bude pro nějaké n bude platit $X = n$ a zároveň $Y = k - n$).

Ač tento vzorec vypadá složitě, je dobré si uvědomit, že je vlastně triviální. V našem příkladě se součtem hodů na dvou kostkách je dosažení do tohoto vzorce velmi jednoduché, neboť pro n neležící v množině $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ platí $P(X = n) = 0$ a také víme, že za k má smysl dosazovat jen čísla z množiny $\{2, \dots, 12\}$, neboť jiných hodnot nemůže náhodná veličina Z nabývat. Když si dosadíme opravdu vyjde správný výsledek.

Pro případ, že X a Y jsou spojitě náhodné veličiny s hustotami f a g , platí obdoba předchozího vzorce, jen je potřeba nahradit sumy pomocí integrálů²². Bude tedy platit

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z - x)dx,$$

kde h bude hustota náhodné veličiny Z . Těto operaci se říká konvoluce funkcí f a g a značí se $f \star g$.

Je důležité vědět, že součet dvou nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením (řekněme X s rozdělením $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a Y s rozdělením $N(\mu_2, \sigma_2^2)$) má opět normální rozdělení s parametry, které se rovnají součtu původních parametrů (tedy $Z = X + Y$ má rozdělení $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$). Tento fakt plyne z pouhého dosazení do vzorce na konvoluci. Zdatnější čtenáři si mohou platnost tohoto faktu sami ověřit výpočtem, méně zdatní čtenáři mohou pro ověření tohoto faktu využít nějaký matematický software nebo tomu prostě věřit.

²²Pokud nevíte, co je to integrál, nezoufejte. Stačí pouze přijmout několik zde uvedených faktů, pro pochopení vykládané látky není nutné znát dokonale integrální počet.

Další důležitá věc je uvědomit si, co se stane s rozdělením náhodné veličiny, pokud tuto veličinu vynásobíme konstantou. Ze vzorců na střední hodnotu a rozptyl (viz minulý díl seriálu) ihned plynou následující vztahy (zdatnější čtenáři si opět mohou tento fakt ověřit výpočtem)

$$\begin{aligned} E(aX) &= aE(X), \\ \text{var}(aX) &= a^2\text{var}(X). \end{aligned}$$

Jako poslední si musíme rozmyslet, že pokud náhodnou veličinu s normálním rozdělením vynásobíme konstantou, její rozdělení bude opět normální (samozřejmě s jinými parametry). Toto není úplně jednoduché. Intuitivní představa může být taková, že po vynásobení náhodné veličiny s normálním rozdělením konstantou se pouze natáhne (nebo smrskne) funkce hustoty, ale zůstane zachován typ rozdělení.

Potom, co jsme si uvedli těchto pár tvrzení, můžeme jejich jednoduchým zkombinováním dostat důsledek, že za předpokladu, že naše naměřená data pocházejí z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, má výběrová střední hodnota normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2/n)$. Nyní si musíme uvědomit, co to vlastně znamená. S větším počtem naměřených dat (tedy s větším n) se výběrové střední hodnotě snižuje rozptyl, ale střední hodnota zůstává pořád stejná a to sice ta, kterou mají také jednotlivé náhodné veličiny (tedy vlastně hodnota měřené fyzikální veličiny). To znamená, že pro velký počet měření bude výběrová střední hodnota s největší pravděpodobností čím dál blíže ke střední hodnotě, kterou chceme odhadovat (důsledek toho, že rozptyl výběrové střední hodnoty bude čím dál menší, tedy výběrová střední hodnota bude čím dál méně rozptýlena okolo své střední hodnoty μ).

Na závěr tohoto odstavce jen uvedme, že výběrová střední hodnota se někdy také označuje jako výběrový průměr, ale v tomto seriálu se budeme držet označení výběrová střední hodnota.

Odhad rozptylu

Podobně jako výběrová střední hodnota odhaduje střední hodnotu budeme odhadovat rozptyl pomocí výběrového rozptylu. Výběrový rozptyl je definovaný jako²³

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2.$$

Ve fyzice se také často potkáme s výběrovou směrodatnou odchylkou

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2},$$

která odhaduje směrodatnou odchylku.

