

Úvodem

Milí FYKOSáci,

máme za sebou první sérii úloh, takže jestli čekáte, že bude následovat druhá, jdete na to správně. Omlouváme se, že zde nenaleznete vzorová řešení k úplně všem úlohám první série, ale alespoň se na ně můžete těšit, na FYKOSích stránkách se určitě objeví. My se na oplátku těšíme na ty z vás, kteří dorazí na DSEF a pojedou s námi na TSAF nejen do CERNu. Ať už jste, nebo nejste mezi těmito vyvolenými, můžete se začít pomalu poohlížet po dalších lidech, kteří k fyzice nemají vyloženě negativní vztah, protože zima se blíží a s ní i další Fyziklání online (kdyby o něm náhodou někdo nikdy neslyšel, necht' navštíví naše stránky, kde se v sekci Akce mimo jiné dozví například i o sérii podzimních přednášek).

Organizátoři



Zadání II. série



Termín uploadu: 1. 12. 2015 23.59

Termín odeslání: 30. 11. 2015

Úloha II.1 ... potkan na ledě

2 body

Na ledě běží potkan rychlostí v . Najednou se rozhodne, že se chce otočit o 90° tak, aby po otočení běžel pořád rychlostí o velikosti v , ale v novém směru. Jaký nejmenší čas na to potřebuje? Předpokládejte, že potkaní nožičky se mohou po ledě pohybovat nezávisle; koeficient tření mezi nožičkami a ledem je f .

Úloha II.2 ... numismatická

2 body

Občas nastane stav, kdy je nominální hodnota mincí nižší, než jejich výrobní náklady. Mějme dvě mince vyrobené ze slitiny zlata a stříbra. První má průměr $d_1 = 1$ cm, druhá $d_2 = 2$ cm, obě mají tloušťku $h = 2$ mm. Menší mince při ponoření do nádoby se rtutí klesne ke dnu, zatímco větší mince se začne vynořovat. Ponoříme-li do rtuti obě mince, menší na větší, budou se v kapalině vznášet. Určete, kolik hmotnostních procent stříbra obsahuje větší mince, jestliže menší je celá zlatá.

Bonus Jak se změní výsledek úlohy, pokud menší mince může obsahovat i stříbro?

Úloha II.3 ... fatální upuštění

3 body

Z rakety obíhající po kružnici ve výšce $h = 2000$ km nad Zemí hodíme směrem k Zemi nebohý šroubovák rychlostí $v = 5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ vůči lodi. Za jak dlouho dopadne?

Úloha II.4 ... svítíme si na zrcadla

5 bodů

Máme optickou soustavu tvořenou třemi polopropustnými zrcadly v jedné ose za sebou. Každé zrcadlo by samo o sobě polovinu dopadajícího záření propustilo a polovinu odrazilo. Jaká část světla celkově projde naší optickou soustavou?

Bonus Vyřešte úlohu pro n zrcadel.

Úloha II.5 ... je šišaté, bude s ním veselo

5 bodů

Mirkovi během zimních měsíců přišlo, že má doma na čtení příliš šero. Umyslel si proto, že nechá do zdi pokoje vybourat otvor pro další okno. Nejdříve se ale vydal do sklářství koupit okenní tabulku. Moc se mu líbila jedna kruhová, ale ještě než ji koupil, potřeboval prozkoumat, jestli není sklo příliš křivé (vypuklé). Položil tabulku na dokonale rovnou skleněnou desku na pultě obchodu a pozoroval duhové kroužky, které vznikly kolem středu tabulky interferencí kolmo dopadajícího bílého světla na vzduchové mezeře mezi skly. Mirek náhodně vybral dva sousední červené kroužky ($\lambda \approx 700 \text{ nm}$) a pravítkem změřil jejich průměry $d_k = (10,5 \pm 0,5) \text{ mm}$ a $d_{k+1} = (13,0 \pm 0,5) \text{ mm}$. Na základě těchto údajů už dokázal určit poloměr křivosti kruhového skla. Určete ho i vy a zamyslete se nad tím, s jakou přesností byl stanoven.

Úloha II.P ... rodičovská

5 bodů

Představte si, že za vámi přijde inteligentní sedmileté dítě a zeptá se: „A co je to ta supravodivost?“ Co všechno byste ho museli naučit a co vše mu postupně vysvětlit, abyste mu tento jev teoreticky mohli objasnit bez užití „lži dětem“¹ na odborné úrovni? Řešení zkuste rozpracovat co nejvíce.

Úloha II.E ... je mi to šumák

8 bodů

Kupte si v lékárně šumivý celaskon nebo cokoliv, co se podává v tabletách určených k rozpuštění ve vodě. Změřte, jak dlouho trvá rozpuštění jedné tablety v závislosti na teplotě vody, do které ji hodíte. Diskutujte příčiny a vymyslete, proč je pozorovaná závislost taková.

Úloha II.S ... procesní

6 bodů

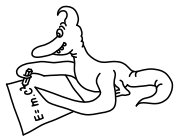
1. Ktoré zo skupiny 4 procesov (izobarický, izochorický, izotermický a adiabatický) môžu byť vratné?
2. Vezmite vzťah $T = pV/(nR)$ s $n = 1 \text{ mol}$, $p = 100 \text{ kPa}$ a $V = 22 \text{ l}$. O koľko sa zmení T , ak p aj V zväčšíme o 10%, 1% a 0,1%? Spočítajte to dvoma spôsobmi: presne a pomocou vzťahu $dT = T_p dp + T_v dV$. Ako sa líšia tieto výsledky?
3. d gymnastika:
 - Ukážte, že $d[Cf(x)] = C d[f(x)]$, kde C je konštanta.
 - Vypočítajte $d(x^2)$ a $d(x^3)$.
 - Ukážte, že $d(1/x) = -dx/x^2$ z definície, teda

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x}.$$

Môže sa vám hodiť $(x+dx)(x-dx) = x^2 - (dx)^2 = x^2$.

- *Bonus:* Platí $\sin(d\vartheta) = d\vartheta$ a $\cos(d\vartheta) = 1$. Taktiež máme súčtový vzorec $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$. Dokážte $d(\sin\vartheta) = \cos\vartheta d\vartheta$.
 - *Bonus:* Podobne ukážte $d(\ln x) = dx/x$ s pomocou $\ln(1+dx) = dx$.
4. Vysvetlite fyzikálne, prečo je izobarická tepelná kapacita väčšia ako izochorická.

¹Význam pojmu „lež dětem“ můžete najít v knížce Věda na Zeměploše; zjednodušeně se jedná o vysvětlení, které není úplně pravdivé, ale má pomoci danou věc alespoň zhruba pochopit, klasicky třeba představa atomů jako malinkatých, pevných kuliček



Řešení I. série

Úloha I.1 ... zahušťující Hofmann

2 body; průměr 1,14; řešilo 102 studentů

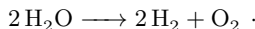
Při elektrolýze vody v Hofmannově přístroji je elektrolytem roztok kyseliny sírové ve vodě. Hmotnost kyseliny v roztoku je prakticky konstantní, ale jak již samotný název napovídá, voda se postupně rozkládá na vodík a kyslík. Tím se zvyšuje zastoupení kyseliny v roztoku. Za jak dlouho stoupne hmotnostní zlomek kyseliny v roztoku na dvojnásobek, pokud roztokem prochází proud $I = 1$ A, původní hmotnostní procento kyseliny bylo $w_0 = 5\%$ a objem roztoku v nádobě byl původně $V_0 = 21$?

Karel opět přemýšlel nad elektrolýzou.

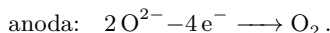
Ze všeho nejdříve si zjistíme, jaká je počáteční hmotnost celého roztoku. Tu spočítáme jednoduše jako

$$m_{\odot} = V_0 \varrho_0,$$

kde $\varrho_0 = 1032 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota 5% roztoku kyseliny sírové, jejíž hodnotu můžeme najít na internetu.² Ze zadání víme, že množství kyseliny sírové se nemění. Aby tedy hmotnostní zlomek stoupl na dvojnásobek, musí hmotnost roztoku klesnout na polovinu, tj. na hodnotu $m_{\odot}/2$. Proto celý úbytek hmotnosti $\Delta m = m_{\odot}/2$ musí být dán rozkladem vody podle rovnice



Jednotlivé děje na elektrodách můžeme zjednodušeně popsat jako



Z Faradayových zákonů elektrolýzy umíme spočítat množství vyloučené látky na elektrodě podle vztahu

$$m = \frac{ItM}{zF},$$

kde I je proud procházející roztokem, t čas, po který elektrolýza probíhá, M molární hmotnost vyloučené látky, z počet elementárních nábojů potřebných pro vyloučení jedné molekuly a $F = 9,65 \cdot 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$ je Faradayova konstanta. Vyberme si jednu vylučovanou látku, třeba kyslík O_2 (výpočet při výběru vodíku je analogický). Z poměru molárních hmotností $M_{\text{O}} = 0,016 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$, $M_{\text{H}_2\text{O}} = 0,018 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ vyplývá, že při rozložení vody o hmotnosti Δm se na anodě vyloučí kyslík o hmotnosti

$$\frac{16}{18} \Delta m = \frac{4}{9} V_0 \varrho_0.$$

Dále si je ještě třeba uvědomit, že na vyloučení jedné molekuly kyslíku o molekulové hmotnosti $M_{\text{O}_2} = 0,032 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ jsou třeba $z = 4$ elektrony. Nyní si již z rovnice výše můžeme vyjádřit t , dosadit hodnoty všech veličin a vypočítat čas, po který musí elektrolýza probíhat

$$t = \frac{zFm_{\text{O}_2}}{IM_{\text{O}_2}} = \frac{4V_0\varrho_0zF}{9IM_{\text{O}_2}} \doteq 128 \text{ dní}.$$

²<http://chemicron.wz.cz/hustoty.html>

Všimněme si, že výsledný čas je veľmi dlhý, čož je ovšem dáno veľkým množstvím vody, ktoré je nutné rozložit.

Veronika Dočkalová
verca@fykos.cz

Úloha I.2 ... výskok z vlaku

2 body; průměr 1,05; řešilo 94 studentů

Ve vlaku, který se může pohybovat po kolejích bez tření, stojí 2 lidé, každý s hmotností m . Kdy dosáhne vlak větší rychlosti? Když oba vyskočí z vlaku naráz, nebo když budou vyskakovat z vlaku postupně? Člověk vyskočí z vlaku relativní rychlostí u (rychlost vyskakujícího člověka vůči vlaku po výskoku).
Radomír vyskakoval z vlaku.

V zadaní nie je uvedené, akým smerom vzhľadom na pohyb vlaku osoby vyskakujú. Keby osoby vyskakovali z vlaku kolmo na smer pohybu, tak to vlaku nedodá žiadnu rýchlosť, keďže vlak sa môže pohybovať len po koľajach. Teda ak by osoby vyskakovali pod nejakým uhlom, môžeme ich rýchlosť rozložiť na zložku kolmú (ktorá nebude mať vplyv na rýchlosť vlaku) a zložku rovnobežnú s pohybom. Najväčšiu zmenu rýchlosti logicky dostaneme, keď z vlaku budeme vyskakovať po smere alebo proti smeru jazdy. Ak by sme vyskakovali v smere jazdy, tak vlak budeme týmto výskokom spomaľovať, teda najvýhodnejšie pre nás je vyskakovať proti smeru jazdy.

Na začiatok si musíme uvedomiť, že v tomto prípade bude platiť zákon zachovania hybnosti (ZZH), ale nebude platiť zákon zachovania energie. Zákon zachovania hybnosti nám hovorí, že hybnosť sústavy hmotných bodov je konštantná.³ V našom prípade

$$p = p_v + p_{o1} + p_{o2} = \text{konst} , \quad (1)$$

pričom p_v je hybnosť vlaku, p_{o1} a p_{o2} sú hybnosti ľudí. Na začiatku sa vlak s ľuďmi pohybuje rýchlosťou v_0 , teda rovnicu (1) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} Mv_0 + mv_0 + mv_0 &= \text{konst} , \\ v_0(M + 2m) &= \text{konst} . \end{aligned}$$

Najskôr si rozoberieme prípad, keď budú vyskakovať osoby postupne. Po výskoku prvej osoby bude mať vlak rýchlosť v_1 . Osoba, ktorá vyskočí z vlaku bude mať rýchlosť $v_1 - u$ (rýchlosť voči zemi). Teda podľa ZZH bude platiť

$$Mv_0 + 2mv_0 = v_1(M + m) + m(v_1 - u) . \quad (2)$$

Následne nám však musí platiť ZZH aj pre jednu osobu a vlak, avšak už sa vlak nepohybuje rýchlosťou v_0 , ale v_1

$$v_1(M + m) = Mv_2 + m(v_2 - u) , \quad (3)$$

kde v_2 je rýchlosť vlaku po skoku druhej osoby a druhá osoba bude mať po výskoku rýchlosť $v_2 - u$. Vidíme, že ľavá strana rovnice (3) je rovnaká ako časť rovnice (2), preto ju dosadíme. Dostávame

$$Mv_0 + 2mv_0 = Mv_2 + m(v_2 - u) + m(v_1 - u) . \quad (4)$$

³Pokiaľ na telesá nepôsobia vonkajšie sily.

Ak obaja vyskočia naraz, tak môžeme zapísať ZZH pre túto situáciu ako

$$Mv_0 + 2mv_0 = v_3M + 2m(v_3 - u), \quad (5)$$

kde v_3 je výsledná rýchlosť vlaku a osoby po výskoku budú mať rýchlosť voči zemi $v_3 - u$.

Vidíme, že ľavé strany rovníc (5) a (4) sa rovnajú, teda ich môžeme porovnať

$$\begin{aligned} v_3M + 2m(v_3 - u) &= Mv_2 + m(v_2 - u) + m(v_1 - u), \\ v_3(M + 2m) - 2mu &= v_2(M + m) - 2mu + mv_1, \\ v_3(M + 2m) &= v_2(M + m) + mv_1, \\ \frac{v_3}{v_2} &= \frac{M + m + m\frac{v_1}{v_2}}{M + 2m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Z rovnice (2) je jednoduchou úvahou možné vidieť, že $v_2 > v_1$. Tým pádom celý zlomok na prevej strane rovnice (6) je menší ako 1. A z toho vyplýva

$$v_3 < v_2,$$

z čoho dostávame záver, že vlak dosiahne väčšiu rýchlosť, ak osoby vyskočia postupne.

Michal Červeňák
miso@fykos.cz

Úloha I.3 ... zlatá koule

3 body; průměr 2,63; řešilo 138 studentů

Zlatá koule má na vzduchu hmotnost $m_1 = 96,25$ g. Při ponoření do vody je vyvážena závažím o hmotnosti $m_2 = 90,25$ g. Rozhodněte, zda je předmět dutý. Pokud ano, určete objem dutiny. Hustota zlata je $\rho_{\text{Au}} = 19,25 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$, hustota vody $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1,000 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Tíhové zrychlení je $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.
Faleš si čtl o Archimédovi.

