

Seriál: Zpracování dat fyzikálních měření

V minulém díle seriálu jsme se seznámili s tím, co je to náhodná veličina, hustota pravděpodobnosti a jak se dá v některých případech odhadnout typ rozdělení náhodné veličiny z naměřených dat pomocí histogramu. V tomto díle se zaměříme na odhadování střední hodnoty a rozptylu z naměřených dat.

Proč je dobré z naměřených dat odhadovat střední hodnotu, případně rozptyl náhodné veličiny, ze které naměřená data pocházejí? Odpověď je jednoduchá: protože to je přesně to, o co fyzikové při experimentu především jde. Toto potřebuje trochu hlubší vysvětlení.

Fyzikální interpretace

V tomto odstavci uvedeme základní matematický model, který se při fyzikálních měřeních používá. Představme si, že měříme nějakou fyzikální veličinu (např. dobu kyvu kyvadla) a pro různá měření dostaneme různé hodnoty měřené fyzikální veličiny (v našem příkladě různé hodnoty naměřeného času). Jak toto interpretovat?

Je to naprosto jednoduché, v základním modelu uvažujeme, že ona fyzikální veličina, kterou měříme, je po celou dobu neměnná a při použití dokonalých měřicích přístrojů a dokonalého postupu měření bychom vždy naměřili právě tuto jednu neměnnou hodnotu. Vlivem různých nepřesností (nedokonalý měřicí přístroj, nedokonalá měřicí aparatura, vnější vlivy prostředí, lidský faktor atd.), ale tohoto nejsme schopni dosáhnout a při každém měření naměříme trochu odlišnou hodnotu. V základním modelu můžeme považovat výsledek měření za náhodnou veličinu (protože dopředu nevíme, jakou hodnotu naměříme, podobně jako u hodu kostkou). Při následném statistickém zpracování naměřených dat se potom snažíme pomocí naměřených dat (tedy vlastně realizací náhodné veličiny) zjistit co nejvíce informací o skutečné hodnotě měřené fyzikální veličiny.

Uděláme další důležitý předpoklad o tom, jaké mohou být ty vlivy, které způsobují, že nejsme schopni měřenou fyzikální veličinu měřit přesně. V našem základním modelu budeme uvažovat, že neexistuje žádný systematický posun naměřených hodnot oproti skutečné hodnotě. Jinými slovy měříme sice nepřesné hodnoty, ale tyto hodnoty nejsou systematicky větší nebo menší než skutečná hodnota, kterou chceme měřit. V našem příkladu při měření doby kyvu kyvadla může uvažovat poruchy okolního vzduchu, které způsobí nepřesnosti měření, ale budeme předpokládat, že nefouká vítr jedním směrem ale všemi směry přibližně stejně. Podobně pro ostatní zdroje nepřesností. Je potom odpovědností experimentátora, aby zajistil platnost tohoto předpokladu při samotném měření (pokud toho experimentátor není schopen dosáhnout, což se někdy stává, je potřeba tyto nepřesnosti řešit zvlášť, o tom více na konci tohoto dílu seriálu). Díky tomuto předpokladu můžeme tvrdit, že hodnota fyzikální veličiny, kterou chceme naměřit, se rovná střední hodnotě náhodné veličiny představující výsledek jednoho měření. Jediný problém je, že tuto střední hodnotu neznáme, budeme ji tedy muset odhadovat z naměřených dat. Už dopředu se musíme připravit na to, že z naměřených dat nikdy nebudeme schopni přesně zjistit hodnotu měřené fyzikální veličiny.

Pokud si vzpomeneme, jaký význam má rozptyl náhodné veličiny (míra rozptýlenosti okolo střední hodnoty), uvědomíme si, že rozptyl náhodné veličiny představující výsledek jednoho měření vlastně vypovídá o přesnosti našeho měření (o tom jak moc jsou naměřené hodnoty rozptýleny kolem skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny).