Je důležité si uvědomit, že výběrový průměr i výběrová směrodatná odchylka jsou opět náhodné veličiny (dopředu neznáme jejich hodnotu). Podobně jako u výběrové střední hodnoty by se dalo ukázat, že výběrový rozptyl (resp. výběrová směrodatná odchylka) má takové rozdělení, že pro velký počet měření je jeho hodnota s největší pravděpodobností čím dál bližší

²³Na první pohled se může zdát trochu divné, proč dělíme číslem $(n-1)$ a nikoliv číslem n . Je to z toho důvodu, aby tento odhad byl nestranný (tzn. aby střední hodnota výběrového rozptylu – opět připomínáme, že výběrový rozptyl je náhodná veličina – byla rovna skutečnému rozptylu). Pokud bychom dělili pouze číslem n , tento odhad by nebyl nestranný.

skutečnému rozptylu (resp. skutečné směrodatné odchylce). Ukázat tuto vlastnost už je ovšem v tomto případě o dost složitější, proto to na tomto místě dělat nebudeme, pouze to uvedeme jako fakt.

Interval spolehlivosti

Nyní jsme si popsali, jak z naměřených dat odhadovat střední hodnotu (o tu nám ve fyzikální aplikaci jde především) a rozptyl náhodné veličiny, ze které naměřená data pocházejí. Odvodili jsme si, že naše odhady (výběrová střední hodnota, výběrová směrodatná odchylka a výběrový rozptyl) mají tu vlastnost, že pro velký počet měření jsou čím dál přesnější (tj. jsou s největší pravděpodobností čím dál blíže skutečným hodnotám střední hodnoty, resp. směrodatné odchylky, resp. rozptylu). Je sice hezké, že víme, že pro velký počet měření bude náš odhad velmi přesný, ale v praxi obvykle nemáme moc měření (velký počet může znamenat třeba 1 000 měření nebo i více).

Pokud chceme odhadovat střední hodnotu z relativně malého počtu měření (tato situace nastane prakticky u každého fyzikálního experimentu) budeme postupovat tak, že zkonstruujeme interval spolehlivosti, který nám bude říkat, v jakém intervalu se s největší pravděpodobností nachází skutečná hodnota střední hodnoty.

Vydeme z toho, že si určíme, jaké rozdělení má následující transformace našich naměřených dat (opět si uvědomme, že se jedná o náhodnou veličinu, neboť dopředu neznáme její hodnotu)

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n},$$

kde μ je skutečná (ale pro nás neznámá) hodnota střední hodnoty rozdělení, ze kterého pochází naměřená data (připomínáme předpoklad, že se jedná o normální rozdělení) a n je počet naměřených dat. Bez důkazu na tomto místě uvedeme, že rozdělení takovéto náhodné veličiny je tzv. Studentovo rozdělení o $n - 1$ stupních volnosti (značíme t_{n-1}). Studentovo rozdělení má poměrně složitou hustotu, jejíž přesný předpis je zde zbytečné uvádět (zájemci si mohou tuto hustotu vykreslit v matematickém softwaru). Je dobré si povšimnout, že pro velké n je studentovo rozdělení o n stupních volnosti čím dál více podobné rozdělení $N(0, 1)$ (tohoto faktu budeme později využívat). Další důležitou vlastností hustoty studentova rozdělení je, že je symetrické okolo nuly.

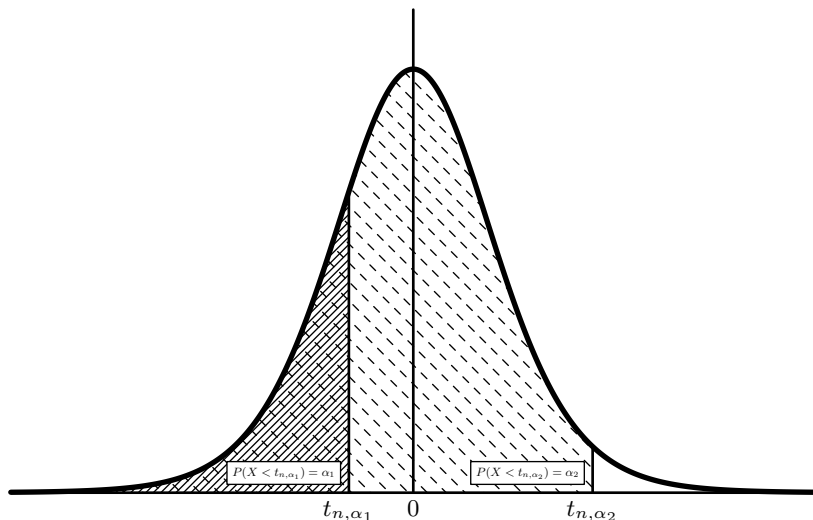
Když nyní víme, že naše transformovaná data mají Studentovo rozdělení o $n - 1$ stupních volnosti, můžeme si pro toto rozdělení určit tzv. kvantily. Pokud si zvolíme číslo α z intervalu $(0, 1)$, potom α -kvantilem Studentova rozdělení o n stupních volnosti (značíme ho $t_{n,\alpha}$) bude takové číslo, které splňuje podmínku, že pravděpodobnost, že naše náhodná veličina řídící se rozdělením t_n bude menší než $t_{n,\alpha}$, bude rovna α . Matematicky zapsáno

$$P(X < t_{n,\alpha}) = \alpha.$$

Dobře je význam toho, co znamená kvantil, vidět z obrázku 20.