Na kouli ve vodě působí tíhová síla $F_G = m_1g$ směrem dolů a vztlaková síla dle Archimédova zákona $F_v = \rho_{\text{H}_2\text{O}}V_k g$ směrem nahoru. Soustava se nepohybuje, velikost vektorového součtu těchto sil je tedy rovna velikosti tíhové síly působící na závaží m_2g . Z této rovnosti si můžeme vyjádřit objem koule V_k :

$$m_1g - \rho_{\text{H}_2\text{O}}V_k g = m_2g \quad \Rightarrow \quad V_k = \frac{m_1 - m_2}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = 6 \text{ cm}^3.$$

Nyní si pro porovnání vypočítáme objem zlata v kouli

$$V_{\text{Au}} = \frac{m_1}{\rho_{\text{Au}}} = 5 \text{ cm}^3.$$

Vidíme, že celkový objem koule je větší než objem zlata v ní obsaženého, koule je tedy dutá a objem dutiny je $V_d = V_k - V_{\text{Au}} = 1 \text{ cm}^3$.

Viktor Skoupý
skoupy@fykos.cz

Úloha I.5 ... černobylská

4 body; průměr 2,17; řešilo 90 studentů

Pokud by někdo snědl 5 μg izotopu cesia ^{137}Cs , za jak dlouho bude mít v těle pouze 0,04 % původního množství částic tohoto izotopu? Předpokládejme, že cesium ^{137}Cs má poločas rozpadu 30,42 let a jeho biologický poločas (tedy doba, za kterou se z těla vyloučí právě polovina původního množství látky) je přibližně 15 dní. Zjistěte také, kolik částic se do té doby stihne v těle radioaktivně rozpadnout. *Kiki měla hlad na zkoušce z toxikologie.*

Poznáme rovnici rádioaktivního rozpadu a zadání nám napovídá, že bude asi popisovat aj biologické vylučování

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{t \ln 2}{T}\right),$$

kde N_0 je počet částic v čase $t = 0$ a T je poločas – či už rozpadu alebo biologického vylučovania. Potom je rychlost vylučování (a rovnako aktivita rozpadu) popísaná vzťahom

$$\frac{dN}{dt} = -N(t) \frac{\ln 2}{T}. \quad (7)$$

Keďže sa látka aj rádioaktívne rozpadá, aj biologicky vylučuje. Celkovú rýchlosť odstraňovania získame sčítaním týchto rýchlostí.

$$\frac{dN}{dt} = -N(t) \left(\frac{1}{T_R} + \frac{1}{T_B} \right) \ln 2 = -N(t) \frac{\ln 2}{T_E},$$

kde T_B je biologický poločas, T_R je poločas rozpadu a T_E je efektívny poločas rozpadu. Z tohto môžeme určiť, ako bude množstvo látky v tele klesať, keďže vidíme, že rovnica vyzerá rovnako ako (7). Jej riešenie bude

$$N(t) = N_0 \cdot \exp\left(\frac{t \ln 2}{T_E}\right) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_E}}. \quad (8)$$

Potom pre čas τ , keď $N/N_0 = 4 \cdot 10^{-4}$, dostaneme

$$\tau = -\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) \cdot \frac{T_R T_B}{(T_R + T_B) \ln 2} \doteq 169 \text{ dní}.$$

Pre druhú časť úlohy sa stačí pozrieť na rovnice (7) a (8). Z prvej vieme podiel částic, ktorý sa rozpadne za element času, z druhej zasa, koľko částic v tele v každom čase je. Potom vidíme, že počet částic, ktoré sa rozpadnú za čas dt , je

$$dN_R = N_0 \cdot \frac{\ln 2}{T_R} \cdot \exp\left(-\frac{t(T_R + T_B) \ln 2}{T_R T_B}\right) dt,$$

kde sme zmenili $-$ na $+$, keďže nás zaujíma počet rozpadnutých částic, teda ich úbytok. Toto už len zintegrujeme po čas τ

$$N_R = N_0 \cdot \frac{T_B}{T_R + T_B} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau(T_R + T_B) \ln 2}{T_R T_B}\right) \right].$$

Exponenciála sa samozrejme nezmenila, a teda za ňu dosadíme podľa (8) pomer N/N_0 a vyjadříme N_0 pomerom celkovej hmotnosti a hmotnosti jedného atómu $A_r m_u$, kde $A_r = 137$ je relatívna atómová hmotnosť cézia ^{137}Cs a $m_u \doteq 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg je atómová hmotnostná jednotka.

$$N_R = \frac{m}{A_r m_u} \cdot \frac{T_B}{T_R + T_B} \cdot \left(1 - \frac{N}{N_0} \right).$$

Za tento čas sa teda v tele rozpadne $N_R \doteq 3,0 \cdot 10^{13}$ častíc. Celkovo, teda do úplného odstránenia, keď $N \ll N_0$ (v limite $t \rightarrow \infty$), sa rozpadne len $T_B/(T_R + T_B) \doteq 0,1\%$ látky.

Filip Ayazi
 filip@fykos.cz

Úloha I.P ... dekompresní nemoc

5 bodů; průměr 3,50; řešilo 94 studentů

Jistě jste někdy slyšeli (alespoň třeba ve filmu) o tom, že je nebezpečné se potápět ve velkých hloubkách a ihned poté cestovat letadlem. Pokud člověk toto udělá, hrozí mu tzv. dekompresní nemoc. Popište co nejpřesněji, jaké fyzikální procesy v lidském těle při této „nemoci“ probíhají (jak přesně obecné fyzikální zákony v tomto konkrétním případě působí) a proč jsou pro člověka nebezpečné. Je pro lidi nebezpečná i opačná poslušnost akcí, tedy cestování letadlem a následné potápění? (Při řešení můžete využívat všechny dostupné zdroje informací, ale následně musíte problém popsat vlastními slovy!)

Michal cítil náhlý pokles tlaku po úspěšně složené zkoušce z matematické analýzy.

Kesonová (taktéž dekompresní) nemoc není nemoc v pravém slova smyslu, jedná se spíš o poškození lidského těla vlivem náhlého poklesu tlaku. K dobrému pochopení, co se v lidském těle při této nemoci děje, si nejprve musíme popsat, jak funguje rozpouštění plynů v kapalinách.

Henryho zákon

Henryho zákon popisuje závislost koncentrace rozpuštěného plynu v kapalině na tlaku. Vzorcem jde vyjádřit takto:

$$c = \alpha(t)P, \quad (9)$$

kde c je molární zlomek plynu v kapalině, α je absorpční koeficient pro danou látku a daný plyn, který je obecně závislý na teplotě kapaliny t , a P označuje tlak v kapalině. My se omezíme na případ konstantní teploty, tedy $\alpha(t)$ pro nás bude konstanta, kterou budeme dál značit jen α .

Vznik dekompresní nemoci

Nyní se můžeme začít zabývat tím, co se děje v lidském těle při potápění a následném vynořování. Před ponořením je v krevním řečišti a tkáňových kapalinách určitý tlak, označme ho P_0 a určitá koncentrace atmosférických plynů c_0 (zejména dusíku N_2 , který je v krevním řečišti zastoupen v nevázané podobě nejvíce ze všech plynů). Při ponořování pod vodu roste tlak, který na potápěče působí, roste tedy i tlak v jeho krevním řečišti a tkáňových mocích, který vystoupá až na hodnotu P_1 . Jelikož je člověk teplokrevný tvor, bude jeho teplota stále stejná (nebo jen zanedbatelně jiná). Co se bude v těle potápěče dít s koncentrací rozpuštěných plynů? Odpověď je jednoduchá, stačí se podívat na vzorec (9). Absorpční koeficient α je stále stejný, tlak vzrostl, takže musí vzrůst i koncentrace rozpuštěných plynů. Tento proces probíhá postupně, jak potápěč dýchá, postupně se mu v krvi a tkáňových mocích rozpouští více plynů. Co se nyní stane, když se potápěč náhle vynoří? Tlak v jeho těle se vrátí zpět na hodnotu P_0 a aby byl zachován Henryho zákon, musí se i koncentrace rozpuštěných plynů v jeho těle vrátit na hodnotu c_0 , tento proces ovšem probíhá velmi rychle. Část rozpuštěných plynů v potápěčově těle už dále nemůže zůstat rozpuštěna, místo toho se z tělních tekutin uvolní ve formě plynových bublinek. Tyto bublinky mají velmi negativní vliv na fungování lidského těla, zejména na nervovou a oběhovou soustavu.

Náš potápěč bude cítit bolesti svalů a kloubů, při výraznějším poklesu tlaku (a tedy větším množství uvolněného plynu) se dostaví svalové obrny a selhávání smyslových vjemů, nakonec i ztráta vědomí. Asi největším rizikem je vzduchová embolie (tj. zablokování cév vzduchovými bublinami), která může vyústit až v potápěčovu smrt. Náš potápěč trpí dekompresní nemocí.

Odhad množství uvolněného dusíku

Nyní si zkusíme jen přibližně vypočítat, jaký objem dusíku se v potápěčově těle uvolní, pokud se rychle vynoří z hloubky 50 m pod vodní hladinou. Děláme jen řádový odhad, proto místo s absorpčním koeficientem pro lidskou krev budeme počítat s absorpčním koeficientem pro dvojici dusík N_2 a voda, který je přibližně $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}^{-1}$, což lze najít v tabulkách. Henryho zákon si můžeme upravit do tvaru

$$\Delta c = \Delta P \cdot \alpha \quad (10)$$

Rozdíl tlaku v hloubce 50 m pod vodní hladinou a atmosférického tlaku můžeme odhadnout na $h_{gg} = 0,5 \text{ MPa}$. Když tato čísla dosadíme do vzorce (10) dostáváme, že rozdíl molárních zlomků dusíku v potápěčově těle je přibližně $\Delta c = 9 \cdot 10^{-5}$. Když si uvědomíme, že v lidském těle je přibližně 5 l krve, tedy přibližně 280 molů krve (hustotu i molární hmotnost krve aproximujeme hustotou a molární hmotností vody, která je přibližně $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$). Nakonec tedy dostáváme, že se v potápěčově těle uvolní přibližně $280 \cdot 9 \cdot 10^{-5} = 0,025$ molů dusíku, který ovšem při atmosférickém tlaku zaujme objem $V = 24 \cdot 0,025 \text{ l} = 0,6 \text{ l}$, kde jsme využili znalost toho, že ideální plyn při atmosférickém tlaku zaujímá objem přibližně 24 l.

Vidíme tedy, že objem uvolněného dusíku v potápěčově těle zdaleka není zanedbatelný.

Ochrana proti dekompresní nemoci

Náš potápěč se proti dekompresní nemoci mohl ochránit, kdyby se z velké hloubky (tedy z oblasti velkého tlaku) vynořoval postupně a dělal v průběhu vynořování bezpečnostní zastávky. V takovém případě by totiž pokles tlaku v jeho těle nebyl tolik skokový, koncentrace rozpuštěných plynů v jeho těle by se snižovala postupně a přebytečný plyn by se mohl přes jeho dýchačí soustavu odvést pryč z těla.

Dekompresní nemoc nenastává jen u náhlého vynořování, ale obecně při náhlém poklesu tlaku v lidském těle, tedy například při porušení přetlakové komory letadla ve velké nadmořské výšce atd.

Léčba dekompresní nemoci je velmi jednoduchá, je jen potřeba člověka vrátit do prostředí se zvýšeným tlakem, aby se bublinky plynu v jeho těle opět rozpustili v jeho tělních tekutinách a následně snižovat tlak postupně až na hodnotu atmosférického tlaku. K tomu se používají přetlakové (hyperbarické) komory.

Při opačné posloupnosti akcí, tedy při náhlém zvyšování tlaku uvnitř potápěčova těla mu dekompresní nemoc nehrozí, neboť se žádný plyn v jeho těle neuvolňuje. To ale neznamená, že by to nebylo pro lidské tělo nebezpečné. Při náhlém zvyšování tlaku, který na lidské tělo působí, mohou být nevratně poškozeny různé orgány, zejména ty, které obsahují dutiny naplněné vzduchem (např. hrozí protržení ušních bubínek nebo poškození plic). Je nutné si ale uvědomit, že v tomto případě je lidské tělo poškozeno v důsledku naprosto jiných fyzikálních zákonů, než v případě dekompresní nemoci.

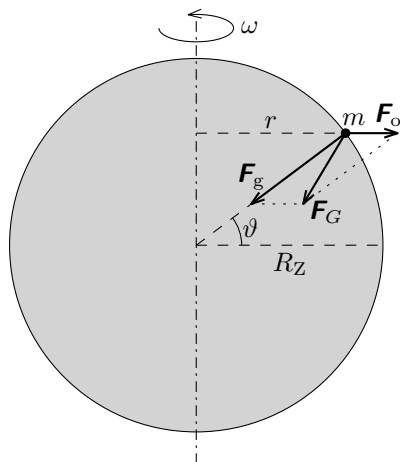
Michal Nožička
nozicka@fykos.cz

Úloha I.E ... malé gé

8 bodů; průměr 5,42; řešilo 86 studentů

Změřte místní tíhové zrychlení alespoň dvěma odlišnými metodami. Tyto metody následně zevrubně porovnejte. Viktor slyšel námitku řešitelů, že je nebví se pořád čvachtat ve vodě.

Na každé těleso na povrchu Země působí gravitační síla Země \mathbf{F}_g a síla odstředivá \mathbf{F}_o způsobená rotací Země kolem své osy. Výslednicí těchto dvou sil je síla tíhová \mathbf{F}_G (viz obrázek 1).



Obr. 1: Tíhová síla \mathbf{F}_G je výslednicí gravitační síly \mathbf{F}_g a odstředivé síly \mathbf{F}_o . Poměr velikostí obou sil na obrázku neodpovídá skutečnosti.