Další předpoklad, který si zavedeme je, že jednotlivá měření jsou na sobě nezávislá. Intuitivní představa, co to znamená, je, že výsledek jednoho měření nijak neovlivní výsledky ostatních měření. Experimentátor opět musí zajistit, že tento předpoklad bude splněn.

Odhadování parametrů normálního rozdělení z naměřených dat

V tomto díle seriálu se budeme zabývat pouze případem, kdy náhodná veličina představující výsledek jednoho měření má normální rozdělení. Tento předpoklad je téměř vždy splněn, normální rozdělení se vyskytuje opravdu téměř všude. Jak postupovat v případě, že je tento předpoklad porušen, si rozebereme v příštím díle seriálu.

Na tomto místě jen v rychlosti připomeneme, že normální rozdělení, které značíme $N(\mu, \sigma^2)$, je spojité rozdělení určené dvěma parametry μ , σ^2 , jehož hustota má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dále platí, že střední hodnota tohoto rozdělení je rovna μ a rozptyl tohoto rozdělení je roven σ^2 . Často se navíc definuje ještě tzv. směrodatná odchylka jako odmocnina z rozptylu, tedy v případě normálního rozdělení platí, že směrodatná odchylka je rovna σ .

Naším cílem bude z naměřených dat odhadovat skutečné hodnoty střední hodnoty, rozptylu a směrodatné odchylky. Jak už bylo uvedeno dříve, musíme se smířit s faktem, že nikdy nemůžeme tyto hodnoty z naměřených dat odhadnout přesně (o tom více později). Ve zbytku seriálu budeme skutečné (při měření neznámé) hodnoty značit řeckými písmeny μ , σ , σ^2 a z naměřených dat odhadnuté hodnoty budeme značit stejnými písmeny se stříškou a dolním indexem uvádějícím z kolika měření jsme tuto hodnotu odhadli (tedy $\widehat{\mu}_n$, $\widehat{\sigma}_n$, $\widehat{\sigma}_n^2$). Odhadnuté hodnoty budeme nazývat jako výběrová střední hodnota, výběrová směrodatná odchylka a výběrový rozptyl.

Odhad střední hodnoty

Uvažujme, že máme k dispozici výsledky našeho měření x_1, \dots, x_n , o kterých budeme předpokládat, že jsou vzájemně nezávislé a že pocházejí z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámými parametry. Odhadem střední hodnoty bude výběrová střední hodnota definovaná jako

$$\widehat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

kde výraz na pravé straně často zkráceně zapisujeme jen jako $\overline{x_n}$.

Nyní se zaměříme na analýzu vlastností výběrového průměru. Musíme si uvědomit, že jednotlivá měření jsou náhodné veličiny (není dopředu známe, jakým výsledkem dopadnou – jakou hodnotu naměříme) a v důsledku toho je i výběrová střední hodnota náhodná veličina (také není dopředu známé, jaké číslo nám vyjde). Při analýze vlastností výběrové střední hodnoty

nás bude zajímat zejména její rozdělení. Na výběrovou střední hodnotu se můžeme dívat jako na součet n nezávislých náhodných veličin vydělených číslem n . Nyní si musíme odvodit, jaké bude rozdělení součtu dvou nezávislých náhodných veličin. (Poznamenejme, že zde je velice důležité, že náhodné veličiny jsou opravdu nezávislé, jinak by následující odvození nebylo správné.)