Na tomto místě poznamenejme, že přesné hodnoty kvantilů Studentova rozdělení (pro různé kombinace parametrů n a α) lze najít v každých lepších matematických tabulkách nebo na internetu.

Celý postup konstrukce intervalového odhadu pro střední hodnotu bude následující. Nejprve si zvolíme tzv. hladinu spolehlivosti, která musí ležet v intervalu $(0, 1)$. Následně určíme takové



Obr. 20: Grafický význam kvantilů spojitě náhodné veličiny.

číslo $\alpha \in (0, 1)$, aby naše hladina spolehlivosti byla rovna $1 - \alpha$. Naším cílem bude zkonstruovat interval s vlastností, že pravděpodobnost pokrytí skutečné střední hodnoty intervalem spolehlivosti bude právě $1 - \alpha$. Tedy α lze interpretovat jako pravděpodobnost omylu.

Samotný interval spolehlivosti budeme konstruovat následujícím způsobem. Díky znalosti rozdělení našich transformovaných dat a vlastností kvantilů Studentova t_{n-1} rozdělení musí platit

$$P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Nyní už jenom ekvivalentními úpravami upravujeme nerovnosti uvnitř pravděpodobnosti:²⁴

²⁴Uvědomme si, že takto opravdu lze postupovat, neboť pokud neměníme množinu řešení dvojice nerovností uvnitř pravděpodobnosti (což ekvivalentními úpravami neměníme), nemění se ani hodnota samotné pravděpodobnosti.

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}\right) = \\
&= P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \bar{x}_n - \mu < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{x}_n < -\mu < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{x}_n\right) = \\
&= P\left(\bar{x}_n - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(\bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(\bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Všechny úpravy byly víceméně triviální, úprava mezi 4. a 5. řádkem spočívala v nahrazení kvantilu $t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$ pomocí kvantilu $-t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}$, což lze udělat díky symetrii hustoty Studentova rozdělení (rozmyslete si sami).

Nyní si musíme uvědomit, co jsme vlastně dostali.

$$1 - \alpha = P\left(\bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right).$$

Tento výraz vlastně říká, že pravděpodobnost, že interval

$$\left(\bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$$

pokrývá skutečnou střední hodnotu náhodné veličiny, ze které pocházejí naměřená data (tedy vlastně měřenou fyzikální veličinu), je přesně $1 - \alpha$. Toto je interval spolehlivosti (někdy se také říká intervalový odhad) pro měřenou fyzikální veličinu.

Tento interval se někdy zkráceně zapisuje jako

$$\bar{x}_n \pm t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Protože fyzikové mají rádi co nejkratší zápisy a i tento zápis jim přijde moc dlouhý, většinou píšou jen

$$\bar{x}_n \pm \frac{S_n}{\sqrt{n}},$$

tedy vynechají v intervalovém odhadu hodnotu kvantilu $t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}$, takže to už není zápis intervalového odhadu v obecném tvaru, ale velice snadným způsobem (jen doplněním příslušného kvantilu Studentova rozdělení) ho lze zpětně zrekonstruovat.

Hodnota $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ se často označuje pouze s_n a říká se jí výběrová směrodatná odchylka průměru (protože odhaduje směrodatnou odchylku výběrového průměru). Toto je to, co se u fyzikálního

experimentu vyžaduje, tedy spočítat hodnotu výběrové střední hodnoty \bar{x}_n a hodnotu výběrové směrodatné odchylky průměru s_n . Výsledek se zapíše ve tvaru

$$\bar{x}_n \pm s_n$$

a jednoduchým doplněním hodnoty příslušného kvantilu se z tohoto zápisu nechá vyrobit intervalový odhad pro měřenou fyzikální veličinu.

Výběrová směrodatná odchylka průměru se používá jako měřítko toho, jak přesně jsme fyzikální veličinu změřili, neboť udává, jak široké budou příslušné intervaly spolehlivosti. Při fyzikálních experimentech se vždy požaduje, aby byla hodnota výběrové směrodatné odchylky průměru co možná nejmenší. Někdy se také o výběrové směrodatné odchylce průměru mluví jako o nejistotě měření typu A.

