

## Úvodem

Milí Fykosáci,

polovina sérií tohoto ročníku je za námi, ale druhá na nás stále ještě čeká. Nyní konkrétně přichází čtvrtá, tak doufáme, že nad jejím řešením strávíte pár příjemně hloubavých chvil.

Pokud jste se ještě nepřihlásili na FYKOSÍ Fyzikláni,<sup>1</sup> určitě to napravte, budeme se na vás těšit 13. 2. v Praze.

*Organizátoři*



### Zadání IV. série



*Termín uploadu: 3. 3. 2015 20.00*

*Termín odeslání: 2. 3. 2015*

#### Úloha IV.1 ... čtvercatý odpor

2 body

Jak závisí elektrický odpor čtverce na délce jeho strany  $a$ ? Všechny čtverce, o které se zajímáme, jsou samozřejmě vodiče vyrobené z tenkého materiálu o tloušťce  $h$  a měrném elektrickém odporu  $\rho$ . Zajímáme se o odpor mezi protilehlými stranami čtverce.

#### Úloha IV.2 ... rychlá kráska reloaded

2 body

Terka si zase jednou vyjela na výlet. Tentokrát se prochází o rovnodennosti v pravé poledne na zemském rovníku. Jakou vzájemnou rychlost by měla vůči Alešovi, pokud by ji Aleš chtěl (bláhově) pozorovat z povrchu Slunce na rovníku v bodě nejbližším jeho objektu zájmu (Terce)? Sklon sluneční osy vůči rovině ekliptiky můžete považovat za zanedbatelně malý.

#### Úloha IV.3 ... nerozlučné pouto

4 body

Dva sešity A460 zasuneme do sebe tak, že se střídají listy jednoho a druhého sešitu, a položíme je na vodorovný stůl. Jakou práci musíme vykonat, abychom sešity od sebe oddělili, jestliže na sebe listy působí pouze vlastní vahou? Předpokládejte, že taháme v rovině sešitů kolmo na hřbet jednoho z nich a že se na začátku listy zcela překrývají.

#### Úloha IV.4 ... ach ta tíže

4 body

Určete, jaké je tíhové zrychlení na povrchu neutronové hvězdy v závislosti na rovnoběžce. Jak velká slapová síla by působila na předmět vysoký  $h = 1$  m a s hmotností  $m = 1$  kg v blízkosti jejího povrchu? S jakou energií by dopadl na povrch neutronové hvězdy marshmallow upuštěný z výšky  $h$ ? Neutronová hvězda má poloměr  $R$  a rotuje s periodou rotace  $T$ . Můžete ji považovat za kulovou, i když přesně kulová není. Najděte si hodnoty pro typickou neutronovou hvězdu a udejte jak obecné, tak konkrétní číselné výsledky.

<sup>1</sup><http://fyziklani.cz>

**Úloha IV.5 ... vrhač nožů**

4 body

Vrhací nůž opustí ruku ve chvíli, kdy je jeho těžiště ve výšce  $h$  a má pouze horizontální složku rychlosti  $v_0$ . Jakou musí mít úhlovou rychlost rotace  $\omega$ , aby se zasekl do svislé desky vzdálené  $d$  od místa vypuštění? Pro zjednodušení uvažujte, že těžiště nože je přesně v polovině jeho délky  $l$  a že se nůž zasekne vždy, když se jeho čepel dotkne desky dříve než rukojeť.

**Úloha IV.P ... nejmenovaná tyčinka**

4 body

Na základě biochemických dějů v lidském těle a jeho mechaniky odhadněte, kolik energie spotřebuje cyklista na překonání tisíce výškových metrů, je-li průměrná stoupání 5 %.

**Úloha IV.E ... lahvované povrchové napětí**

8 bodů

Máme válcovou nádobu, ve které vytvoříme z boku kruhový otvor. Nalijeme do ní vodu. Voda bude postupně vytékat, ale v nějaké výšce nad otvorem se výtok vody z nádoby zastaví. Určete povrchové napětí vody na základě změřené výšky nad otvorem, ve které se hladina zastaví. Pokus několikrát opakujte, a to alespoň se třemi různě velkými otvory. Jako válec může posloužit vhodná PET lahev.