Nechť máme náhodnou veličinu X se známým rozdělením a druhou náhodnou veličinu Y se známým rozdělením a tyto dvě náhodné veličiny jsou nezávislé. Nyní nás zajímá, jaké bude rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$. Uvažujme nejprve jednodušší případ, kdy mají obě náhodné veličiny diskrétní rozdělení. Například X představuje výsledek hodu kostkou a Y představuje výsledek hodu jinou kostkou a nás zajímá, jaké má rozdělení součet hodů na obou kostkách, tedy náhodná veličina $Z = X + Y$. V tomto jednoduchém případě stačí rozepsat si pravděpodobnosti, že nastanou všechny možné dvojice výsledků a sečíst pravděpodobnosti těch dvojic, které vedou na stejný součet, a toto bude pravděpodobnost, že náhodná veličina $X + Y$ nabyde právě této hodnoty. Matematicky zapsáno

$$P(Z = k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n, Y = k - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = n)P(Y = k - n),$$

kde v prostředním výrazu $P(X = n, Y = k - n)$ značí pravděpodobnost, že nastanou oba případy zároveň (tedy že bude platit $X = n$ a zároveň $Y = k - n$). Tento výraz lze rozepsat na součin dvou dílčích pravděpodobností díky nezávislosti náhodných veličin X a Y . Výraz na pravé straně si potom lze představovat jako součet pravděpodobností těch případů, kdy je součet náhodných veličin X a Y roven k (to nastane právě tehdy, když bude pro nějaké n bude platit $X = n$ a zároveň $Y = k - n$).

Ač tento vzorec vypadá složitě, je dobré si uvědomit, že je vlastně triviální. V našem příkladě se součtem hodů na dvou kostkách je dosažení do tohoto vzorce velmi jednoduché, neboť pro n neležící v množině $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ platí $P(X = n) = 0$ a také víme, že za k má smysl dosazovat jen čísla z množiny $\{2, \dots, 12\}$, neboť jiných hodnot nemůže náhodná veličina Z nabývat. Když si dosadíme opravdu vyjde správný výsledek.

Pro případ, že X a Y jsou spojitě náhodné veličiny s hustotami f a g , platí obdoba předchozího vzorce, jen je potřeba nahradit sumy pomocí integrálů¹. Bude tedy platit

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z - x)dx,$$

kde h bude hustota náhodné veličiny Z . Těto operaci se říká konvoluce funkcí f a g a značí se $f \star g$.

Je důležité vědět, že součet dvou nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením (řekněme X s rozdělením $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a Y s rozdělením $N(\mu_2, \sigma_2^2)$) má opět normální rozdělení s parametry, které se rovnají součtu původních parametrů (tedy $Z = X + Y$ má rozdělení $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$). Tento fakt plyne z pouhého dosazení do vzorce na konvoluci. Zdatnější čtenáři si mohou platnost tohoto faktu sami ověřit výpočtem, méně zdatní čtenáři mohou pro ověření tohoto faktu využít nějaký matematický software nebo tomu prostě věřit.

¹Pokud nevíte, co je to integrál, nezoufejte. Stačí pouze přijmout několik zde uvedených faktů, pro pochopení vykládané látky není nutné znát dokonale integrální počet.

Další důležitá věc je uvědomit si, co se stane s rozdělením náhodné veličiny, pokud tuto veličinu vynásobíme konstantou. Ze vzorců na střední hodnotu a rozptyl (viz minulý díl seriálu) ihned plynou následující vztahy (zdatnější čtenáři si opět mohou tento fakt ověřit výpočtem)

$$\begin{aligned} E(aX) &= aE(X), \\ \text{var}(aX) &= a^2\text{var}(X). \end{aligned}$$

Jako poslední si musíme rozmyslet, že pokud náhodnou veličinu s normálním rozdělením vynásobíme konstantou, její rozdělení bude opět normální (samozřejmě s jinými parametry). Toto není úplně jednoduché. Intuitivní představa může být taková, že po vynásobení náhodné veličiny s normálním rozdělením konstantou se pouze natáhne (nebo smrskne) funkce hustoty, ale zůstane zachován typ rozdělení.