Názvosloví a typy nejistot

Nyní už máme zcela popsáný základní model statistického zpracování naměřených dat a nakonec si ho zasadíme do širšího kontextu. Obecně se definují 2 typy nejistot měření a sice nejistota typu A a nejistota typu B.

Nejistota typu A je nejistota určení měřené fyzikální veličiny, která pramení z náhodnosti naměřených dat. Tuto nejistotu získáme statistickým zpracováním dat, o tom se psalo na předchozích 7–8 stránkách a umíme se s tím vypořádat.

Nejistota typu B je nejistota určení měřené fyzikální veličiny, která pramení z jiných důvodů než nejistota typu A. Zejména se jedná o nějaký systematický posun měřených hodnot vůči skutečné hodnotě (o tomto se psalo na začátku tohoto dílu seriálu v odstavci *Fyzikální interpretace*). S nejistotou typu B se vypořádáme tak, že ji buď připočteme k nejistotě typu A (to se dělá hlavně v případech nejistoty vyplývající z nepřesnosti měřidla²⁵) nebo ji pouze zmíníme v diskuzi (to se dělá ve většině ostatních případů).

Pro připočítání nejistoty typu B k nejistotě typu A se používá vzorec

$$s_K = \sqrt{s_A^2 + s_B^2},$$

kde s_A je nejistota typu A a s_B je nejistota typu B. Dále se pracuje s kombinovanou nejistotou s_K stejně jako jsme předtím pracovali s nejistotou typu A. Ve všech intervalových odhadech (i ve finálním zápisu naměřených hodnot) tedy musíme místo hodnoty s_n uvádět hodnotu s_K , čímž tyto intervalové odhady rozšíříme, abychom vzali v úvahu také ostatní zdroje nepřesností. Kombinovaná nejistota měření tedy vyjadřuje, jak přesně jsme fyzikální veličinu určili. Ve fyzikálních experimentech je cílem dosáhnout co možná nejmenší kombinované nejistoty měření (tj. určit měřenou fyzikální veličinu co možná nejpřesněji).

Na závěr tohoto odstavce uvedeme, že jsme v textu seriálu záměrně používali pouze slovo nejistota a vyhýbali jsme se použití slova chyba. Na tomto místě objasníme proč. Chyba měření je definována jako absolutní hodnota rozdílu odhadnuté hodnoty a skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny, tedy jako

$$e = |\bar{x}_n - \mu|.$$

²⁵Nepřesnost měřidla bývá často uvedena na použitím měřidlu a její význam je takový, že měřidlo může způsobovat systematický posun zobrazovaných hodnot vůči skutečným hodnotám až do uvedené míry. Pokud není na měřidle nic uvedeno, uvažuje se za nepřesnost měřidla obvykle polovina nejmenšího dílku na stupnici, na které měřidlo zobrazuje hodnoty.

Chyba měření vyjadřuje o kolik se námi odhadnutá hodnota měřené fyzikální veličiny (tedy \bar{x}_n) liší od její skutečné hodnoty (tedy μ). Je ale naprosto nutné si uvědomit, že chybu měření v praxi nikdy znát nebudeme (k tomu bychom totiž potřebovali znát skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny). Naneštěstí se ale často můžeme potkat s tím, že se význam slov nejistota a chyba zaměňuje nebo se považují za ekvivalentní označení. V tomto textu seriálu se ale budeme držet správného značení a stejně to dělejte i vy při řešení úloh.

Důležité poznámky na závěr

Na závěr tohoto dílu seriálu uvedeme několik důležitých poznámek k odhadům měřené fyzikální veličiny za předpokladu normálního rozdělení náhodné veličiny popisující výsledek jednoho měření.

1. V tomto dílu seriálu se vyskytlo značné množství nových pojmů, z nichž některé mají velmi podobná označení. Pro správné pochopení této problematiky je ale nutné mezi těmito pojmy důsledně rozlišovat (např. chyba vs. nejistota, střední hodnota vs. výběrová střední hodnota atd.). Proto bychom na tomto místě chtěli upozornit, abyste v řešení seriálové úlohy (a ve všech budoucích zpracováních experimentů) věnovali zvláštní pozornost jazykovým formulacím, které mohou způsobovat zbytečná nedorozumění.
2. Je naprosto nutné pochopit účel intervalu spolehlivosti a jeho vztah k odhadům parametrů μ a σ^2 . Účelem odhadů parametrů je odhadnout z naměřených dat skutečnou hodnotu střední hodnoty (případně rozptylu nebo směrodatné odchytky) a je proto sám náhodnou veličinou. Tato náhodná veličina má tu vlastnost, že při velkém počtu pozorování bude její hodnota s velkou pravděpodobností velmi blízká skutečné hodnotě střední hodnoty (resp. rozptylu nebo směrodatné odchytky). Pro opravdu velký počet měření je takovýto odhad dostačující. V praxi ovšem skoro nikdy nemáme velký počet měření, proto konstruujeme intervalové odhady. Intervalový odhad je vlastně množina (interval), kde bude s určitou předem libovolně zvolenou pravděpodobností (s pravděpodobností $1 - \alpha$) skutečná hodnota střední hodnoty ležet.
3. Fyzikové s oblibou říkávají následující:
„Pravděpodobnost, že skutečná hodnota měřené veličiny leží v intervalu