Jelikož velikost odstředivé síly závisí na vzdálenosti r od osy rotace, a tedy na zeměpisné šířce, i velikost tíhové síly závisí na zeměpisné šířce ϑ . Velikost gravitační síly působící na těleso o hmotnosti m je

$$F_g = G \frac{mM_Z}{R_Z^2},$$

kde $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta, $M_Z = 5,973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je hmotnost Země a $R_Z = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$ je její střední poloměr.⁴ Velikost odstředivé síly je

$$F_o = mr\omega^2 = mR_Z \frac{4\pi^2}{T^2} \cos \vartheta,$$

kde ω je úhlová rychlost, kterou vypočítáme z periody $T = 8,6 \cdot 10^4 \text{ s}$ (střední siderický den⁵) a vzdálenost r jsme určili z obrázku 1. Vektory těchto dvou sil svírají úhel $180^\circ - \vartheta$, velikost výslednice (tíhové síly) zjistíme z kosinové věty jako

$$F_G = \sqrt{F_o^2 + F_g^2 - 2F_oF_g \cos \vartheta}.$$

⁴<https://cs.wikipedia.org/wiki/Země>

⁵https://cs.wikipedia.org/wiki/Hvězdný_čas

Velikost tíhového zrychlení g působící na těleso o hmotnosti m pak vypočítáme jako

$$g = \frac{F_G}{m}.$$

Pro naši zeměpisnou šířku $\vartheta = 50^\circ$ pak po dosazení vychází běžně udávaná hodnota $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Ještě poznamenejme, že bylo stanoveno tzv. normální tíhové zrychlení⁶, které vychází z hodnoty pro zeměpisnou šířku 45° u hladiny moře, a jehož tabulková hodnota je $g_0 = 9,806 65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Akcelerometr

Nejjednodušší metoda, která nás může pro měření zrychlení (ať už tíhového či jiného) napadnout, je využití akcelerometru, tedy zařízení měřícího zrychlení. Akcelerometry jsou obsaženy snad ve všech v dnešní době prodávaných chytrých telefonech a tabletech (pro detekci natočení, pádu nebo i poklepání) a také ve fotoaparátech (pro detekci focení na výšku a automatické otočení fotografie) nebo například v některých noteboocích (pro detekci pádu a ochrany pevného disku). Akcelerometry v těchto zařízeních jsou typu MEMS (micro electro-mechanical systems), která měří zrychlení ve třech navzájem kolmých osách pomocí měření pohybu miniaturních ramének se závaží, většinou měřením změny kapacity mezi raménky.

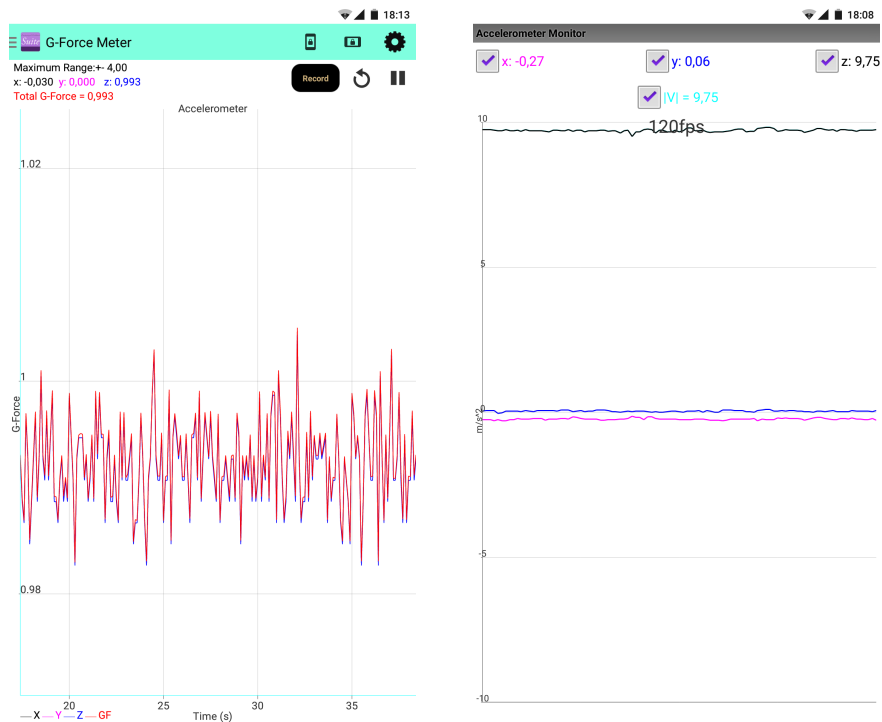
Důležité je poznamenat, že výstupem většiny těchto malých akcelerometrů (ať už mají napěťový či digitální výstup) je (pro každou z os) téměř vždy zrychlení naměřené v násobcích g , přičemž někteří výrobci navíc v datasheetech udávají, že tato jednotka je rovna $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Vzhledem k malé absolutní přesnosti těchto zařízení (koneckonců se běžně nepoužívají k absolutnímu měření zrychlení) je však bezpředmětné, zda jde u tuto hodnotu u všech zařízení nebo se o jednotky procent liší. Pokud nám tedy nějaká aplikace v telefonu zobrazuje zrychlení v jednotkách SI (tedy $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$), pak tato hodnota velmi pravděpodobně vznikla vynásobením hodnoty odečtené z akcelerometru nějakou konstantou blízkou normálnímu tíhovému zrychlení.

Na experiment jsme použili mobilní telefon se systémem Android, přičemž jsem použili dvě různé aplikace – jedna zobrazuje přímo hodnotu vyčtenou z akcelerometru (tedy v násobcích g), druhá tuto hodnotu přepočítává na jednotky SI, viz obrázek 2. Naměřili jsme, že tíhové zrychlení je asi $0,993g$ nebo $9,75 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Na obrázku 2 byl telefon v obou případech ponechán v klidu, můžeme tedy vidět (zejména na levém screenshotu) šum a rozlišení akcelerometru.

Abychom mohli vyhodnotit nejistoty měření, kromě akcelerometru v mobilním telefonu, o kterém jsme neměli žádné podrobné informace, jsme pro experiment použili akcelerometr Analog Devices ADXL345⁷, se kterým komunikujeme pomocí sběrnice I²C. Ten naměřil hodnotu $1,01g$. V datasheetu je deklarovaná jeho chyba (0g Output Deviation from Ideal) jako $\pm 3,5 \cdot 10^{-2}g \doteq 0,35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ v ose x a y a $\pm 4,0 \cdot 10^{-2}g \doteq 0,40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ v ose z . Navíc má tento akcelerometr v sobě uložené údaje o offsetu, které je možné upravit, a tak zařízení kalibrovat. Skutečný offset se může měnit mechanickým namáháním nebo i během pájení. Hodnota, kterou naměříme, se tedy od skutečné může bez předchozí kalibrace značně lišit. Relativní nejistota pak může být i v řádu desítek procent. Z tohoto je patrné, že akcelerometry v mobilních telefonech a podobných zařízeních se pro přesné absolutní měření tíhového zrychlení příliš nehodí, a proto ve zbytku vzorového řešení detailně popíšeme čtyři jiné metody pro měření tíhového zrychlení.

⁶https://cs.wikipedia.org/wiki/Tihov%C3%A9_zrychlen%C3%AD

⁷<http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADXL345.pdf>



Obr. 2: Dvě aplikace pro Android pro zobrazení zrychlení měřeného akcelerometrem. První zobrazuje hodnotu v jednotkách SI, druhá jako násobek g .

Matematické kyvadlo

Mějme hmotný bod (kuličku) hmotnosti m na nehmotném závěsu délky l (tedy matematické kyvadlo). Kuličku vychýlíme tak, že závěs svírá se svislým směrem úhel α (viz obrázek 3). Na kuličku působí svisle dolů tíhová síla \mathbf{F}_G o velikosti $F_G = mg$, kde g je tíhové zrychlení, a tahová síla od závěsu. Tíhovou sílu rozložíme do směru závěsu (složka \mathbf{F}_t) a do směru na tento směr kolmý (složka \mathbf{F}_α). Protože se bod nepohybuje ve směru závěsu, velikost složky \mathbf{F}_t je rovna tahové síle závěsu, vektorový součet těchto sil je tedy nulový. Jediná síla, která zbývá, je \mathbf{F}_α , jejíž velikost vypočítáme z obrázku jako $F_\alpha = F_G \sin \alpha = mg \sin \alpha = mgx/l$. Nyní předpokládejme, že úhel α je velmi malý. Pak síla \mathbf{F}_α působí ve vodorovném směru a hmotný bod se pohybuje po úsečce. Nyní již můžeme napsat pohybovou rovnici

$$F_\alpha = \frac{mg}{l}x = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

kde t je čas, což je rovnice harmonického kmitání, jejímž řešením je

$$x(t) = x_{\max} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}}t - \varphi_0 \right),$$

kde x_{\max} je amplituda kmitů a φ_0 je fáze kmitů v čase $t = 0$. Odtud již vidíme, že perioda kmitu matematického kyvadla je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (11)$$

Při znalosti délky matematického kyvadla a změření jeho periody kmitu tedy můžeme vypočítat tíhové zrychlení. Pro úplnost doplníme, že přesné řešení⁸ (pro libovolný rozkmit $\varphi_m \in (0; \pi)$) dává periodu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi_m}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \left(\frac{\varphi_m}{2}\right) + \dots \right]. \quad (12)$$

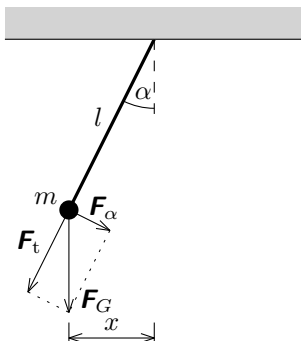
Závislost periody na úhlu rozkmitu je vynesena na obrázku 4. Vidíme, že pro malé úhly je téměř konstantní.

Tento model zanedbává odpor vzduchu. Ten je však při rychlostech, které jsme při experimentech používali, tak malý, že během měření (minimálně 10 kmitů) se amplituda kmitů téměř neměnila. Lze jej tedy zanedbat, aniž bychom výrazně ovlivnili výsledek.

Měření jsme prováděli pomocí optické závory. Pro její konstrukci jsme použili LED a fototranzistor, oboje pracující na vlnové délce 940 nm, viz schéma zapojení na obrázku 5. Proud tekoucí fototranzistorem závisí na intenzitě světla, která na něj dopadá. Jestliže mezi LED a fototranzistor vložíme nějaký předmět, intenzita světla dopadajícího na fototranzistor se sníží, proud jím tekoucí se též sníží, dle Ohmova zákona se tedy sníží napětí na rezistoru o odporu $1 \text{ M}\Omega$ a my pomocí analogové digitálního převodníku detekujeme nižší napětí (jak se vidět na obrázku 6). Napětí detekujeme 10bitovým AD převodníkem v mikrokontroléru ATmega168 (Arduino Nano), který nám naměřené hodnoty odesílá do počítače. Vzorkovací frekvence je asi 1 kHz.

Ukázka části jednoho z naměřených signálů je na obrázku 6. V okamžiku, kdy se okraj kuličky dostane mezi LED a fototranzistor, napětí poklesne, v okamžiku, kdy kulička spojnici

⁸<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1239-presne-reseni-matematickeho-kyvadla>



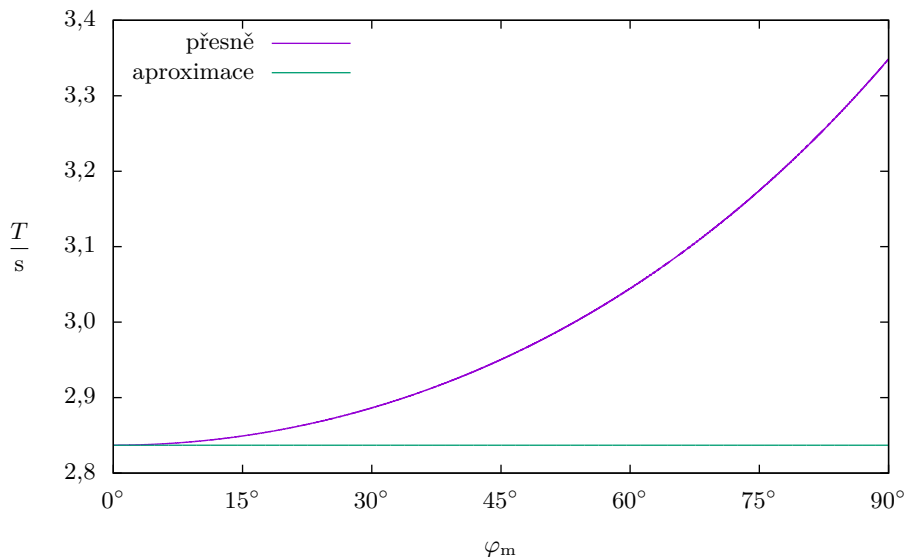
Obr. 3: Rozložení tíhové síly působící na hmotný bod na nehmotném vlákně (matematické kyvadlo).

zdroje a detektoru opustí, napětí opět stoupne. Během jednoho kmitu projde optickou závorou kulička dvakrát. V naměřeném signálu najdeme všechny sestupné hrany s danou úrovní (tedy místa, kdy kulička fototranzistor zastínila). Dále vybereme každé sudé (nebo naopak každé liché) průchody a zjistíme čas mezi nimi. Průměr těchto časů pak budeme považovat za periodu kmitů.

Pro experiment budeme používat kuličku o průměru $d = (17,7 \pm 0,1)$ mm a hmotnosti $m = (7,19 \pm 0,02)$ g. Kulička má v sobě otvor procházející skrz jejím středem, kterým byla protažena tenká nit, jejíž hmotnost byla menší než 0,1 g, tedy zanedbatelná. V případě, že bychom ji zanedbat nechtěli, mohli bychom postupovat jako v případě fyzického kyvadla (viz dále) a pro výpočet tíhového zrychlení použít rovnici (14). Nit zvyšuje moment setrvačnosti kyvadla. V případě jejího zanedbání tedy předpokládáme, že moment setrvačnosti kyvadla je nižší než skutečný, a tedy námi vypočítané tíhové zrychlení je nižší než skutečné.

Měření jsme provedli pro různé délky kyvadla a naměřenou závislost periody na délce vynesli do grafu na obrázku 7. Naměřenou závislost jsme poté fitovali závislostí teoretickou dle rovnice (11), čímž jsme dostali hodnotu tíhového zrychlení $(9,875 \pm 0,009)$ m·s⁻² (zde uvedená odchylka je čistě jen chyba fitu).