Potom, co jsme si uvedli těchto pár tvrzení, můžeme jejich jednoduchým zkombinováním dostat důsledek, že za předpokladu, že naše naměřená data pocházejí z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, má výběrová střední hodnota normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2/n)$. Nyní si musíme uvědomit, co to vlastně znamená. S větším počtem naměřených dat (tedy s větším n) se výběrové střední hodnotě snižuje rozptyl, ale střední hodnota zůstává pořád stejná a to sice ta, kterou mají také jednotlivé náhodné veličiny (tedy vlastně hodnota měřené fyzikální veličiny). To znamená, že pro velký počet měření bude výběrová střední hodnota s největší pravděpodobností čím dál blíže ke střední hodnotě, kterou chceme odhadovat (důsledek toho, že rozptyl výběrové střední hodnoty bude čím dál menší, tedy výběrová střední hodnota bude čím dál méně rozptýlena okolo své střední hodnoty μ).

Na závěr tohoto odstavce jen uvedme, že výběrová střední hodnota se někdy také označuje jako výběrový průměr, ale v tomto seriálu se budeme držet označení výběrová střední hodnota.

Odhad rozptylu

Podobně jako výběrová střední hodnota odhaduje střední hodnotu budeme odhadovat rozptyl pomocí výběrového rozptylu. Výběrový rozptyl je definovaný jako²

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2.$$

Ve fyzice se také často potkáme s výběrovou směrodatnou odchylkou

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2},$$

kteřá odhaduje směrodatnou odchylku.

Je důležité si uvědomit, že výběrový průměr i výběrová směrodatná odchylka jsou opět náhodné veličiny (dopředu neznáme jejich hodnotu). Podobně jako u výběrové střední hodnoty by se dalo ukázat, že výběrový rozptyl (resp. výběrová směrodatná odchylka) má takové rozdělení, že pro velký počet měření je jeho hodnota s největší pravděpodobností čím dál bližší

²Na první pohled se může zdát trochu divné, proč dělíme číslem $(n-1)$ a nikoliv číslem n . Je to z toho důvodu, aby tento odhad byl nestranný (tzn. aby střední hodnota výběrového rozptylu – opět připomínáme, že výběrový rozptyl je náhodná veličina – byla rovna skutečnému rozptylu). Pokud bychom dělili pouze číslem n , tento odhad by nebyl nestranný.

skutečnému rozptylu (resp. skutečné směrodatné odchylce). Ukázat tuto vlastnost už je ovšem v tomto případě o dost složitější, proto to na tomto místě dělat nebudeme, pouze to uvedeme jako fakt.

Interval spolehlivosti

Nyní jsme si popsali, jak z naměřených dat odhadovat střední hodnotu (o tu nám ve fyzikální aplikaci jde především) a rozptyl náhodné veličiny, ze které naměřená data pocházejí. Odvodili jsme si, že naše odhady (výběrová střední hodnota, výběrová směrodatná odchylka a výběrový rozptyl) mají tu vlastnost, že pro velký počet měření jsou čím dál přesnější (tj. jsou s největší pravděpodobností čím dál blíže skutečným hodnotám střední hodnoty, resp. směrodatné odchylky, resp. rozptylu). Je sice hezké, že víme, že pro velký počet měření bude náš odhad velmi přesný, ale v praxi obvykle nemáme moc měření (velký počet může znamenat třeba 1 000 měření nebo i více).

Pokud chceme odhadovat střední hodnotu z relativně malého počtu měření (tato situace nastane prakticky u každého fyzikálního experimentu) budeme postupovat tak, že zkonstruujeme interval spolehlivosti, který nám bude říkat, v jakém intervalu se s největší pravděpodobností nachází skutečná hodnota střední hodnoty.