$$\bar{x}_n \pm t_{n, 1 - \frac{\alpha}{2}} s_K,$$

je $1 - \alpha$.“ Toto je v podstatě pravdivé tvrzení, ale je poněkud nešťastně a zmatečně formulované. Je nutné si uvědomit, že skutečná hodnota měřené fyzikální veličiny je deterministická (není náhodná), jenom ji většinou neznáme. To, co je náhodné, jsou meze intervalu spolehlivosti (vzpomeňte si, že \bar{x}_n a s_n jsou náhodné veličiny). Lepší formulace je proto následující: „Pravděpodobnost, že interval spolehlivosti pokrývá skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny, je $1 - \alpha$.“ V tomto seriálu se budeme držet této přesnější formulace, stejně to dělejte i vy v řešení úloh.

4. Všimněme si, co ovlivňuje podobu (zejména šířku) intervalu spolehlivosti. Výběrový průměr \bar{x}_n odhaduje střední hodnotu a výběrový rozptyl S_n odhaduje rozptyl. Obě tyto náhodné veličiny budou při velkém počtu pozorování velice pravděpodobně nabývat pouze hodnot blízkých skutečným hodnotám střední hodnoty, resp. rozptylu. Jediné, co potom bude ovlivňovat šířku našeho intervalu spolehlivosti (tedy vlastně přesnost, se kterou jsme požadovanou fyzikální veličinu naměřili), bude člen \sqrt{n} ve jmenovateli zlomku. Tedy pokud chceme mít naměřenou fyzikální veličinu co nejpřesněji, můžeme postupovat dvěma

způsoby. Bud co nejvíce snížit rozptyl měřených dat (tedy snížit člen S_n), čehož dosáhneme lepším postupem měření (přesnější přístroje, omezení vnějších vlivů prostředí atd.), nebo můžeme provést více měření (tedy zvětšíme n).

5. Speciální volbou parametru α dostaneme poměrně jednoduše zajímavé výsledky.

- Pokud zvolíme $\alpha = 0,32$ (tedy budeme mít intervalový odhad o spolehlivosti 0,68) a budeme mít dostatečně velké n (více než 30), potom budou kvantily $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ vycházet velmi blízko 1 (ověřte si v tabulkách). Můžeme tedy říci, že pro dostatečně velký počet měření (více než 30) je interval

$$\bar{x}_n \pm s_K$$

intervalem spolehlivosti o spolehlivosti přibližně 0,68.

- Podobně pro volbu $\alpha = 0,05$, tedy pro spolehlivost 0,95 budou kvantily $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ pro dostatečně velké n (více než 30) vycházet blízko 2 (ověřte si v tabulkách). Můžeme tedy říci, že pro dostatečně velký počet pozorování (více než 30) je interval

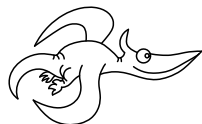
$$\bar{x}_n \pm 2s_K$$

intervalem spolehlivosti o spolehlivosti přibližně 0,95.

- Podobně pro volbu $\alpha = 0,003$, tedy pro spolehlivost 0,997 budou kvantily $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ pro dostatečně velké n (více než 30) vycházet blízko 3 (ověřte si v tabulkách). Můžeme tedy říci, že pro dostatečně velký počet pozorování (více než 30) je interval

$$\bar{x}_n \pm 3s_K$$

intervalem spolehlivosti o spolehlivosti přibližně 0,997.