Nejistota měření tíhového zrychlení touto metodou se sestává z nejistoty měření periody a nejistoty měření délky kyvadla. Dalším zdrojem nejistoty může být skutečnost, že nit není dokonale ohebná, a vrací tak kuličku do rovnovážné polohy. Abychom tuto skutečnost ilustrovali, nahradili jsme nit za rybářský vlasec o průměru 0,35 mm a experiment opakovali, přičemž jsme naměřili hodnotu tíhového zrychlení 9,97 m·s⁻². Použitá nit je mnohem ohebnější než vlasec, přesto však není dokonale ohebná. Odhadněme nejistotu způsobenou nití na $\Delta_0 g = 0,05$ m·s⁻². Tato nejistota však není symetrická, neboť ohyb nití způsobuje, že naměříme hodnotu tíhového zrychlení vyšší než skutečnou. S touto nejistotou je pak možné naložit různými způsoby. Pro snazší vyhodnocení výsledné nejistoty a jednodušší zápis výsledku (který bude symetrický) budeme tuto nejistotu považovat za symetrickou a naložíme s ní jako se všemi ostatními v tomto měření. Periodu měříme optickou závorou, přičemž při každém měření měříme minimálně dvacet period (které detekujeme jako na obrázku 6, takže během měření proběhne 21 kyvů). Směrodatná odchylka takto naměřených period během jednoho měření se pohybovala pod 1 ms, přičemž hodnota napětí je zaznamenávána každou milisekundu. Nejistotu měření



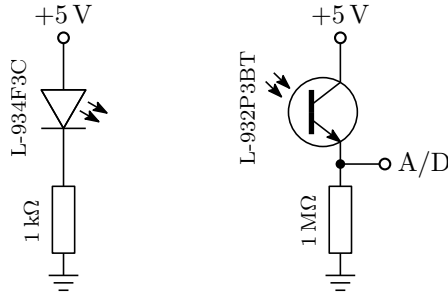
Obr. 4: Závislost periody matematického kyvadla na rozkmitu pro délku kyvadla 2 m a tíhové zrychlení $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

periody tedy odhadujeme na $\Delta T = 2 \text{ ms}$. Nejistotu měření délky kyvadla odhadujeme na $\Delta l = 5 \text{ mm}$. Nejistotu typu B měření tíhového zrychlení pak určíme podle zákona šíření nejistot jako

$$\Delta_{B,g} = \sqrt{\left(\Delta l \frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 + \left(\Delta T \frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 + (\Delta_0 g)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 \Delta l}{T^2}\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 l \Delta T}{T^3}\right)^2 + (\Delta_0 g)^2}.$$

Nejistota závisí na délce kyvadla a jeho periodě. Protože perioda roste s délkou kyvadla (a tedy klesá jak relativní nejistota délky, tak relativní nejistota periody), je zřejmé, že nejvyšší bude nejistota pro nejkratší délku kyvadla, v našem případě $0,08 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Chyba fitu (která vypovídá také o nejistotě typu A) byla v našem případě o řád nižší, tedy zanedbatelná. Toto číslo tedy budeme považovat za celkovou nejistotu měření. Při měření jsme používali malé úhly rozkmitu, do 5° . Podle obrázku 3 se pro tyto úhly přesné řešení od naší aproximace liší jen málo. Podle aproximace pro malé úhly (kdy se jedná o harmonické kmity) pro kyvadlo délky 2 m v tíhovém poli s tíhovým zrychlení o velikosti $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je dle rovnice (11) perioda $2,837 \text{ s}$. Dle přesného řešení v rovnici (12) je pro rozkmit 5° perioda $2,838 \text{ s}$, pro 10° je to $2,842 \text{ s}$ a pro 15° pak $2,848 \text{ s}$. Při úhlech do 5° je chyba menší než 1 ms , tedy menší než výše uvedená nejistota, můžeme ji tedy zanedbat.

Měřením periody kmitu matematického kyvadla byla určena hodnota tíhového zrychlení $(9,88 \pm 0,08) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



Obr. 5: Schéma zapojení optické závory.

Fyzické kyvadlo

Při odvození periody kmitu fyzického kyvadla o hmotnosti m vyjdeme z pohybové rovnice rotačního pohybu

$$M = J \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \quad (13)$$

kde M je moment síly působící na těleso, J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení, α je úhel a t čas. Na kyvadlo působí tíhová síla \mathbf{F}_G . Tu opět, stejně jako v případě odvození uvedeného u matematického kyvadla, rozložíme na dvě složky \mathbf{F}_t a \mathbf{F}_α (viz obrázek 8). Moment síly \mathbf{F}_t vzhledem k ose v bodě O je nulový, moment tíhové síly je tedy roven momentu síly \mathbf{F}_α , tedy

$$M = r_T F_\alpha = r_T mg \sin \alpha.$$

Po dosazení do rovnice (13) dostáváme diferenciální rovnici

$$r_T mg \sin \alpha = J \frac{d^2 \alpha}{dt^2}.$$

Její řešení není snadné, proto použijeme (stejně jako v případě matematického kyvadla) aproximaci $\sin \alpha \approx \alpha$, která platí pro malé úhly α , řekneme tedy, že amplituda kmitů je malá. Tím dostaneme rovnici

$$\frac{r_T mg}{J} \alpha = \frac{d^2 \alpha}{dt^2},$$

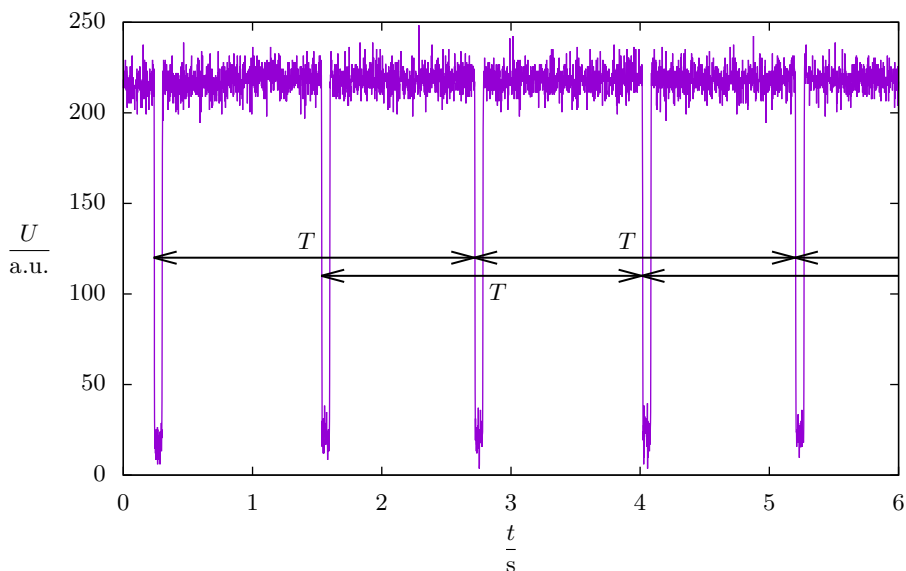
jejíž řešení je

$$\alpha(t) = \alpha_{\max} \sin \left(\sqrt{\frac{mgr_T}{J}} t - \varphi_0 \right),$$

kde α_{\max} je amplituda kmitů a φ_0 je fáze v čase $t = 0$. Perioda kmitů pak je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgr_T}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 J}{mr_T T^2}. \quad (14)$$

Přesné řešení by bylo analogické s tím pro matematické kyvadlo uvedeným v rovnici (12). Všimněme si, že pokud by těleso bylo hmotným bodem ve vzdálenosti l (šlo by o matematické kyvadlo této délky), pak by moment setrvačnosti byl $J = ml^2$, těžiště by bylo ve vzdálenosti $r_T = l$ a dostali bychom skutečně vztah (11).

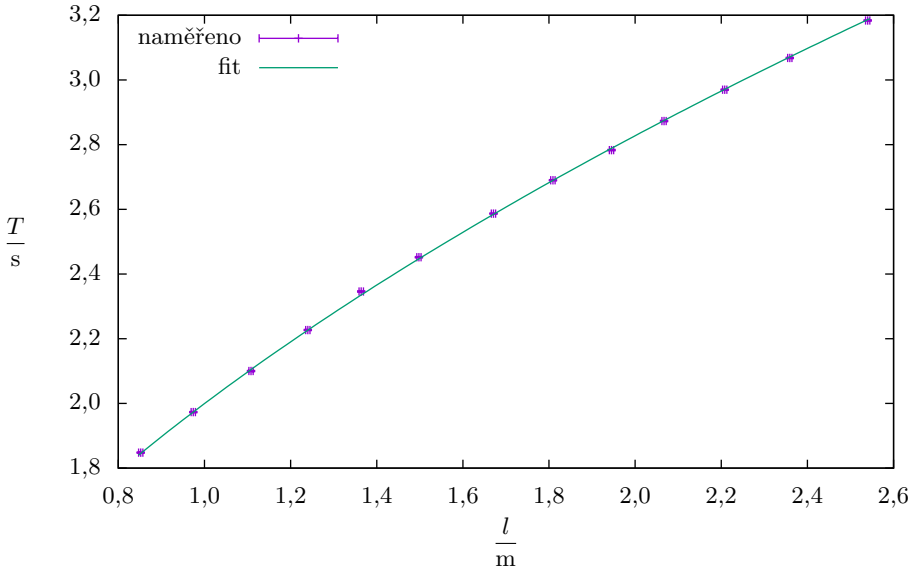


Obr. 6: Signál naměřený optickou závorou při průchodech kuličky (matematické kyvadlo) s vyznačenou periodou. Délka kyvadla byla $l = 1\,544$ mm, průměrná perioda kmitů $T \doteq 2,49$ s.

Jako tuhé těleso jsme použili průhledné plastové pravítko délky 50 cm se dvěma otvory po každé straně. Těmito otvory jsme postupně protáhli hladkou kovovou tyč s menším průměrem (asi o 0,05 mm), čímž vzniklo kluzné uložení. Při tomto experimentu jsme zanedbali tření v uložení, to je však tak malé, že po deseti kmitech se amplituda kmitů změnila jen velmi málo. Hmotnost pravítka byla změřena jako $(149,0 \pm 0,1)$ g. Pro určení polohy těžiště (pravítko má kvůli různým zkosením pouze jednu rovinu symetrie) a zejména momentů setrvačnosti vůči osám dvou otvorů, které budeme používat jako osy otáčení, jsme pravítko důkladně změřili ocelovým pravítkem a posuvným měřítkem a namodelovali v programu Autodesk Inventor, který nám po zadání hmotnosti momenty setrvačnosti vypočítal (viz obrázek 9). Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející otvorem blíže okraji byl určen jako $1,266 \cdot 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, vzhledem k ose procházející druhým otvorem pak $8,752 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Vzdálenost těžiště od osy prvního otvoru byla určena jako 249 mm, od osy druhého otvoru pak 189 mm.

Pro měření periody kmitů jsme opět použili optickou závoru (obrázek 5). Použité pravítko je průhledné nejen pro viditelné světlo, ale i v okolí vlnové délky 940 nm, které naše optická závara používá. To znamená, že naměřený signál bude odlišný od obrázku 6, kde byla použita neprůhledná kulička, viz obrázek 10. Na signálu je viditelné, že signál nejprve klesá, což odpovídá okraji pravítka se stupnicí. Dále signál naopak naroste, což odpovídá místu, kde na pravítku končí zkosení. V tomto místě je povrch pravítka zaoblen a chová se tak patrně jako čočka, která fokusuje světlo z LED. Po tomto zaoblení světlo prochází rovnou částí pravítka a signál se vrátí přibližně na hodnotu, jakou měříme bez pravítka.

Pro každé ze dvou různých os otáčení bylo provedeno deset experimentů, přičemž měření probíhalo minimálně deset kmitů, z kterých jsme získali minimálně dvacet hodnot periody



Obr. 7: Naměřená závislost periody T matematického kyvadla na jeho délce l fitovaná teoretickou závislostí dle rovnice (11).

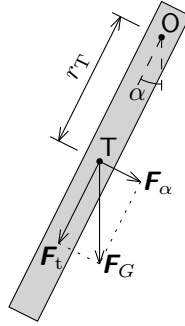
kmitů (viz obrázek 10), celkem tedy minimálně sto hodnot. Z těchto měření jsme vypočítali průměrnou hodnotu, čímž jsme získali hodnotu periody 1,171 s v případě osy blíže okraje pravítka, resp. 1,117 s v případě osy druhé. Po dosazení do rovnice (14) dostáváme hodnotu tíhového zrychlení $9,828 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, resp. $9,829 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Pro výpočet nejistoty typu A (tedy nejistota projevující se drobnými odchylkami při opakovaných měřeních) měření periody jsme nejprve za pomoci N naměřených hodnot periody T_1, T_2, \dots, T_N vypočítali výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru

$$\sigma(\bar{T}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2} \quad (15)$$

a tuto hodnotu poté vynásobili 0,975-kvantilem Studentova rozdělení pro N stupňů volnosti. Tímto zajistíme, že s pravděpodobností 95% se skutečná hodnota nachází v intervalu daném výslednou nejistotou. V našem případě pro 30 hodnot použijeme 0,975-kvantil Studentova rozdělení pro 30 stupňů volnosti, tedy $t_{0,975}(30) = 2,04$, kterým jsme výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru vynásobili, čímž jsme získali rozšířenou nejistotu $\Delta_A T$. Tato hodnota nám po zaokrouhlení na jednu platnou číslici v obou případech vyšla $\Delta_A T = 1 \text{ ms}$. Co se týče nejistot typu B (tedy nejistot zohledňující nepřesnosti použitých měřidel), tak nejistotu typu B měření periody opět odhadujeme na $\Delta_B T = 2 \text{ ms}$. Kombinovaná nejistota měření periody je tedy

$$\Delta T = \sqrt{(\Delta_A T)^2 + (\Delta_B T)^2} \doteq 2 \text{ ms}.$$



Obr. 8: Rozložení tíhové síly působící v těžišti tuhého tělesa volně se otáčejícího kolem bodu O (fyzické kyvadlo).