Vyjdeme z toho, že si určíme, jaké rozdělení má následující transformace našich naměřených dat (opět si uvědomme, že se jedná o náhodnou veličinu, neboť dopředu neznáme její hodnotu)

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n},$$

kde μ je skutečná (ale pro nás neznámá) hodnota střední hodnoty rozdělení, ze kterého pochází naměřená data (připomínáme předpoklad, že se jedná o normální rozdělení) a n je počet naměřených dat. Bez důkazu na tomto místě uvedeme, že rozdělení takovéto náhodné veličiny je tzv. Studentovo rozdělení o $n - 1$ stupních volnosti (značíme t_{n-1}). Studentovo rozdělení má poměrně složitou hustotu, jejíž přesný předpis je zde zbytečné uvádět (zájemci si mohou tuto hustotu vykreslit v matematickém softwaru). Je dobré si povšimnout, že pro velké n je studentovo rozdělení o n stupních volnosti čím dál více podobné rozdělení $N(0, 1)$ (tohoto faktu budeme později využívat). Další důležitou vlastností hustoty studentova rozdělení je, že je symetrické okolo nuly.

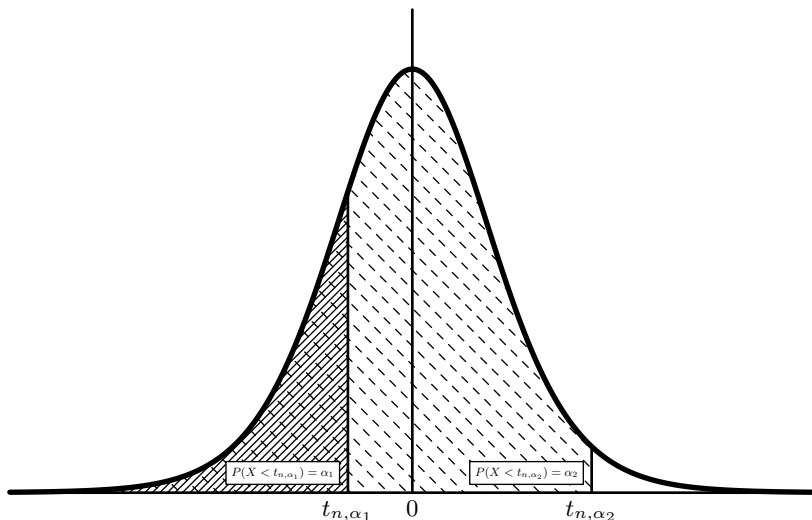
Když nyní víme, že naše transformovaná data mají Studentovo rozdělení o $n - 1$ stupních volnosti, můžeme si pro toto rozdělení určit tzv. kvantily. Pokud si zvolíme číslo α z intervalu $(0, 1)$, potom α -kvantilem Studentova rozdělení o n stupních volnosti (značíme ho $t_{n,\alpha}$) bude takové číslo, které splňuje podmínku, že pravděpodobnost, že naše náhodná veličina řídící se rozdělením t_n bude menší než $t_{n,\alpha}$, bude rovna α . Matematicky zapsáno

$$P(X < t_{n,\alpha}) = \alpha.$$

Dobře je význam toho, co znamená kvantil, vidět z obrázku 1.

Na tomto místě poznamenejme, že přesné hodnoty kvantilů Studentova rozdělení (pro různé kombinace parametrů n a α) lze najít v každých lepších matematických tabulkách nebo na internetu.

Celý postup konstrukce intervalového odhadu pro střední hodnotu bude následující. Nejprve si zvolíme tzv. hladinu spolehlivosti, která musí ležet v intervalu $(0, 1)$. Následně určíme takové



Obr. 1: Grafický význam kvantilů spojité náhodné veličiny.

číslo $\alpha \in (0, 1)$, aby naše hladina spolehlivosti byla rovna $1 - \alpha$. Naším cílem bude zkonstruovat interval s vlastností, že pravděpodobnost pokrytí skutečné střední hodnoty intervalem spolehlivosti bude právě $1 - \alpha$. Tedy α lze interpretovat jako pravděpodobnost omylu.