Pořadí řešitelů po I. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%	%	Σ
<i>Student Pílný</i>	MFF UK	6	6	5	6	7	8	12	10	60	100	60	
1. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	6	6	2	4	6	6	9	12	51	85	51	
2. <i>Václav Zvoníček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	5	4	5	6	8	10	50	83	50	
3.–4. <i>Radka Křížová</i>	G J. Heyrovského, Praha	6	6	5	3	5	8	10	3	46	77	46	
3.–4. <i>Matěj Prokop</i>	G Dašická, Pardubice	6	6	5	2	5	7	7	8	46	77	46	
5. <i>Jakub Jobus</i>	G PdC, Piešťany	6	6	5	5	5	6	8	–	41	82	41	
6. <i>Martin Schmied</i>	G Jihlava	6	6	5	–	5	2	7	7	38	70	38	
7. <i>Matěj Krátký</i>	PORG, Praha	6	8	2	–	4	5	–	10	35	83	35	
8. <i>Miroslav Macko</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	6	6	5	–	4	5	8	–	34	77	34	
9. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	4	5	–	–	6	7	4	32	68	32	
10. <i>Petr Doubravský</i>	Akademické G, Praha	6	6	–	–	–	3	6	9	30	71	30	
11. <i>Filip Novotný</i>	G Jihlava	6	6	5	–	4	4	–	4	29	69	29	
12.–14. <i>Richard Hamerlik</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	6	6	5	–	–	1	7	3	28	60	28	
12.–14. <i>Jakub Pravda</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	6	6	5	–	–	2	6	3	28	60	28	
12.–14. <i>Adam Vavrečka</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	6	6	–	–	6	6	4	–	28	72	28	
15.–16. <i>Šimon Brázda</i>	G, Hlinsko	4	6	3	–	5	1	5	2	26	48	26	
15.–16. <i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	6	6	–	–	3	4	7	–	26	67	26	
17.–18. <i>Viktor Vařeka</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	6	6	–	2	5	6	–	–	25	76	25	
17.–18. <i>Filip Wagner</i>	G Tišnov	6	6	4	–	4	5	–	–	25	68	25	
19. <i>Kateřina Barotová</i>	G, Olomouc-Hejčín	6	6	5	1	–	–	–	–	18	78	18	
20. <i>Lucia Krajčoviechová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	6	6	–	–	–	–	–	5	17	77	17	
21.–22. <i>Ján Šrejbr</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	4	6	1	1	1	3	–	–	16	42	16	
21.–22. <i>Jiří Zelenka</i>	G Z. Wintra, Rakovník	6	6	–	3	–	–	7	–	16	70	16	
23. <i>Vojtěch Ježek</i>	G Legionářů, Příbram	8	6	–	–	–	–	–	–	14	117	14	
24. <i>Milan Tichavský</i>	Slezské G, Opava	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	12	
25.–26. <i>Anna Hollmannová</i>	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	6	4	–	10	50	10	
25.–26. <i>Bohumír Žůrek</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	0	2	1	0	0	1	4	2	10	17	10	
27.–29. <i>Soňa Curylová</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	2	6	–	–	–	–	–	–	8	67	8	
27.–29. <i>Tomáš Salavec</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	6	6	–	2	–	–	–	–	8	73	8	
27.–29. <i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	2	2	–	–	–	–	4	–	8	33	8	
30.–31. <i>Marek Černocho</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	6	6	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
30.–31. <i>Lucia Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	6	6	–	–	–	–	–	–	6	100	6	