**Úloha IV.S ... Ljapunovská**

6 bodů

1. Uvažujte propisku o délce 10 cm s těžištěm přesně v půlce a  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Nyní si představte, že jste propisku postavili na stůl s nulovou výchylkou  $\delta x$  s přesností na  $n$  desetinných míst a s nulovou rychlostí. Za jak dlouho po postavení propisky si budete moct být jisti pouze s  $n - 1$  desetinnými místy nulovostí výchylky?
2. Uvažujte model počasí s největším Ljapunovským exponentem  $\lambda = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Předpověď počasí přestává být použitelná, pokud je její chyba více než 20 %. Pokud jste dokázali změřit stav počasí s přesností na 1 %, na jak dlouho byste odhadovali, že bude dobrá vaše předpověď? Odpověď podejte v dnech a hodinách.

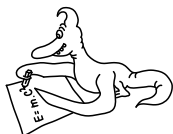
3. Vezměte si Lorenzův model konvekce z minulého dílu, opište si z něj funkci  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  a nasimulujte a vykreslete si hodnotu parametru  $X(t)$  pro dvě různé trajektorie pomocí příkazů

```
X01=1;
Y01=2;
Z01=5;
X02=...;
Y02=...;
Z02=...;
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01, 'MaxStep', 0.1);
pocPodminka1=[X01, Y01, Z01];
reseni1=ode45(@f, [0, 45], pocPodminka1, nastaveni);
pocPodminka2=[X02, Y02, Z02];
reseni2=ode45(@f, [0, 45], pocPodminka2, nastaveni);
plot(reseni1.x, reseni1.y(:, 1), reseni2.x, reseni2.y(:, 1));
pause()
```

Místo tří teček u  $X02, Y02, Z02$  musíte zadat počáteční podmínky pro druhou trajektorii. Pusťte kód alespoň pro pět řádově odlišných, ale malých odchylek a poznamenejte si čas, ve kterém se druhá trajektorie od první kvalitativně odlepí (tj. směřuje například na úplně

druhou stranu). Odchylku nezmenšujte pod řád cca  $10^{-8}$ , protože pak se začnou projevovat nepřesnosti numerické integrace. Načrtněte závislost odlepovacího času na řádu odchylky.

*Bonus* Pokuste se ze získané závislosti odlepovacího času na velikosti odchylky odhadnout odpovídající Ljapunovův exponent. Budete potřebovat víc než pět běhů a můžete předpokládat, že v okamžiku odlepení velikost odchylky pokaždé zrovna překročila nějaké konstantní  $\Delta_c$ .



## Řešení III. série

### Úloha III.1 ... těžký vzduch

2 body; průměr 1,74; řešilo 57 studentů

*Jakou hmotnost má zemská atmosféra? Jakou část hmotnosti Země tvoří? Pro potřeby výpočtu znáte pouze hmotnost Země  $M_Z$  a poloměr  $R_Z$  Země, gravitační zrychlení  $a_g$  na povrchu Země, hustotu vody  $\rho$  a víte, že blízko povrchu Země v hloubce  $h_1 = 10$  m má hydrostatický tlak hodnotu zhruba jedné atmosféry  $p_a = 10^5$  Pa.*

*Nápověda* Jedná se o jednoduchou úlohu. Nejde nám o dokonale přesné řešení, ale o kvalifikovaný odhad podložený výpočtem.

*Karel viděl zajímavou miskoncepci, podle níž je na Měsíci člověk lehčí jenom kvůli tomu, že je Měsíc menší. (A co kdyby byl hustší?)*

Vydeme z informace, že v hloubce  $h_1$  je stejný tlak jako atmosférický (v zadání byl myšlen samozřejmě atmosférický tlak za standardních podmínek). Obecně pro hydrostatický tlak v kapalině o hustotě  $\rho$  v homogenním tíhovém poli platí  $p = \rho hg$ , kde  $g$  je tíhové zrychlení a  $h$  je hloubka. Současně můžeme vyjádřit tlak jako sílu, která působí na určitou plochu, tedy například jako tíhovou sílu  $F_G$ , kterou působí celá atmosféra o hmotnosti  $M$  na povrch Země, který označíme  $S$ . Vzhledem k tomu, že nás zajímá pouze odhad, tak Zemí považujeme za dokonale homogenní kouli o poloměru  $R_Z \approx 6 \cdot 10^6$  m a hustotu vody bereme rovnu  $\rho \approx 10^3$  kg·m<sup>-3</sup>. Potom

$$p_a = \rho h_1 g = \frac{F_G}{S} = \frac{Mg}{4\pi R_Z^2} \Rightarrow M = 4\pi \rho h_1 R_Z^2 \approx 5 \cdot 10^{18} \text{ kg}.$$