Samotný interval spolehlivosti budeme konstruovat následujícím způsobem. Díky znalosti rozdělení našich transformovaných dat a vlastností kvantilů Studentova t_{n-1} rozdělení musí platit

$$P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Nyní už jenom ekvivalentními úpravami upravujeme nerovnosti uvnitř pravděpodobnosti:³

³Uvědomme si, že takto opravdu lze postupovat, neboť pokud neměníme množinu řešení dvojice nerovností uvnitř pravděpodobnosti (což ekvivalentními úpravami neměníme), nemění se ani hodnota samotné pravděpodobnosti.

$$\begin{aligned}
1 - \alpha &= P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}\right) = \\
&= P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \bar{x}_n - \mu < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{x}_n < -\mu < t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} - \bar{x}_n\right) = \\
&= P\left(\bar{x}_n - t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(\bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} > \mu > \bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \\
&= P\left(\bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Všechny úpravy byly víceméně triviální, úprava mezi 4. a 5. řádkem spočívala v nahrazení kvantilu $t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$ pomocí kvantilu $-t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}$, což lze udělat díky symetrii hustoty Studentova rozdělení (rozmyslete si sami).

Nyní si musíme uvědomit, co jsme vlastně dostali.

$$1 - \alpha = P\left(\bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right).$$

Tento výraz vlastně říká, že pravděpodobnost, že interval

$$\left(\bar{x}_n - t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$$

pokrývá skutečnou střední hodnotu náhodné veličiny, ze které pocházejí naměřená data (tedy vlastně měřenou fyzikální veličinu), je přesně $1 - \alpha$. Toto je interval spolehlivosti (někdy se také říká intervalový odhad) pro měřenou fyzikální veličinu.

Tento interval se někdy zkráceně zapisuje jako

$$\bar{x}_n \pm t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}} \frac{S_n}{\sqrt{n}}.$$

Protože fyzikové mají rádi co nejkratší zápisy a i tento zápis jim přijde moc dlouhý, většinou píšou jen

$$\bar{x}_n \pm \frac{S_n}{\sqrt{n}},$$

tedy vynechají v intervalovém odhadu hodnotu kvantilu $t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}$, takže to už není zápis intervalového odhadu v obecném tvaru, ale velice snadným způsobem (jen doplněním příslušného kvantilu Studentova rozdělení) ho lze zpětně zrekonstruovat.

Hodnota $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ se často označuje pouze s_n a říká se jí výběrová směrodatná odchylka průměru (protože odhaduje směrodatnou odchylku výběrového průměru). Toto je to, co se u fyzikálního

experimentu vyžaduje, tedy spočítat hodnotu výběrové střední hodnoty \bar{x}_n a hodnotu výběrové směrodatné odchylky průměru s_n . Výsledek se zapíše ve tvaru

$$\bar{x}_n \pm s_n$$

a jednoduchým doplněním hodnoty příslušného kvantilu se z tohoto zápisu nechá vyrobit intervalový odhad pro měřenou fyzikální veličinu.

Výběrová směrodatná odchylka průměru se používá jako měřítko toho, jak přesně jsme fyzikální veličinu změřili, neboť udává, jak široké budou příslušné intervaly spolehlivosti. Při fyzikálních experimentech se vždy požaduje, aby byla hodnota výběrové směrodatné odchylky průměru co možná nejmenší. Někdy se také o výběrové směrodatné odchylce průměru mluví jako o nejistotě měření typu A.

Názvosloví a typy nejistot

Nyní už máme zcela popsáný základní model statistického zpracování naměřených dat a nakonec si ho zasadíme do širšího kontextu. Obecně se definují 2 typy nejistot měření a sice nejistota typu A a nejistota typu B.

Nejistota typu A je nejistota určení měřené fyzikální veličiny, která pramení z náhodnosti naměřených dat. Tuto nejistotu získáme statistickým zpracováním dat, o tom se psalo na předchozích 7–8 stránkách a umíme se s tím vypořádat.