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%	“%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	6	6	5	6	7	8	12	10	60	100	60	
1. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	6	6	5	4	7	6	12	10	56	93	56	
2. <i>Josef Minařík</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	5	5	6	6	10	7	51	85	51	
3.–4. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	6	6	5	4	5	5	7	8	46	77	46	
3.–4. <i>Ladislav Trnka</i>	G, Havlíčkův Brod	6	8	2	–	5	5	8	12	46	85	46	
5.–6. <i>Lucie Kundratová</i>	G, nám. TGM, Zlín	6	6	5	3	7	3	7	6	43	72	43	
5.–6. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	6	6	5	–	3	6	8	9	43	80	43	
7. <i>Ivan Hudák</i>	ESS, Lip. Mikuláš	6	6	5	–	6	7	–	10	40	95	40	
8. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	6	6	5	–	4	6	7	–	34	77	34	
9. <i>Kristian Matušík</i>	G, Benešov	6	6	3	–	5	4	7	–	31	70	31	
10.–12. <i>Marie Grunová</i>	G Moravský Krumlov	4	6	–	–	–	2	8	3	23	55	23	
10.–12. <i>Tereza Pavlišová</i>	G, Olomouc-Hejčín	2	6	5	–	5	–	3	2	23	50	23	
10.–12. <i>Jakub Smolka</i>	Slezské G, Opava	6	6	4	3	4	–	–	–	23	77	23	
13. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	6	6	–	–	–	–	6	–	18	75	18	
14.–16. <i>Martin Dinh</i>	G, Třinec	6	6	5	–	–	–	–	–	17	100	17	
14.–16. <i>Daniel Martyněk</i>	G, Třinec	6	6	5	–	–	–	–	–	17	100	17	
14.–16. <i>Štěpán Stryja</i>	G, Třinec	6	6	3	–	–	2	–	–	17	68	17	
17.–18. <i>Dominik Beňo</i>	G L. Svobodu, Humenné	6	6	–	–	4	–	–	–	16	84	16	
17.–18. <i>Šimon Kondrk</i>	SPŠ Dubnica nad Váhom	–	6	3	2	5	–	–	–	16	67	16	
19. <i>Jakub Rajnštajn</i>	G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn.	6	6	3	0	–	–	–	–	15	65	15	
20. <i>Jakub Zemek</i>	G, Uherské Hradiště	6	2	–	–	–	5	–	–	13	65	13	
21.–23. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	12	
21.–23. <i>Andrea Bínová</i>	G, Česká Lípa	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	12	
21.–23. <i>Josef Sabol</i>	G Chotěboř	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	12	
24.–25. <i>Máté Eke</i>	Gymnázium, sSOŠ a jazyková škola	6	–	–	1	4	–	–	–	11	58	11	
24.–25. <i>Michal Jireš</i>	G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn.	6	–	–	–	5	–	–	–	11	85	11	
26.–27. <i>Klára Nechanická</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	6	4	–	–	–	–	–	–	10	83	10	
26.–27. <i>Veronika Vohníková</i>	Nový PORG, Praha	4	6	–	–	–	–	–	–	10	83	10	
28. <i>Václav Bulín</i>	G, Plasy	6	–	3	–	–	–	–	–	9	82	9	
29. <i>Marie Vaňáková</i>	G Botičská, Praha	4	–	–	–	–	–	–	–	4	67	4	

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	3	3	5	6	7	8	12	10	54	100	54	
1. <i>Vít Beran</i>	Masarykovo G, Plzeň	3	3	5	6	7	8	10	10	52	96	52	
2.–3. <i>Ondřej Knopp</i>	G Christiana Dopplera, Praha	3	3	5	6	7	8	10	9	51	94	51	
2.–3. <i>Martin Okáník</i>	G Tajovského, B. Bystrica	3	4	5	6	7	7	8	11	51	94	51	
4. <i>David Košťák</i>	G, Josefská, Praha	3	3	5	2	5	8	9	10	45	83	45	
5. <i>Tomáš Dulava</i>	Matičín G, Ostrava	4	3	5	1	4	5	9	9	40	74	40	
6. <i>Viktor Rosman</i>	G, Pelhřimov	4	3	5	3	5	7	7	5	39	72	39	
7.–8. <i>John Richard Ritter</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	3	3	5	–	7	6	–	9	33	92	33	
7.–8. <i>Dominik Starý</i>	G, Benešov	3	3	5	–	5	7	–	10	33	92	33	
9. <i>Zuzana Richterová</i>	G, Pelhřimov	3	3	5	1	5	3	7	4	31	57	31	
10.–11. <i>Katarína Častulíková</i>	1. súkromné G v Bratislave	3	3	3	2	4	6	2	–	23	52	23	
10.–11. <i>David Dvořák</i>	ZŠ a G, Konice	3	3	3	–	–	5	6	–	23	74	23	
12. <i>Jiří Löffelmann</i>	G, Litoměřická, Praha	3	3	5	3	7	–	–	–	21	88	21	
13.–14. <i>Jaroslav Páidar</i>	SPŠ Masarykova, Liberec	3	3	–	–	6	1	4	–	17	52	17	
13.–14. <i>Matej Parada</i>	G Jura Hronca, Bratislava	4	3	5	–	–	–	5	–	17	74	17	
15. <i>Katarína Žatková</i>	Evanjelické G JAK, Košice	3	4	–	–	–	3	6	–	16	62	16	
16.–17. <i>Ondřej Buček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	5	–	–	4	–	–	15	79	15	
16.–17. <i>Veronika Funková</i>	G L. Jaroše, Holešov	3	3	–	3	–	–	6	–	15	63	15	
18.–19. <i>Andrej Holmes</i>	G Ružomberok	2	1	5	–	–	5	–	–	13	68	13	
18.–19. <i>Pavla Trembulaková</i>	G Jírovcova, České Budějovice	2	3	–	–	4	2	–	2	13	42	13	
20.–22. <i>Daniela Hrbáčová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	3	–	3	0	–	1	5	–	12	35	12	
20.–22. <i>Ondřej Komora</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	3	3	3	–	–	–	–	12	71	12	
20.–22. <i>Martina Kopecká</i>	G J. Barranda, Beroun	3	3	–	–	6	–	–	–	12	92	12	
23. <i>Kristýna Davidková</i>	Biskupské G, Brno	3	4	–	–	4	–	–	–	11	85	11	
24. <i>Filip Keller</i>	G P. de Coubertina, Tábor	3	3	–	–	3	–	–	–	9	69	9	
25.–27. <i>Tomáš Hudcovic</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	4	–	–	–	–	–	–	7	117	7	
25.–27. <i>Štěpán Kastowský</i>	G, Hlučín	3	–	–	–	–	4	–	–	7	64	7	
25.–27. <i>Petr Semerák</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	4	–	–	–	–	–	–	7	117	7	
28.–33. <i>Ondřej Bílek</i>	SPŠ, Vlašim	3	3	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
28.–33. <i>Miroslav Hrabal</i>	G, Olomouc-Hejčín	3	3	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
28.–33. <i>Štěpán Kohl</i>	Klasické a španělské G, Brno	3	3	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
28.–33. <i>David Němec</i>	G, Tanvald	3	3	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
28.–33. <i>Ján Pavlech</i>	G sv. Jozefa Nové Mesto n. V.	3	3	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
28.–33. <i>Martin Repčík</i>	G, Olomouc-Hejčín	3	3	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
34. <i>Dominick Ivan</i>	ŠG PinkHarmony, Zvolen	–	–	–	–	–	1	1	2	4	13	4	
35.–38. <i>Ondřej Hajnýš</i>	G, Dvůr Králové n. L.	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	3	
35.–38. <i>Jakub Kovářík</i>	G, Hodonín	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	3	
35.–38. <i>Jan Lindauer</i>	První české G, Karlovy Vary	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	3	
35.–38. <i>Aneta Němcová</i>	G, Boskovice	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	3	
39. <i>Filip Geib</i>	G M. M. Hodžu, Liptovský Mikuláš	2	–	–	–	–	–	–	–	2	67	2	