Chyba způsobená aproximací pohybové rovnice bude v případě malých úhlů, které jsme používali, opět zanedbatelná (viz nejistoty u matematického kyvadla). Nejistotu měření polohy těžiště ocelovým pravítkem (neboli měření rozměrů pravítka) stanovíme na $\Delta r_T = 1$ mm. Nejistota hmotnosti je již výše zmíněna jako $\Delta m = 0,1$ g. Nejistotu momentu setrvačnosti můžeme pouze odhadnout, neboť byla určena na základě CAM modelu pravítka a měření hmotnosti. Správný a přesný postup by byl vypočítat nejistoty metodou Monte Carlo, tedy náhodně (s Gaussovým rozdělením dle příslušných nejistot) měnit rozměry modelu pravítka a sledovat, jak se mění jeho moment setrvačnosti. To by však znamenalo nutnost vytvořit model pravítka v jiném programu, proto se spokojíme s odhadem nejistoty. Aproximujeme proto pravítko za kvádr o stejné hmotnosti m jako má naše pravítko a rozměrech $a = 530$ mm, $b = 51$ mm, $c = 16$ mm, což jsou vnější rozměry našeho pravítka (jde tedy o nejmenší kvádr, do jakého se naše pravítko vejde). Moment setrvačnosti takového kváдру vzhledem k ose procházející jeho těžištěm je

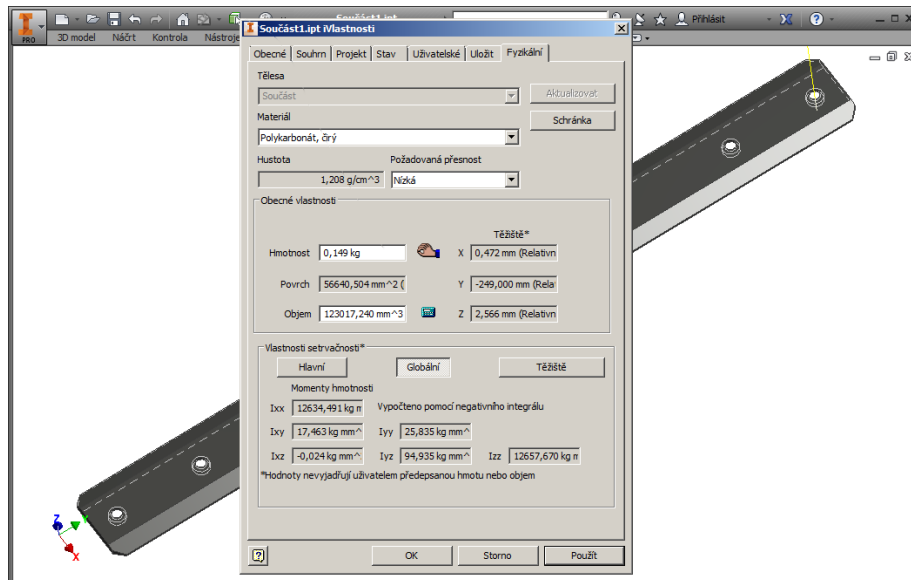
$$J_{k,T} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) .$$

Používáme osu vzdálenou d od hrany kváдру, $a/2 - d$ od těžiště. Podle Steinerovy věty je tedy moment setrvačnosti vůči této ose

$$\begin{aligned} J_{k,d} &= J_{k,T} + m \left(\frac{a}{2} - d \right)^2 = m \left[\frac{1}{12} (a^2 + b^2) + \left(\frac{a}{2} - d \right)^2 \right] = \\ &= m \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} - ad + d^2 \right) . \end{aligned}$$

Nejistotu momentu setrvačnosti pak vypočítáme podle zákona šíření nejistot jako

$$\begin{aligned} \Delta J_{k,d} &= \sqrt{\left(\Delta a \frac{\partial J_{k,d}}{\partial a} \right)^2 + \left(\Delta b \frac{\partial J_{k,d}}{\partial b} \right)^2 + \left(\Delta d \frac{\partial J_{k,d}}{\partial d} \right)^2} = \\ &= m \sqrt{\left[\Delta a \left(\frac{2a}{3} - d \right) \right]^2 + \left(\Delta b \frac{b}{6} \right)^2 + [\Delta d (-a + 2d)]^2} , \end{aligned}$$



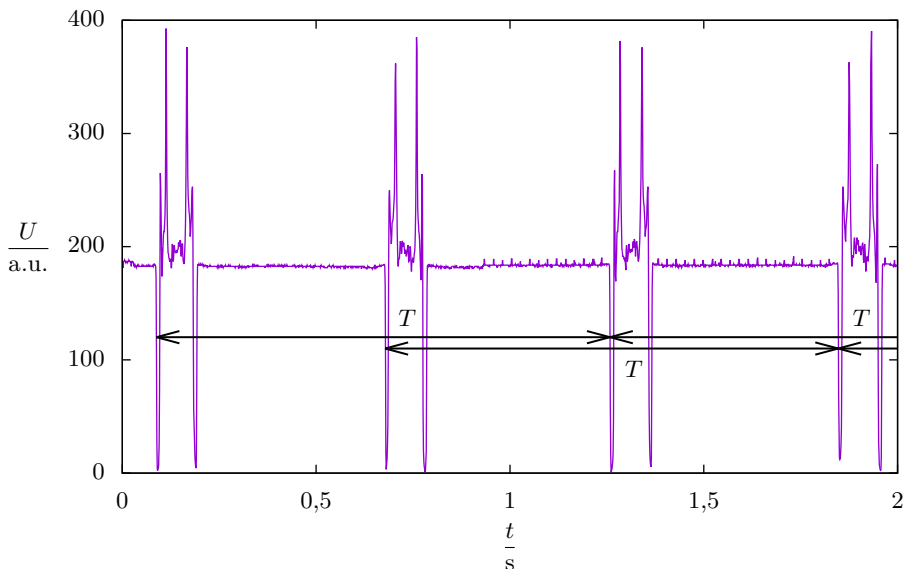
Obr. 9: Z modelu kyvadla (pravítka) v programu Autodesk Inventor můžeme při znalosti hmotnosti určit polohu těžiště a moment setrvačnosti vůči ose, kolem které se kyvadlo otáčí.

kde Δa , Δb , resp. Δd jsou nejistoty měření vzdáleností a , b , d , tedy $\Delta a = \Delta b = \Delta d = 1$ mm. Po dosažení číselných hodnot dostaneme $J_{k,d_1} = (1,276 \pm 0,008) \cdot 10^{-2}$ kg·m², resp. $J_{k,d_2} = (8,84 \pm 0,07) \cdot 10^{-3}$ kg·m², což jsou podobné hodnoty jako hodnoty získané z přesnějších modelů. Vypočítané nejistoty tedy poslouží jako dobrý odhad nejistot momentů setrvačnosti získaných z modelu. Pro výpočet celkové nejistoty měření tíhového zrychlení použijeme zákon šíření nejistot, tedy

$$\begin{aligned} \Delta g &= \sqrt{\left(\Delta J \frac{\partial g}{\partial J}\right)^2 + \left(\Delta m \frac{\partial g}{\partial m}\right)^2 + \left(\Delta r_T \frac{\partial g}{\partial r_T}\right)^2 + \left(\Delta T \frac{\partial g}{\partial T}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\Delta J \frac{4\pi^2}{mr_T T^2}\right)^2 + \left(\Delta m \frac{4\pi^2 J}{m^2 r_T T^2}\right)^2 + \left(\Delta r_T \frac{4\pi^2 J}{mr_T^2 T^2}\right)^2 + \left(\Delta T \frac{8\pi^2 J}{mr_T T^3}\right)^2} = \\ &= \frac{4\pi^2 J}{mr_T T^2} \sqrt{\left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r_T}{r_T}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2}, \end{aligned}$$

kde $\Delta r_T = 1$ mm je nejistota vzdálenosti těžiště od osy otáčení. Po dosažení číselných hodnot zjišťujeme, že nejistota je po zaokrouhlení $0,08$ m·s⁻² v případě použití osy blíže okraji pravítka a $0,10$ m·s⁻² (zde zaokrouhluje na dvě platné číslice, jelikož první číslicí je 1) v případě druhém.

Měřením periody kmitu fyzického kyvadla jsme naměřili tíhové zrychlení $(9,83 \pm 0,08)$ m·s⁻², resp. $(9,83 \pm 0,10)$ m·s⁻².



Obr. 10: Signál naměřený optickou závorou při použití fyzického kyvadla (průhledného pravítka) s vyznačenou periodou.

Volný pád

Má-li těleso v homogenním tíhovém poli s tíhovým zrychlením o velikosti g v čase t_0 rychlost v_0 (kladná rychlost je směrem nahoru, záporná směrem dolů) a nachází-li se ve výšce h_0 , pak se v obecném čase t nachází ve výšce

$$h(t) = h_0 + v_0(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}. \quad (16)$$

Tento vztah získáme, zintegrujeme-li dvakrát druhý Newtonův pohybový zákon.

Pro experiment budeme používat kuličku o průměru $d = (17,2 \pm 0,1)$ mm a hmotnosti $m = (7,25 \pm 0,02)$ g.

Tento model opět zanedbává odpor vzduchu. Měli bychom tedy zhodnotit, do jaké míry může odpor vzduchu ovlivnit naměřené hodnoty tíhového zrychlení. Nejprve vypočítáme maximální hodnotu Reynoldsova čísla

$$Re = \frac{v_{\max} d}{\nu},$$

kde v_{\max} je maximální rychlost kuličky, a $\nu = 1,57 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}$ kinematická viskozita vzduchu. Toto číslo nám říká, zda je proudění kolem kuličky laminární (Re je malé) nebo turbulentní (Re je velké číslo). Maximální rychlost kuličky při pádu z výšky $h_{\max} = 2 \text{ m}$ (tj. maximální výšky, kterou budeme při experimentu používat) odhadneme jako $v_{\max} = \sqrt{2h_{\max}g} \doteq 6,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (tedy rychlost při zanedbání odporu vzduchu). Po dosazení dostaneme $Re \doteq 7 \cdot 10^4$, což je vysoká

hodnota, proudění při maximální rychlosti tedy bude turbulentní. Pak je odporová síla dána Newtonovým vztahem

$$F_{\text{odp}} = \frac{1}{4} \rho v_{\text{max}}^2 S = \frac{1}{8} \pi \rho h_{\text{max}} g d^2,$$

kde $\rho = 1,19 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota vzduchu, $S = \pi d^2/4$ je plocha průmětu kuličky. Zpomalení kuličky při maximální rychlosti dané odporem prostředí pak vypočítáme jako

$$a_{\text{odp}} = \frac{F_{\text{odp}}}{m} = \frac{\pi \rho h_{\text{max}} g d^2}{8m} \doteq 3,8 \cdot 10^{-1} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad (17)$$

což je hodnota o více než řád nižší než hodnota, kterou měříme. Odpor vzduchu tedy můžeme zanedbat, avšak při vyšších rychlostech již bude výsledek ovlivňovat (na což musíme pamatovat při vyhodnocování nejistot měření).

Rovnici (16) můžeme využít pro výpočet tíhového zrychlení, jestliže upustíme těleso (pak je $v_0 = 0$) a změříme čas, za jaký spadne z dané výšky h_0 . Aby bylo naše měření přesnější, zaznamenáme výšku tělesa h v mnoha různých časech t změřenou závislost $h(t)$ fitujeme teoretickým modelem dle rovnice (16). V tomto případě se nemusíme ani omezovat na pohyb s nulovou počáteční rychlostí.

Pohyb tělesa v tíhovém poli jsme zaznamenali na video digitálním fotoaparátem (se snímkovací frekvencí 50 fps) a videa analyzovali v programu Tracker.⁹ Ten umožňuje ve videu trasovat vybraný objekt, výstupem je tedy závislost polohy předmětu na čase. Naměřenou závislost výšky na čase jsme poté fitovali pomocí programu gnuplot¹⁰ (viz graf na obrázku 12), čímž jsme pro každé měření získali hodnotu zrychlení, s jakou se těleso pohybovalo. Celý experiment jsme opakovali desetkrát, přičemž v polovině měření šlo o pouhé upuštění tělesa (tedy $v_0 = 0$), v druhé polovině šlo o vrh svisle vzhůru ($v_0 > 0$).

Poznamenejme, že stejný experiment lze realizovat i s pomocí stroboskopu (viz obrázek 13), kdy pohyb kuličky fotografujeme s dlouhou expozicí. Pak máme na jediném snímku zaznamenanou polohu kuličky v mnoha různých časech (dle frekvence stroboskopu).

Nejistoty tohoto měření budou dány zejména nejistotou měření polohy a též zanedbáním odporu vzduchu. Nejistota měření polohy na videu se skládá z nejistoty kalibrace délky v obrazu a z nejistoty určení polohy kuličky v obrazu. Celkem nejistotu určení polohy odhadujeme na asi 2 cm. V rovnici (17) jsme vypočítali, že pro maximální rychlost, kterou používáme, je skutečné zrychlení menší asi o $0,38 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ než tíhové. Při nulové rychlosti je však zrychlení přímo rovno tíhovému. Proto odhadněme, že zanedbání odporu vzduchu přidává do výsledku nejistotu asi $0,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Celkovou nejistotu měření tíhového zrychlení touto metodou odhadujeme na asi $0,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

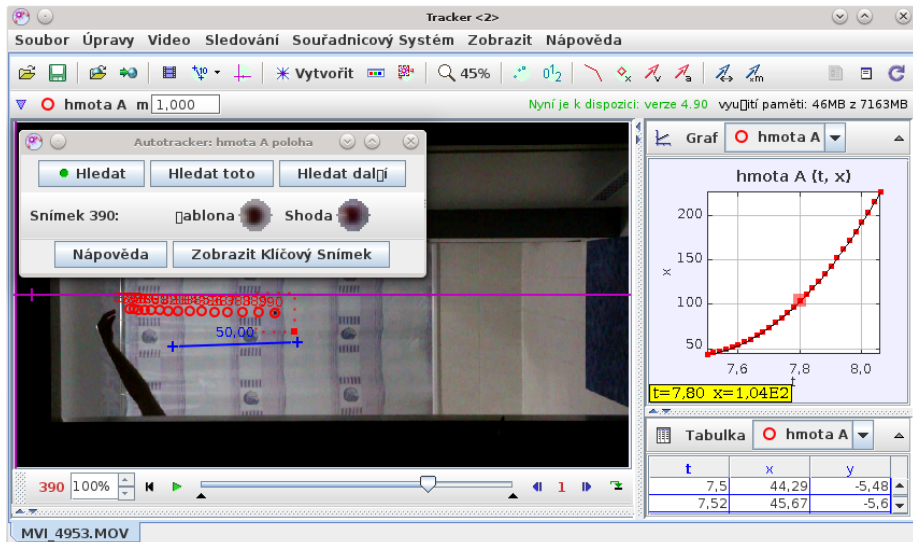
Pomocí analýzy pohybu kuličky při volném pádu bylo naměřena hodnota tíhového zrychlení $g = (9,9 \pm 0,3) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Pohyb po kružnici

Mějme hmotný bod o hmotnosti m na nehmotném závěsu délky l . Tento bod rozpočujme tak, že bude konat rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru r s úhlovou frekvencí ω (a tedy periodou $T = 2\pi/\omega$). Na tento hmotný bod působí tíhová síla \mathbf{F}_G směrem svisle dolů a tahová síla od závěsu \mathbf{F}_t , která působí ve směru závěsu, tedy se svislým směrem svírá úhel α takový,

⁹<http://physlets.org/tracker>

¹⁰<http://www.gnuplot.info>



Obr. 11: Screenshot programu Tracker, který dokáže ve videu sledovat pohyb vybraného tělesa. Zde sledujeme pohyb tělesa vrženého svisle vzhůru v tíhovém poli.