Nejistota typu B je nejistota určení měřené fyzikální veličiny, která pramení z jiných důvodů než nejistota typu A. Zejména se jedná o nějaký systematický posun měřených hodnot vůči skutečné hodnotě (o tomto se psalo na začátku tohoto dílu seriálu v odstavci *Fyzikální interpretace*). S nejistotou typu B se vypořádáme tak, že ji buď připočteme k nejistotě typu A (to se dělá hlavně v případech nejistoty vyplývající z nepřesnosti měřidla⁴) nebo ji pouze zmíníme v diskuzi (to se dělá ve většině ostatních případů).

Pro připočítání nejistoty typu B k nejistotě typu A se používá vzorec

$$s_K = \sqrt{s_A^2 + s_B^2},$$

kde s_A je nejistota typu A a s_B je nejistota typu B. Dále se pracuje s kombinovanou nejistotou s_K stejně jako jsme předtím pracovali s nejistotou typu A. Ve všech intervalových odhadech (i ve finálním zápisu naměřených hodnot) tedy musíme místo hodnoty s_n uvádět hodnotu s_K , čímž tyto intervalové odhady rozšíříme, abychom vzali v úvahu také ostatní zdroje nepřesností. Kombinovaná nejistota měření tedy vyjadřuje, jak přesně jsme fyzikální veličinu určili. Ve fyzikálních experimentech je cílem dosáhnout co možná nejmenší kombinované nejistoty měření (tj. určit měřenou fyzikální veličinu co možná nejpřesněji).

Na závěr tohoto odstavce uvedeme, že jsme v textu seriálu záměrně používali pouze slovo nejistota a vyhýbali jsme se použití slova chyba. Na tomto místě objasníme proč. Chyba měření je definována jako absolutní hodnota rozdílu odhadnuté hodnoty a skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny, tedy jako

$$e = |\bar{x}_n - \mu|.$$

⁴Nepřesnost měřidla bývá často uvedena na použitém měřidlu a její význam je takový, že měřidlo může způsobovat systematický posun zobrazovaných hodnot vůči skutečným hodnotám až do uvedené míry. Pokud není na měřidle nic uvedeno, uvažuje se za nepřesnost měřidla obvykle polovina nejmenšího dílku na stupnici, na které měřidlo zobrazuje hodnoty.

Chyba měření vyjadřuje o kolik se námi odhadnutá hodnota měřené fyzikální veličiny (tedy \bar{x}_n) liší od její skutečné hodnoty (tedy μ). Je ale naprosto nutné si uvědomit, že chybu měření v praxi nikdy znát nebudeme (k tomu bychom totiž potřebovali znát skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny). Naneštěstí se ale často můžeme potkat s tím, že se význam slov nejistota a chyba zaměňuje nebo se považují za ekvivalentní označení. V tomto textu seriálu se ale budeme držet správného značení a stejně to dělejte i vy při řešení úloh.

Důležité poznámky na závěr

Na závěr tohoto dílu seriálu uvedeme několik důležitých poznámek k odhadům měřené fyzikální veličiny za předpokladu normálního rozdělení náhodné veličiny popisující výsledek jednoho měření.

1. V tomto dílu seriálu se vyskytlo značné množství nových pojmů, z nichž některé mají velmi podobná označení. Pro správné pochopení této problematiky je ale nutné mezi těmito pojmy důsledně rozlišovat (např. chyba vs. nejistota, střední hodnota vs. výběrová střední hodnota atd.). Proto bychom na tomto místě chtěli upozornit, abyste v řešení seriálové úlohy (a ve všech budoucích zpracováních experimentů) věnovali zvláštní pozornost jazykovým formulacím, které mohou způsobovat zbytečná nedorozumění.
2. Je naprosto nutné pochopit účel intervalu spolehlivosti a jeho vztah k odhadům parametrů μ a σ^2 . Účelem odhadů parametrů je odhadnout z naměřených dat skutečnou hodnotu střední hodnoty (případně rozptylu nebo směrodatné odchytky) a je proto sám náhodnou veličinou. Tato náhodná veličina má tu vlastnost, že při velkém počtu pozorování bude její hodnota s velkou pravděpodobností velmi blízká skutečné hodnotě střední hodnoty (resp. rozptylu nebo směrodatné odchytky). Pro opravdu velký počet měření je takovýto odhad dostačující. V praxi ovšem skoro nikdy nemáme velký počet měření, proto konstruujeme intervalové odhady. Intervalový odhad je vlastně množina (interval), kde bude s určitou předem libovolně zvolenou pravděpodobností (s pravděpodobností $1 - \alpha$) skutečná hodnota střední hodnoty ležet.
3. Fyzikové s oblibou říkávají následující:
„Pravděpodobnost, že skutečná hodnota měřené veličiny leží v intervalu