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	3	3	5	6	7	8	12	10	54	100	54	
1. Štěpán Stenclák	G, Třinec	3	3	5	5	7	7	12	12	54	100	54	
2. Matěj Mezera	G, Havlíčkův Brod	3	3	5	6	5	8	11	9	50	93	50	
3. Jáchym Bárták	G, Havlíčkův Brod	3	3	5	6	7	6	8	10	48	89	48	
4. Klára Ševčíková	G, Uherské Hradiště	3	3	5	–	7	7	7	10	42	88	42	
5. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	3	2	4	3	5	5	10	9	41	76	41	
6. Jan Střeleček	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	3	3	5	3	6	4	1	9	34	63	34	
7. Přemysl Štastný	G, Žamberk	3	3	5	–	7	5	–	10	33	92	33	
8. Branislav Belko	G Milana Ráfusa	2	3	3	–	–	6	12	2	28	68	28	
9. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	3	1	7	4	5	–	26	59	26	
10. Samuel Šipikal	G Milana Ráfusa	3	1	5	–	4	4	6	2	25	52	25	
11. Karel Jókai	G, Špitálská, Praha	2	3	5	–	–	7	7	–	24	77	24	
12. Filip Novotný	G Masarykovo nám., Kroměříž	3	3	2	–	5	7	–	3	23	64	23	
13.–14. Alžběta Andrýšková	G, Olomouc-Hejčín	2	3	–	–	–	7	9	–	21	81	21	
13.–14. Jonáš Fuksa	PORG, Praha	3	3	5	5	5	–	–	–	21	88	21	
15. Petr Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	3	3	–	–	7	–	–	7	20	87	20	
16. František Zach	G, Litomyšl	3	3	5	–	7	–	–	–	18	100	18	
17. Matěj Rzehulka	Wichterlovo G, Ostrava	3	4	–	–	–	1	–	8	16	67	16	
18. Kateřina Stodolová	G Dašická, Pardubice	3	–	–	–	–	–	10	–	13	87	13	
19. Martin Vejvoda	G Dobruška	3	3	5	–	–	1	–	–	12	63	12	
20. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava	3	3	4	–	–	–	–	–	10	91	10	
21.–22. Veronika Gintnerová	G Sv. Františka, Žilina	3	3	–	–	–	–	–	–	6	100	6	
21.–22. Václav Mikeska	G F. Palackého, Val. Mez.	3	3	–	–	–	–	–	–	6	100	6	



FYKOS


UK, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

18000 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
 Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.