že $\sin \alpha = r/l$ (viz obrázek 14). Víme, že hmotný bod se pohybuje po vodorovné kružnici, ve svislém směru tedy musí být výslednice sil nulová a ve vodorovném musí být její velikost rovna $F_d = mr\omega^2$ (dostředivá síla). Napíšeme si velikosti obou sil ve složkách (ve válcových souřadnicích, první složka je ve směru r , druhá ve svislém směru):

$$\mathbf{F}_t = (F_t \sin \alpha; F_t \cos \alpha) = \left(F_t \frac{r}{l}; F_t \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l} \right).$$

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{g} = (0; -mg).$$

Jak jsme již řekli, vzhledem k pohybu po kružnici musí platit

$$\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_G = (mr\omega^2; 0),$$

což přepíšeme pro každou složku zvlášť jako soustavu dvou rovnic

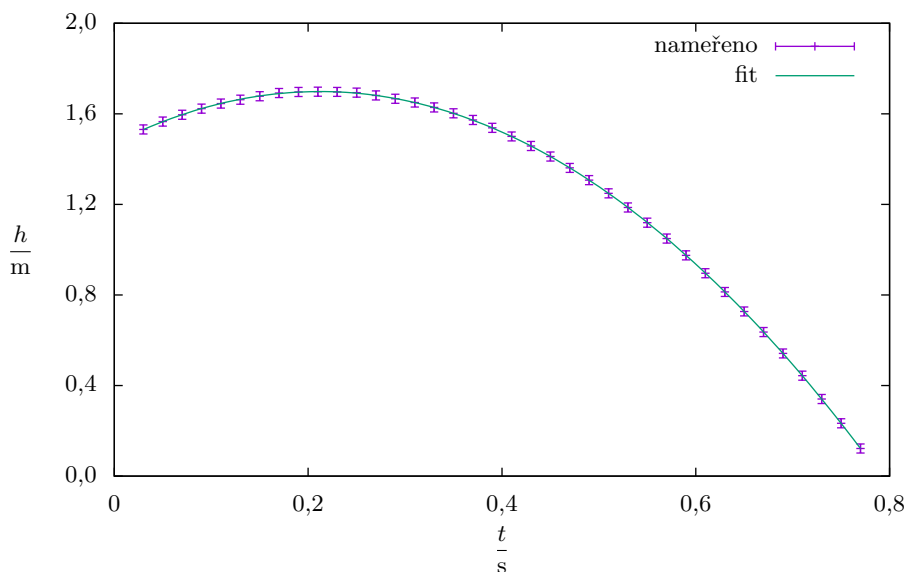
$$F_t \frac{r}{l} = mr\omega^2,$$

$$F_t \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l} - mg = 0.$$

Z druhé rovnice vyjádříme F_t , dosadíme do první a vyjádříme tíhové zrychlení

$$g = \omega^2 \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \sqrt{l^2 - r^2}. \quad (18)$$

Při změření periody a poloměru oběhu a délky závěsu tedy můžeme vypočítat tíhové zrychlení.

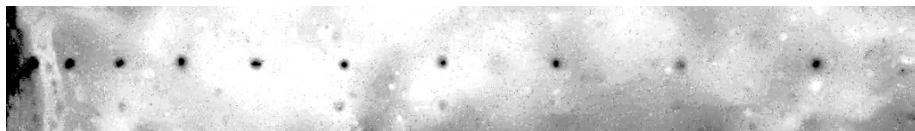


Obr. 12: Naměřená závislost výšky kuličky při vrhu svisle vzhůru fitovaná teoretickou závislostí danou rovnicí (16). Z tohoto konkrétního měření bylo naměřeno tíhové zrychlení $g = 10,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

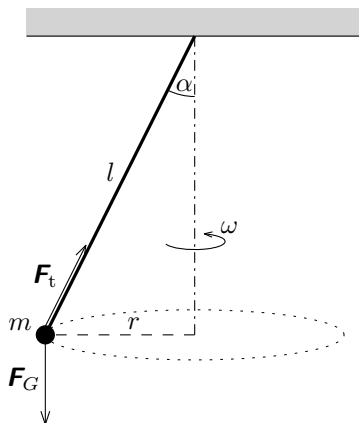
Pro měření jsme použili opět kuličku zavěšenou na tenké niti (se zanedbatelnou hmotností oproti hmotnosti kuličky), kterou jsme používali jako matematické kyvadlo. Kuličku jsme zavěsili tak, že její těžiště bylo vzdáleno $l = (1114 \pm 5) \text{ mm}$ od bodu, kolem kterého se závěs otáčel. Pod tento bod jsme umístili fotoaparát a pohyb kuličky zaznamenali jako video, které jsme opět zpracovali v programu Tracker (obrázek 15).

Ukázka naměřené trajektorie je na obrázku 16. Vidíme, že kulička se bohužel nepohybuje přesně po kružnici, ale spíše po elipse. Lépe se nám bohužel kuličku rozpohybovat nepodařilo, a tak tuto nedokonalost zahrneme do nejistot měření. Poloměr trajektorie se navíc postupně vlivem odporu vzduchu zmenšuje, podle rovnice (18) se tedy i mění perioda. Pro každý jeden oběh kuličky tedy periodu a poloměr změříme samostatně, čímž vliv odporu vzduchu v podstatě eliminujeme, protože nejistota způsobená odlišností trajektorie od kružnice poté bude mnohem vyšší než nejistota způsobená zanedbáním odporu vzduchu a z něj vyplývající změny poloměru a periody během jednoho oběhu.

Nejistota měření se bude skládat z nejistoty měření periody oběhu, délky závěsu a poloměru oběhu. Periodu odečítáme z naměřených poloh, nejistotu odhadneme na dva snímky, tedy $\Delta_B T = 2/50 \text{ s} = 40 \text{ ms}$. Nejistota měření délky (přesněji polohy těžiště kuličky) je $\Delta_B l = 5 \text{ mm}$. Do nejistoty měření poloměru oběhu musíme zahrnout i fakt, že kulička neopisuje přesně kružnici. Vypočítáme tedy výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru poloměru oběhu během každé periody podle rovnice (15) a její nejvyšší hodnotu budeme považovat za nejistotu typu B měření poloměru oběhu. Tato byla u našich měření nejvýše $\Delta_B r = 14 \text{ mm}$ (opět zaokrouhlujeme nejistotu na dvě platné číslice, protože první číslice je 1).



Obr. 13: Pohyb kuličky osvětlené stroboskopem (frekvence 50 Hz) v tíhovém poli (tíhové zrychlení směřuje doprava).



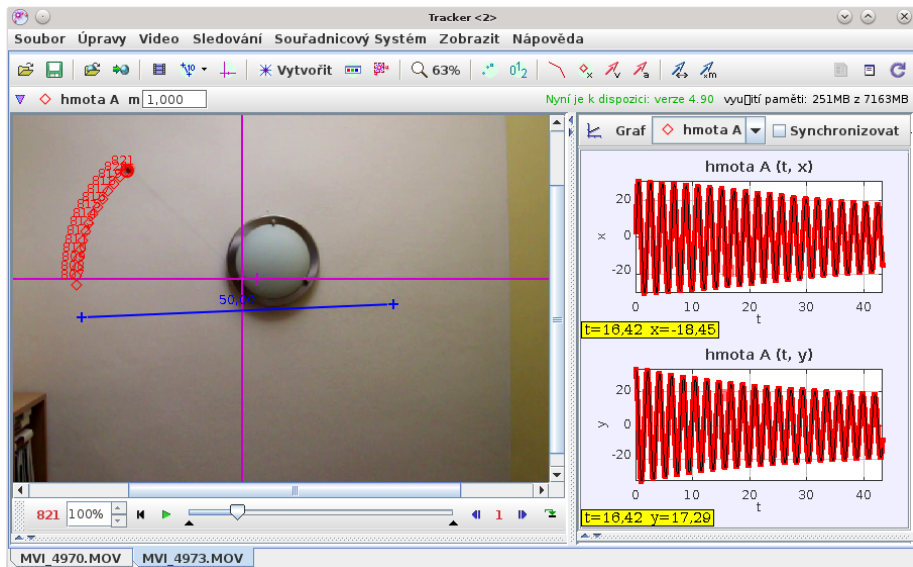
Obr. 14: Hmotný bod na nehmotném závěsu konající rovnoměrný pohyb po kružnici.

Nejistota daná nepřesností měření polohy je pak vůči této nejistotě zanedbatelná. Výslednou nejistotu typu B měření tíhového zrychlení vypočítáme podle zákona šíření nejistot jako

$$\begin{aligned} \Delta_B g &= \sqrt{\left(\Delta_B T \frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 + \left(\Delta_B l \frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 + \left(\Delta_B r \frac{\partial g}{\partial r}\right)^2} + = \\ &= \sqrt{\left(\Delta_B T \frac{8\pi^2}{T^3} \sqrt{l^2 - r^2}\right)^2 + \left(\Delta_B l \frac{4\pi^2 l}{T^2 \sqrt{l^2 - r^2}}\right)^2 + \left(\Delta_B r \frac{4\pi^2 r}{T^2 \sqrt{l^2 - r^2}}\right)^2} = \\ &= \frac{4\pi^2}{T^2} \sqrt{l^2 - r^2} \sqrt{\left(\frac{2\Delta_B T}{T}\right)^2 + \left(\Delta_B l \frac{l}{l^2 - r^2}\right)^2 + \left(\Delta_B r \frac{r}{l^2 - r^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že nejistota bude nejvyšší pro nejmenší periodu a poloměr, proto jsme dosadili právě tyto hodnoty, čímž jsme dostali $\Delta_B g = 0,19 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Co se týče nejistoty typu A, tu jsme pro všechny naměřené hodnoty tíhového zrychlení vypočítali dle rovnice (15) a následného textu, přičemž nám vyšlo $\Delta_A g = 0,04 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Výsledná nejistota měření tíhového zrychlení je tedy $\Delta g = \sqrt{(\Delta_A g)^2 + (\Delta_B g)^2} = 0,19 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Touto metodou tedy bylo naměřené tíhové zrychlení $g = (9,77 \pm 0,19) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



Obr. 15: Video kuličky pohybující se na závěsu po kružnici v programu Tracker.

Závěr

Změřili jsme velikost tíhového zrychlení pěti různými metodami:

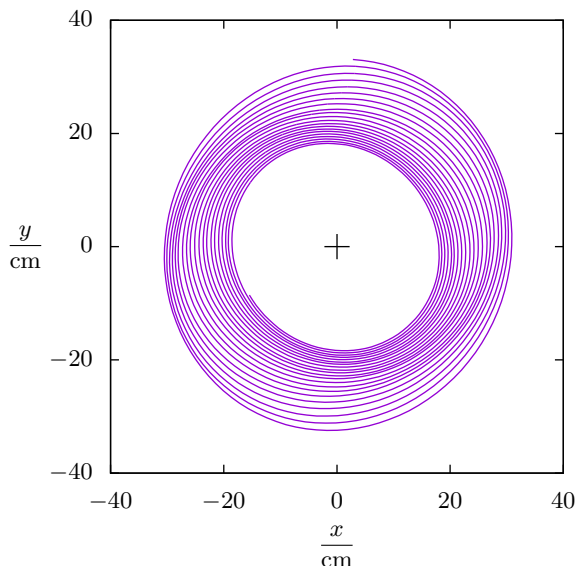
- akcelerometrem (ten se však pro přesné absolutní měření tíhového zrychlení příliš nehodí), naměřená hodnota byla $9,75 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
- matematickým kyvadlem: $(9,88 \pm 0,08) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$,
- fyzickým kyvadlem: $(9,83 \pm 0,10) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$,
- pomocí volného pádu: $(9,9 \pm 0,3) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$,
- pomocí pohybu hmotného bodu po kružnici: $(9,77 \pm 0,19) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

V rámci nejistot měření se hodnoty naměřené pomocí různých metod shodují, přičemž nejnižší nejistota měření byla stanovena u měření pomocí matematického kyvadla, pomocí kterého byla naměřena hodnota $g = (9,88 \pm 0,08) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, která v rámci nejistot měření odpovídá běžně udávané a teoreticky vypočítané hodnotě $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Komentáře k došlým řešením

Vzhledem k tomu, že se jednalo o experimentální úlohu první série, bylo hodnocení poměrně mírné, určitě ale lze doporučit, abyste mrkli do sekce Experimenty na FYKOSích stránkách a nastudovali, co všechno by řešení experimentální úlohy mělo zahrnovat. Mnohdy se totiž nedá říct, že byste měli úlohu špatně, ale pouze vám v ní něco chybí na to, abyste mohli dostat plný počet bodů.

Většina z vás si našla vhodné dvě metody, jak změřit tíhové zrychlení, přesto se v řešeních objevovaly různé nedostatky. Velmi málo řešení se například věnovalo tomu, co to vlastně tíhové zrychlení je, což není na škodu v teoretickém úvodu zmínit, když už se jeho měřením chceme



Obr. 16: Naměřená trajektorie kuličky na závěsu.

zabývat, někomu to možná může připadat triviální a zbytečné, ale alespoň by pak třeba tolik z vás netrvalo na tom, že měří gravitační zrychlení, nebo dokonce gravitační konstantu. K dalším tradičním zlovykům patří opisování spousty desetinných míst z kalkulačky. To, co napíšete jako výsledek, by mělo odrážet přesnost, jaké vaše měření dosahuje. S tím souvisí to, že byste neměli zapomínat určit nejistoty měření.

Poslední věc, na kterou bychom vás rádi upozornili, už vlastně s fyzikou ani nesouvisí. Čtete si po sobě, co napíšete. Můžete tak eliminovat netriviální množství hrubek, překlepů, nesmyslných vět, nedokončených myšlenek a podobně. Ve FYKOSu sice tohle v podstatě neřešíme, třeba se i rádi zasmějeme tomu, že chcete měřit tíhové zrychlení pomocí matematického kladiva, ale jinde vás může docela shodit, když si podobné věci nepohlídáte.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha I.S ... zahřívací

6 bodů; průměr 4,81; řešilo 88 studentů

1. Na rozezhřátí a seznámení se s čísly zjistěte, do jaké výšky byste mohli zdvihnout průměrného člověka (70 kg), využijete-li celou energii běžné tyčinky Mars (okolo 250 Cal pro 50 g tyčinku). Také vypočtete, jaká energie je $k_B T$ při pokojové teplotě a vyjádřete ji také v elektronvoltech (pokud neznáte takovou jednotku energie, vězte, že je to energie, kterou získá elektron při urychlení na rozdíl potenciálů 1 V, a číselně $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

2. Se stavovou rovnicí se dá hodně cvičit. Když namísto počtu částic použijete molární množství n , dostanete

$$pV = nN_A k_B T,$$

kde se součin $N_A k_B$ značí R a nazývá se univerzální plynová konstanta. Určete její hodnotu. Také dále upravte stavovou rovnici do tvaru, ve kterém se vyskytuje hmotnost plynu, a potom do tvaru obsahujícího hustotu plynu.

3. Určete objem molu plynu při pokojové teplotě. Toto číslo je užitečné znát zpaměti.
 4. Nakonec trochu úvahová úloha. Povšimněte si, že v diskusi o práci ideálního plynu jsme automaticky použili tlak plynu. Zkuste sebe a mě přesvědčit, že je to ten správný tlak – já bych totiž namítal, že jsme mohli použít okolní tlak nebo dokonce rozdíl tlaků vně a uvnitř. Poznámka: Hodnocení této části bude mírné, nebojte se zamyslet a napsat cokoli, na co přijдете.