$$\bar{x}_n \pm t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} s_K,$$

je $1 - \alpha$.“ Toto je v podstatě pravdivé tvrzení, ale je poněkud nešťastně a zmatečně formulované. Je nutné si uvědomit, že skutečná hodnota měřené fyzikální veličiny je deterministická (není náhodná), jenom ji většinou neznáme. To, co je náhodné, jsou meze intervalu spolehlivosti (vzpomeňte si, že \bar{x}_n a s_n jsou náhodné veličiny). Lepší formulace je proto následující: „Pravděpodobnost, že interval spolehlivosti pokrývá skutečnou hodnotu měřené fyzikální veličiny, je $1 - \alpha$.“ V tomto seriálu se budeme držet této přesnější formulace, stejně to dělejte i vy v řešení úloh.

4. Všimněme si, co ovlivňuje podobu (zejména šířku) intervalu spolehlivosti. Výběrový průměr \bar{x}_n odhaduje střední hodnotu a výběrový rozptyl S_n odhaduje rozptyl. Obě tyto náhodné veličiny budou při velkém počtu pozorování velice pravděpodobně nabývat pouze hodnot blízkých skutečným hodnotám střední hodnoty, resp. rozptylu. Jediné, co potom bude ovlivňovat šířku našeho intervalu spolehlivosti (tedy vlastně přesnost, se kterou jsme požadovanou fyzikální veličinu naměřili), bude člen \sqrt{n} ve jmenovateli zlomku. Tedy pokud chceme mít naměřenou fyzikální veličinu co nejpřesněji, můžeme postupovat dvěma

způsoby. Buď co nejvíce snížit rozptyl měřených dat (tedy snížit člen S_n), čehož dosáhneme lepším postupem měření (přesnější přístroje, omezení vnějších vlivů prostředí atd.), nebo můžeme provést více měření (tedy zvětšíme n).

5. Speciální volbou parametru α dostaneme poměrně jednoduše zajímavé výsledky.
- Pokud zvolíme $\alpha = 0,32$ (tedy budeme mít intervalový odhad o spolehlivosti 0,68) a budeme mít dostatečně velké n (více než 30), potom budou kvantily $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ vycházet velmi blízko 1 (ověřte si v tabulkách). Můžeme tedy říci, že pro dostatečně velký počet měření (více než 30) je interval

$$\overline{x}_n \pm s_K$$

intervalem spolehlivosti o spolehlivosti přibližně 0,68.

- Podobně pro volbu $\alpha = 0,05$, tedy pro spolehlivost 0,95 budou kvantily $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ pro dostatečně velké n (více než 30) vycházet blízko 2 (ověřte si v tabulkách). Můžeme tedy říci, že pro dostatečně velký počet pozorování (více než 30) je interval

$$\overline{x}_n \pm 2s_K$$

intervalem spolehlivosti o spolehlivosti přibližně 0,95.

- Podobně pro volbu $\alpha = 0,003$, tedy pro spolehlivost 0,997 budou kvantily $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ pro dostatečně velké n (více než 30) vycházet blízko 3 (ověřte si v tabulkách). Můžeme tedy říci, že pro dostatečně velký počet pozorování (více než 30) je interval

$$\overline{x}_n \pm 3s_K$$

intervalem spolehlivosti o spolehlivosti přibližně 0,997.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.