## Úloha V.4 ... bezpečná jízda

4 body; průměr 2,81; řešilo 36 studentů

*Máme auto, které se blíží kolmo ke zdi. Řidič, který v autě jede, by se ale chtěl přibližovat ke zdi bezpečně. Jaký by muselo mít auto průběh rychlosti, aby vzdálenost od auta ke zdi v každý okamžik odpovídala dráze, kterou by auto s okamžitou rychlostí v té chvíli urazilo za $T = 2\,\mathrm{s}$?*

*Karel přemýšlel nad bezpečnou vzdáleností.*

V zadání máme slovně popsanou závislost okamžité rychlosti na vzdálenosti od zdi. Vyjádříme ji ze známého středoškolského vzorce

$$v(s) = \frac{s}{T}\,.$$

Získat závislost na čase už je podstatně složitější, musíme řešit diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{s(t)}{T}\,.. \tag{1}$$

Záporné znaménko v rovnici musí být, abychom se ke zdi přibližovali a ne se od ní vzdalovali. Řešení se dá uhodnout, hledáme funkci, jejž derivace je násobkem původní funkce. To splňuje exponenciální funkce tvaru $f(x) = \mathrm{e}^x$, v našem případě je to

$$\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\,.$$

či její libovolný násobek. Z počátečních podmínek zjistíme konkrétně

$$s(t) = s_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\,,$$

kde $s_0$ je vzdálenost v čase $t = 0$. Závislost rychlosti na čase pak získáme pomocí vztahu $v = s/T$, obdržíme

$$v(t) = \frac{s_0}{T}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\,.$$

Z vlastností této funkce vidíme, že řidič se ke zdi blíží bezpečně, protože v konečném čase do zdi nenarazí. Rychlost je vždy záporná, neboť se měřená vzdálenost $s(t)$ v čase zmenšuje. Snadno můžeme určit, jaká byla počáteční rychlost $v_0$ pro zvolenou počáteční vzdálenost $s_0$. Počáteční rychlost bude při zvyšování hodnoty daného $T$ klesat.

Formálně lze diferenciální rovnici (1) řešit jak přes separaci proměnných, tak přes charakteristický polynom lineární diferenciální rovnice. Jako příklad uveďme první z metod, aplikace by v náznaku vypadala takto:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= -\frac{s}{T}\,,\\
\mathrm{d}t &= -\frac{T}{s}\mathrm{d}s\,,\\
\int \mathrm{d}t &= -\int \frac{T}{s}\mathrm{d}s\,,\\
t &= -T\ln s + C\,,\\
s &= C\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\,,
\end{aligned}$$

kde $C$ je integrační konstanta (na každém řádku nabývá obecně jiné hodnoty). Za domácí úkol si můžete zkusit postup přes charakteristický polynom.

### *Komentáře k došlým řešením*

Mile mě překvapilo, kolik z vás dokázalo vyřešit diferenciální rovnici, přestože se jedná o učivo vysoce nad rámec středoškolského učiva. Dále mi přišlo zajímavé, kolika způsoby se dá diferenciální rovnice „obejít“, ať už přes posloupnosti, nebo numerická řešení. Ale překvapivě mnoho z vás zapomíná přidávat integrační konstanty.

***Mikuláš Matoušek***
mikulas@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.