1. Z textu seriálu vieme, že $1 \text{ Cal} \doteq 4\,200 \text{ J}$, v Marske je teda $E_{\text{Mars}} = 4\,200 \text{ J} \cdot 250 = 1,05 \text{ MJ}$ energie. Túto energiu premeníme na potenciálnu energiu $m_p g \Delta h$ zdvihnutím priemerného človeka s hmotnosťou $m_p = 70 \text{ kg}$ o Δh , odkiaľ vyjadríme zdvihnutie

$$\Delta h = \frac{E_{\text{Mars}}}{m_p g} \doteq 1,5 \text{ km}.$$

Všimnite si, že pri účinnosti človeka niekoľko desiatok percent vám stačí na slušnú horskú túru len pár takýchto tyčínok (čo aj potvrdzuje skúsenosť).

Izbová teplota $T_i = 20^\circ \text{C} \doteq 293 \text{ K}$ zodpovedá energii

$$E_{\text{term}} = k_B T_i \doteq 4,0 \cdot 10^{-21} \text{ J} \doteq 25 \text{ meV}.$$

Môžeme ju nazvať *termálnou* energiou, pretože približne takúto kinetickú energiu budú mať jednotlivé molekuly uložené vo svojom neusporiadanom pohybe.

2. Vynásobením dvoch konštánt dostaneme¹¹ $R = k_B N_A \doteq 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Ak vieme, koľko váži jeden mol plynu (tzv. molová hmotnosť, značíme M), počet molov zistíme z hmotnosti m jednoducho ako $n = m/M$

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

Ďalej už stačí rovnicu len vydeliť objemom

$$p = \frac{\rho}{M} RT.$$

¹¹Ak si chcete zapamätať toto číslo, všimnite si, že stačí obrátiť poradie číslic v Boltzmannovej konštan-
 te $k_B \doteq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. Rád Boltzmannovej konštanty si môžete zapamätať pomocou Avogadroho čísla:
 v oboch je to 23, len jedna konštantka je (v SI) maličká a druhá obrovská.

3. Dosadíme typický atmosférický tlak $p_a = 101 \text{ kPa}$, $n = 1 \text{ mol}$ a teplotu T_i do stavovej rovnice a dostávame

$$V = \frac{nRT_i}{p_a} \doteq 241.$$

Odtiaľto si môžete napríklad ľahko dopočítať približnú hustotu plynu: mol napr. N_2 váži 28 g a má objem tých 241, teda bude mať hustotu okolo $\rho_{\text{N}_2} \doteq 1,2 \text{ g}\cdot\text{l}^{-1}$.

4. Možno najjednoduchší argument je takzvaný limitný prípad, čo pre plyn znamená vákuum: *Vákuum nemôže konať prácu, no plyn môže konať prácu, hoci by bol v nádobe umiestnenej vo vákuu, stačí aby napríklad tlačil na pružinku.* Ak túto úvahu rozvineme ďalej, tak vidíme, že vonkajší plyn je len jedna z možných pružín, do ktorej sa môže prenášať energia pri zmene objemu vnútorného plynu.

Dúfal som, že táto úloha vás donúti premýšľať, čo sa môže stať, ak je vonkajší a vnútorný tlak rozdielny. Ak by sme v takomto systéme nechali vnútorný plyn sa voľne rozpínať, prudké vyrovnanie tlakov by spôsobilo dej, ktorý už nevieme popísať v rámci rovnovážnej termodynamiky. Pri pohybe piestu by sa nestíhal vyrovnávať tlak a ako uvidíme v druhom dieli seriálu, takýto proces je fundamentálne iný ako pomalé posúvanie. Toto pomalé posúvanie samozrejme môžeme dosiahnuť, napríklad zarážkami, pružinou alebo inak; pričom takéto vylepšenia spôsobia, že plyn vo vnútri bude z vonka cítiť prakticky rovnaký tlak, akým tlačí on sám.

Poznámky ku riešeniam

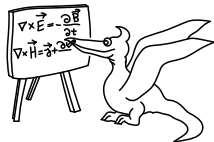
V prvej časti úlohy máme možnosť sa zamyslieť nad rádom výsledku: jedna Marska má dost veľa energie (preto sa hovorí, je ľahšie chudnúť obmedzením jedla ako cvičením). Ak ste sa pomýlili pri prepočte na Jouly a vyšlo vám 1,5 m, niečo asi nebude v poriadku. Podľa tohoto výsledku by aj dokonale účinný človek potreboval výstup po dlhších schodoch niekoľkonásobok dennej dávky energie.

Pri uvádzaní číselných výsledkov sa treba riadiť úsudkom, prizerať na chybu a vhodne zaokrúhľovať. Ak niečo odhadujeme pre typického človeka alebo pre izbovú teplotu, tieto veličiny sme odhadli s presnosťou na pár percent, a tak teda uvádzame aj výsledok: ak by sme počítali s teplotou 21 °C, tretie desiatinné miesto výsledku sa zmení, teda už nenesie veľmi dôležité informácie a nemusíme ho uviesť.

Ak ste na pochybách, koľko miest uvádzať, dobré (ale približné) pravidlo je pozrieť sa na počet *platných číslic*¹² a uviesť výsledok na rovnaký počet. Nebojte sa ma, tu nemá zmysel byť prísny a hodnotiť, či ste použili 2 alebo 3 platné cifry vo výsledku, no 2 alebo 6, to už je rozdiel. Veľa šťastia do ďalšieho dielu seriálu!

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

¹²Číslo 729 má 3 platné cifry, $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ taktiež. Vzdialenosť 0,000 21 km má len dve platné cifry, tie zvyšné nuly sú len nevhodná voľba jednotiek. Ak chcete zdôrazniť, že máte presne 4 metre, s chybou v milimetroch, môžete napísať 4,00 m – ďalšie desiatinné miesto sú tie milimetre, kde si nie ste istý. Hodnota ako 100 kg je nejednoznačná (môžu byť 1 alebo 3 platné cifry), takže treba buď ďalej pátrať alebo odhadnúť chybu (čo je dôležitá schopnosť).



Seriál: Termodynamické procesy

Minule sme sa venovali zákonu zachovania energie. Pre ideálny plyn sme ho potom vedeli jednoducho použiť, pretože jeho vnútorná energia je rovná $U = sk_{\text{B}}NT/2$. Spomenuli sme ale, že analogický vzorec vieme odvodiť pre veľké množstvo fyzikálnych systémov (často je komplikovanejší).

Veľmi dôležité je, že tento vzorec platí pre systém v *termodynamicknej rovnováhe*. Termodynamická rovnováha je taký stav, keď vieme popísať termodynamické (môžeme povedať aj makroskopické) vlastnosti systému pomocou niekoľko málo parametrov, ktoré sa nemenia. Pre ideálny plyn¹³ sú tieto parametre napríklad dvojica tlak, teplota. Všetky podstatné veci vieme totiž dopočítať (objem, energiu, tepelnú kapacitu...) pomocou nich. Nie je pravda, že určujú všetky vlastnosti systému: nehovoria nám presné polohy a rýchlosti jednotlivých molekúl. To nám ale vyhovuje, pretože všetko je výrazne jednoduchšie.

Kedy nie je ideálny plyn v rovnováhe? V praxi vtedy, keď nemá všade rovnakú teplotu, tlak alebo hustotu častíc. V krabici, ktorá má všade na stenách teplotu T a tlak p , no v strede vákuum, by sa takmer okamžite vyrovnal tlak a ustálil na novej hodnote.

Zo skúsenosti vieme, že plyn sa po istom čase dostane do rovnováhy. Takúto vlastnosť budeme požadovať od všetkých systémov, ktoré budeme skúmať.

Rovnováha je problematický pojem hneď z dvoch dôvodov. Po prvé, za dostatočne dlhý čas sa zmení každý systém: kvôli vývoju vesmíru, kvôli rádioaktívnym procesom alebo chemickým reakciám. Druhý problém je, že môžeme mať materiál pri rovnakých termodynamických parametroch, ktorý je ale v rôznych stavoch. Inak povedané, jeho stav závisí na histórii, akou sme sa do toho stavu dostali. To je pre rovnováhu veľký problém, pretože systém nevieme popísať len termodynamickými parametrami. Príkladom je kalená oceľ – jej štruktúra a vlastnosti závisia od toho, ako prudko sme ju schladili.

Oba tieto príklady hovoria, že definícia rovnováhy je *fyzikálna definícia*. Teda ju treba aplikovať s rozumom a keď natrafíme na paradox, treba skontrolovať, či s ňou nie je problém.

Procesy

Rovnováha je užitočná, budeme totiž uvažovať procesy, ktoré spájajú dva rovnovážne stavy systému.

Ak proces prebieha dostatočne pomaly, systém sa po každej malej zmene môže dostať blízko ku rovnováhe. Takýto proces nazývame *kvázistatický* (alebo niekedy aj *rovnovážny*, pretože prechádza sériou rovnovážnych stavov).

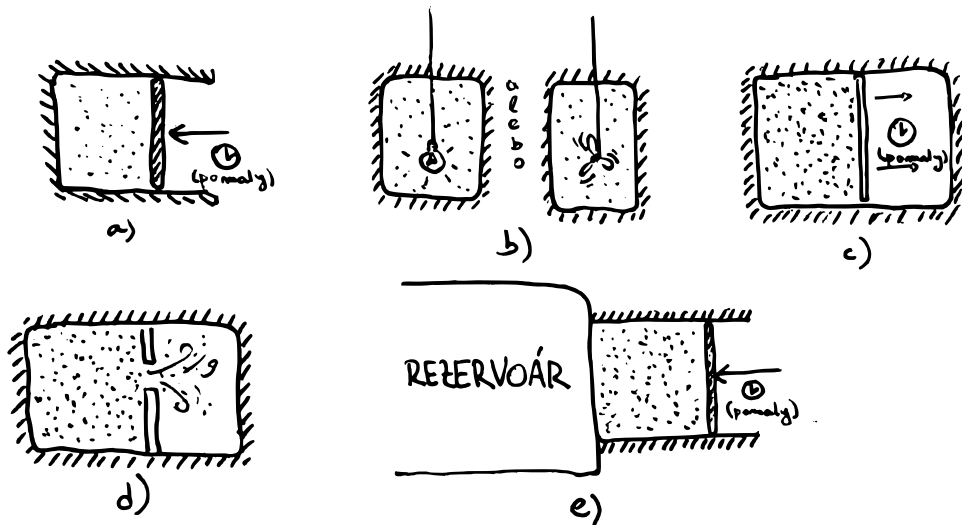
Trochu abstraktnejšia vlastnosť je *vratnosť*: proces je vratný, ak môže prebiehať v oboch smeroch. Tým myslíme, že sa v každom momente môžeme zastaviť a otočiť sa, takže sa všetky termodynamické veličiny menia, akoby sme vracali čas. Napríklad, ak pomaly stláčame plyn, opačný proces bude pomalé rozpínanie: tlak, teplota aj objem sa dostanú do pôvodných hodnôt.

Ako spolu súvisia tieto vlastnosti? Vratné procesy sú kvázistatické, no naopak to platíť nemusí. Proces, ktorý nie je kvázistatický, nevieme totiž hocikedy zastaviť, systém sa bude hýbať ďalej do rovnováhy.

¹³ Počas tohoto dielu seriálu budeme držať počet častíc plynu fixný.

To, že pomalý proces môže byť nevratný, súvisí s uvoľňovaním tepla. Energii uloženú v teple totiž nevieme úplne premeniť späť na mechanickú energiu. Ak sa teda pri procese premieňa práca na teplo nevhodným spôsobom, tak opačný proces nevykonáme. Táto nevratnosť je obsahom druhého termodynamického zákona, na ten si ale ešte chvíľu počkáme.

Najlepšie je vybudovať si intuíciu o procesoch na nejakých príkladoch, pozrime sa teda na ne na obrázku 17.



Obr. 17: Termodynamické procesy.

Typický príklad rovnovážneho kvázistatického procesu je pomalé stláčanie plynu umiestneného v izolovanej nádobe (proces a) – stačí pomaly púšťať piest a dostaneme späť rovnakú prácu, akú sme vykonali. Ak sa však pri pohybe piestu uvoľňovalo teplo v dôsledku trenia, proces by už nebol vratný.

Ak do izolovanej nádoby umiestnime dostatočne slabú žiarovku, proces bude opäť kvázistatický, ale nevratný. Rovnaký efekt by sme dosiahli aj občasným zapnutím vrtulky (proces b). Nevratnosť je tu spôsobená tým, že nedokážeme premeniť všetko teplo uložené v plyne na energiu, ale žiarovka premieňa všetku elektrickú prácu na teplo.

Plyn v nádobe s piestom, ktorý má na druhej strane vákuum, sa bude pri postupnom popúšťaní piestu rozpínať vratne a kvázistaticky, opačný proces dosiahneme stláčaním piestu (proces c). Ak piest uvoľníme okamžite, proces už nebude vratný, ani kvázistatický (je to to isté ako keby sme plyn do vákuua vypustili, proces d). Takýto pokus urobil Joule a zistil pri ňom, že sa nemení teplota plynu. My dnes vieme, že je to kvôli zachovaniu jeho vnútornej energie.

Nakoniec, často budeme uvažovať systém v kontakte s tepelným rezervoárom: veľkým zásobníkom, ktorý môže prijímať teplo a nemení pri tom svoju teplotu. Ak systém budeme pomaly stláčať, pričom bude pripojený na tento rezervoár, bude si držať stále rovnakú teplotu a bude

dodávat teplo do rezervoáru (proces e). Tento proces je kvázistatický a vratný, pretože pri pomalom popúšťaní piestu pôjde systém opačným smerom, stále bude mať konštantnú teplotu a teplo bude z rezervoáru brať.

Procesy sa tiež pomenovávajú podľa veličiny, ktorá je počas procesu konštantná (ak taká existuje). Vždy máme na mysli kvázistatické procesy, aby sme mohli použiť termodynamiku.

- *Izotermický* proces prebieha pri konštantnej teplote.
- *Izochorický* je proces pri konštantnom objeme (*choros* je po grécky priestor). Keďže sa nemení objem, nemôžeme na plyn konať prácu – celková zmena vnútornej energie je kvôli toku tepla.
- Nakoniec (z tejto kategórie) *izobarický* proces prebieha pri konštantnom tlaku. Vďaka tomu je jednoduché spočítať vykonanú prácu, $W = -p\Delta V$.
- Trochu inak je charakterizovaný proces *adiabatický*. Ten prebieha v dokonalej tepelnej izolácii, z čoho vyplýva $Q = 0$. Počas adiabatického procesu sa nemení veličina pV^κ , kde $\kappa = (s - 2)/(s)$, s je počet stupňov voľnosti. Tento výsledok si aj odvodíme. Premyslite si, že ani jeden z predchádzajúcich procesov nie je adiabatický.

Pre ideálny plyn vieme vyjadriť závislosti zvyšných dvoch parametrov, ktoré sa pri týchto *izo* procesoch menia; podľa ich historických objaviteľov majú tieto zákony mená (v poradí Boyle a Mariott, Charles, Gay-Lussac, adiabatický nemá špeciálne meno).

Malé zmeny

Nasledujúca kapitolka je relatívne matematická! Správny spôsob ako čítať také odseky je s papierom a perom, aby ste si mohli prepočítať všetky výpočty ručne. Mne tiež pomáha čítať viackrát. Nezabudnite na seriálové úlohy, kde si môžete takéto výpočty precvičiť.

Najjednoduchšie procesy sú tie, pri ktorých sa parametre zmenia len veľmi málo. Napríklad vieme, že pri malej zmene objemu ΔV je vykonaná práca rovná $p\Delta V$.

Ak zmeníme tlak ideálneho plynu o Δp a objem o ΔV , zmení sa aj teplota, a vieme presne spočítať o koľko:

$$T + \Delta T = \frac{(p + \Delta p)(V + \Delta V)}{nR},$$

alebo s použitím $T = pV/nR$

$$\Delta T = \frac{V}{nR} \Delta p + \frac{p}{nR} \Delta V + \frac{\Delta p \Delta V}{nR}.$$

Ak budeme rozprávať o *malých zmenách*, namiesto veľkého gréckeho písmena Δ budeme používať latinské d. Píšeme teda

$$dT = \frac{V}{nR} dp + \frac{p}{nR} dV + \frac{dp dV}{nR}.$$

Pozrime sa na relatívne veľkosti jednotlivých členov (tzn. ich pomer ku ich pôvodným hodnotám). To, že ide o malú zmenu, znamená, že dp/p a dV/V sú malé čísla (napríklad 1/1000). Potom dT/T je tiež malé číslo podobnej veľkosti. Posledný člen v rovnici, $dp dV$, je ale oveľa menší! Malé relatívne zmeny sa tu vynásobia a z jednej tisíciny dostávame jednu milióntinu. Ak by sme začali z jednej milióntiny, posledný člen bude jedna bilióntina.

Presnejšie môžeme tento argument zapísať tak, že skutočne vypočítame relatívne zmeny

$$\frac{dT}{T} = \frac{V}{nRT} dp + \frac{p}{nRT} dV + \frac{dpdV}{nRT}$$

a s použitím $pV = nRT$

$$\frac{dT}{T} = \frac{V}{pV} dp + \frac{p}{pV} dV + \frac{dpdV}{pV} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} + \frac{dpdV}{pV}.$$

Nemusíte sa ale báť, že zanedbaním posledného členu sa naše výpočty stanú nepresnými! Ak by nám niekto povedal, že sme sa dopustili nejakej chyby, spýtame sa akej. On/ona nám to povie a my si zvolíme také dp/p a dV/V , aby naša chyba bola menšia. Naša nepresnosť je teda ľubovoľne malá.

To nás oprávňuje zarámovvať si prvé pravidlo počítania s d:

Súčín dvoch d veličín je 0:

$$da \cdot db = 0.$$

Špeciálne

$$(dx)^2 = 0.$$

Píšeme teda

$$dT = \frac{V}{nR} dp + \frac{p}{nR} dV.$$

Niekedy to pravidlo ani nemusíme použiť. Napríklad, ak chceme zistiť, ako sa mení vnútorná energia s teplotou

$$dU = \frac{s}{2} nR dT.$$

Ak by nás však zaujímala zmena U pri známej zmene p a V , už by sme ho museli použiť, pretože

$$U = \frac{s}{2} pV,$$

a teda

$$dU = \frac{s}{2} (p + dp)(V + dV) - \frac{s}{2} pV = \frac{s}{2} (p dV + V dp).$$

Celý rozdiel je v tom, že raz vyjadrujeme U ako funkciu T a raz ako funkciu p a V :

$$dU(T) = \frac{s}{2} nR dT,$$

$$dU(p, V) = \frac{s}{2} (p dV + V dp).$$

Všimli ste si nejaké pravidlo? Ak funkcia závisí na nejakej premennej, zmena tejto funkcie závisí od zmeny tejto premennej cez nejaký koeficient:

Pre zmenu funkcie $f(x, y, \dots)$ pri malej zmene jej parametrov platí

$$df(x, y, \dots) = f_{,x}(x, y, \dots) dx + f_{,y}(x, y, \dots) dy + \dots$$

pre nejaké funkcie $f_{,x}, f_{,y} \dots$

Predchádzajúci výsledok pre $U(p, V) = (s/2)pV$ teda zapíšeme ako $U_{,p} = sV/2$ a $U_{,V} = sp/2$. Pre $T(p, V) = pV/(nR)$ by to bolo $T_{,p} = V/(nR)$ a $T_{,V} = p/(nR)$. *Napíšte si to na papier a porovnajte!*

Nakoniec, budeme potrebovať nejaké pravidlá na počítanie zmien rôznych funkcií:

- Konštantná funkcia $f(x) = C$ sa vôbec nemení, ak meníme x , preto $df(x) = 0$. Toto stručne zapisujeme proste ako

$$dC = 0,$$

kde na pravej strane vlastne myslíme $0 \cdot dx$

- Mocniny x^n sa menia ako

$$d(x^n) = nx^{n-1} dx.$$

Tento vzorec platí aj pre neceločíselné mocniny, teda napríklad

$$d(\sqrt{x}) = d\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Ak vám začínajú vzťahy pripadať komplikované, vráťte sa ku významu d : vzťah $d(x^2) = 2x dx$ hovorí, že ak pohneme číslo $x = 2$ o jednu stotinu na 2,01, tak x^2 sa zmení približne o $2x dx = 2 \cdot 2 \cdot 0,01 = 0,04$. Skutočne, $2,01^2 = 4,0401$.

Inú interpretáciu dostaneme po vydelení x^n :

$$\frac{d(x^n)}{x^n} = n \frac{dx}{x}.$$

Ak teda zmeníme x o napr. 2%, potom x^n sa zmení o $2n\%$. Toto pravidlo je užitočné na počítanie mocnín v hlave, ale platí len pre malé zmeny.

- Súčin dvoch funkcií sa správa ako

$$d(fg) = d(f)g + f d(g),$$

čo poznáme z výpočtov $d(pV)$.

- Súčet funkcií sa mení ako

$$d(f + g) = d(f) + d(g).$$

To je intuitívne: ak máme dve funkcie, ktoré sa zmenia o nejakú hodnotu, zmena ich súčtu je jednoducho súčet zmien.

- Nakoniec, tabuľka zmien základných funkcií

$$d(e^x) = e^x dx,$$

$$d(\sin x) = \cos x dx,$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx,$$

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x},$$

pričom posledný vzorec hovorí o prirodzenom logaritme a platí len pre kladné x (nemôžeme logaritmovať záporné čísla).

Zatiaľ sme to tajili, ale počítanie malých zmien je to isté, ako počítanie *derivácií*. Derivácia funkcie je zmena funkcie delená malou zmenou jej argumentu, teda

$$\frac{df(x)}{dx}.$$

Funkcie f, x sú *parciálne derivácie*, ak má f viac argumentov, pretože meníme len jeden z nich, ostatné pokladáme za konštantné.

Derivácií sa nebojte, v skutočnosti prinášajú obrovské zjednodušenie. Napríklad, $(x + dx)^n$ má $n + 1$ členov, no pri počítaní s malými zmenami stačí uvažovať len prvé dva! Navyše, veľa fyzikálnych dejov stačí popisovať takouto zmenou, ako si hneď predvedieme.

Tepelná kapacita a adiabatický proces

Aby sme sa zoznámili s malými zmenami, spočítame si s ich pomocou tepelnú kapacitu ideálneho plynu. Ako je definovaná tepelná kapacita? Je to prijaté teplo vydelené nárastom teploty pri tomto prijatom teple. Teplo ale môžeme pridávať do systému rôzne, napríklad izochoricky alebo izobaricky (alebo aj inak).

Pri pridávaní tepla *izochoricky* sa nekoná žiadna práca, teda platí $dU = \delta Q$, kde δQ je teraz maličký nárast tepla.¹⁴ Ako sa zmení teplota? Vieme, že $dU = (s/2)nR dT$, odkiaľ by sme vedeli vyjadriť $dT = 2/(snR) dU$.

Tepelná kapacita pri izochorickom procese c_v sa častejšie nazýva *tepelná kapacita pri konštantnom objeme*, spočítame ju podľa definície

$$c_v = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} = \frac{s}{2}nR.$$

Pri *izobarickom* procese už neplatí $dU = \delta Q$, ale $dU = \delta Q - pdV$. Opäť by sme to radi vyjadrili ako niečo úmerné dT , čo nie je ťažké: všeobecne platí, že pri malej zmene je

$$dT = \frac{V}{nR} dp + \frac{p}{nR} dV,$$

ale u nás sa tlak nemení, teda $dp = 0$. Dostávame teda $p dV = nR dT$ a tepelná kapacita pri konštantnom tlaku je

$$c_p = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + p dV}{dT} = \frac{\frac{s}{2}nR dT + nR dT}{dT} = \left(\frac{s}{2} + 1\right) nR.$$

Trochu pokročilejšia aplikácia bude odvodenie zákona $pV^\kappa = \text{konst}$ pre adiabatický proces. Opäť vyjdeme z prvého termodynamického zákona, no pri adiabatickom procese je nulové prenesené teplo, takže platí $dU = -p dV$. Zmenu vnútornej energie sme už mali vyjadrenú: ak sledujeme tlak a objem, je rovná $dU = (s/2)(p dV + V dp)$. Spolu teda máme rovnicu

$$\frac{s}{2}(p dV + V dp) = -p dV.$$

¹⁴ δ pripomína, že je maličký. Prečo nepíšeme dQ si povieme nabudúce.

Ak dáme všetky veličiny na jednu stranu, dostaneme

$$\frac{s}{2} V dp + \left(\frac{s}{2} + 1 \right) p dV = 0.$$

Ešte vydelíme $s/2$ a označíme vzniknutý faktor ako κ :

$$0 = V dp + \frac{\frac{s}{2} + 1}{\frac{s}{2}} p dV =: V dp + \kappa p dV.$$

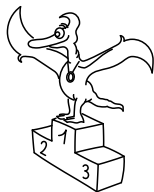
Teraz si všimneme, že sme skoro v tvare $d(pV)$ až na konštantu κ . Také faktory ale dostávame, ak počítame $d(V^\kappa) = \kappa V^{\kappa-1} dV$. Vynásobíme teda rovnicu $V^{\kappa-1}$ a upravujeme

$$0 = V^\kappa dp + p \kappa V^{\kappa-1} dV = V^\kappa dp + p d(V^\kappa) = d(pV^\kappa).$$

Čo takýto výraz znamená? Hovorí nám, že počas adiabatického procesu je zmena pV^κ nulová, inými slovami, pV^κ je konštanta! Aká konštanta? Najlahšie ju spočítame s pomocou počiatočných podmienok, teda pre začiatočný stav p_0, V_0 je $pV^\kappa = p_0 V_0^\kappa$. Nakoniec upravíme výraz pre konštantu κ

$$\kappa = \frac{\frac{s}{2} + 1}{\frac{s}{2}} = \frac{s + 2}{s},$$

pre jednoatómový plyn $s = 3$ a $\kappa = 5/3$, pre dvojátomový plyn je $s = 5$ a $\kappa = 7/5$.



Pořadí řešitelů po I. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	4	4	5	8	6	38	100	38
1.–2. <i>Josef Minařík</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	4	3	2	4	5	3	5	28	74	28
1.–2. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	4	2	3	1	3	4	5	6	28	74	28
3. <i>Vojtěch Laitl</i>	G, Ostrov	2	2	3	2	1	5	7	5	27	71	27
4. <i>Lucie Kundratová</i>	G, nám. TGM, Zlín	2	2	3	–	2	4	7	6	26	76	26
5. <i>Ladislav Trnka</i>	G Havlíčkův Brod	2	2	3	2	2	2	7	5	25	66	25
6. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	2	2	3	2	2	4	3	6	24	63	24
7. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	2	–	2	–	1	3	6	5	19	63	19
8. <i>Jiří Blaha</i>	G Uherské Hradiště	–	2	3	2	–	5	2	3	17	57	17

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	4	4	5	8	6	38	100	38
1.–2. <i>Vít Beran</i>	Masarykovo G, Plzeň	2	4	3	2	2	5	9	5	32	84	32
1.–2. <i>David Němec</i>	G, Tanvald	4	2	3	–	4	5	8	6	32	94	32
3. <i>Ondřej Knopp</i>	G, Třeboň	4	2	3	2	2	4	7	6	30	79	30
4.–6. <i>Šimon Karch</i>	G Komenského, Havířov	4	2	3	2	4	–	7	5	27	82	27
4.–6. <i>Viktor Rosman</i>	G, Pelhřimov	4	2	3	2	2	5	5	4	27	71	27
4.–6. <i>Dominik Starý</i>	G, Benešov	4	–	3	2	4	4	6	4	27	79	27

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	3	4	4	5	8	6	34	100	34
1. <i>Jáchym Bártík</i>	G Havlíčkův Brod	2	2	3	2	4	5	8	6	32	94	32
2.–3. <i>Martin Hanák</i>	G, nám. E. Beneše, Kladno	2	2	3	2	3	5	7	6	30	88	30
2.–3. <i>Matěj Mezera</i>	G Havlíčkův Brod	1	2	3	2	4	5	7	6	30	88	30
4. <i>Daniela Pittnerová</i>	G L. Svobodu, Humenné	0	2	3	2	4	5	6	6	28	82	28
5.–6. <i>Pavol Šimko</i>	G V. Nedožerského, SR	1	1	3	2	4	5	5	6	27	79	27
5.–6. <i>Přemysl Štastný</i>	G, Žamberk	2	1	3	1	4	4	7	5	27	79	27

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	3	4	4	5	8	6	34	100	34
1. <i>Petr Hrubý</i>	G, Polička	2	1	3	2	4	5	8	6	31	91	31
2. <i>Lukáš Supík</i>	G, Třinec	2	2	3	4	3	5	5	6	30	88	30
3. <i>Tomáš Hrbek</i>	G J. Ressela, Chrudim	1	1	3	2	2	4	7	6	26	76	26
4. <i>Klára Štefanová</i>	G B. Němcové, HK	1	1	3	–	2	5	7	5	24	80	24
5. <i>Peter Kubaščík</i>	G Kysucké Nové Mesto	1	1	2	2	2	4	7	4	23	68	23
6. <i>Šimon Knoša</i>	G A. Kmeťa, B. Štiavnica	1	1	3	1	–	4	7	5	22	73	22




FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.