Hmotnost atmosféry jsme odhadli na  $5 \cdot 10^{18}$  kg. Pokud budete hledat hmotnost atmosféry na Wikipedii, tak naleznete stejnou hodnotu. Hmotnost Země je  $M_Z \approx 6 \cdot 10^{24}$  kg, podíl hmotnosti atmosféry na hmotnosti celé Země je tedy přibližně  $M/M_Z \approx 8 \cdot 10^{-5}$  %.

Co jsme všechno zanedbali? Například to, že  $g \neq a_g$ . Tíhové zrychlení se i na dokonalé kouli mění místo od místa, pokud jste na rotujícím objektu, což Země je. Nicméně rozdíl mezi tíhovým zrychlením na rovníku a na pólu je relativně malý. Také jsme neuvážili změnu  $a_g$  v závislosti na výšce nad Zemí.

Jak jsme již zmínili, neuvažovali jsme rozložení hmoty Země. Jednak máme hory, a pak máme zase propadliny, jako je oblast Mrtvého moře. Prostě celkově jde o hrubý odhad, který je ale relativně dobrý.

### Komentář k došlým řešením

Daleko častěji jste zvolili řešení vycházející z údaje o atmosférickém tlaku – tedy řešení bylo  $m = F/a_g = p_a S/a_g = 4\pi R_Z^2 p_a/a_g$ . Samozřejmě je také správné, respektive s dostatečnou přesností správné a nepřesnosti má stejné jako autorské řešení.

Při odevzdávání bylo asi nejčastější chybou opomenutí zodpovězení druhé otázky v zadání (dokonce přestože někteří zadání do svého řešení přepsali/zkopírovali. . .) a alespoň zmínění některých zanedbaných vlivů. Kdo zapomněl na obojí, přišel o bod. Zmínka je zde kvůli tomu, že u jednoduché úlohy sice nechceme dokonalé řešení, ale i tak chceme alespoň slovní komentář o tom, co jste si vědomi, že zanedbáváte.

**Karel Kolář**  
karel@fykos.cz

### Úloha III.2 ... bubliny

2 body; průměr 1,72; řešilo 60 studentů

Určete rozdíl potenciální povrchové energie blány kulaté bubliny a bubliny ve tvaru pravidelného čtyřřtěnu. Oba útvary mají stejný vnitřní objem  $V$ .

*Karel si vzpomněl na čtyřřtěnné bubliny z Eureka!*

Změna potenciální povrchové energie je přímo úměrná změně plochy s konstantou úměrnosti  $\sigma$  (povrchové napětí). U bublin máme povrchové vrstvy dvě, takže výsledný rozdíl je

$$\Delta E = 2\sigma\Delta S.$$

Musíme tedy spočítat rozdíl povrchu koule a pravidelného čtyřřtěnu o stejném objemu  $V$ .

Pro výpočet objemu pravidelného čtyřřtěnu o hraně délky  $a$  potřebujeme znát tělesovou výšku  $h$ . Ta prochází těžištěm podstavy, takže tvoří pravouhlý trojúhelník, jehož přepona je délka hrany  $a$  a odvěsny jsou tělesová výška  $h$  a dvě třetiny výšky (těžnice) stěny  $2a/3 = a\sqrt{3}/3$ . Tělesovou výšku získáme pomocí Pythagorovy věty

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Pravidelný čtyřřtěn je vlastně trojboký jehlan, takže pro objem použijeme známý vzorec *třetina obsahu podstavy krát výška*:

$$V = \frac{1}{3}S_p h = \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Povrch čtyřřtěnu je

$$S_1 = 4S_p = a^2\sqrt{3}.$$

Závislost povrchu na objemu získáme umocněním povrchu na třetí a objemu na druhou a vydělením:

$$\frac{S_1^3}{V^2} = (a^2\sqrt{3})^3 \left(\frac{12}{a^3\sqrt{2}}\right)^2 = 6^3\sqrt{3} \Rightarrow S_1 = V^{2/3}6\sqrt{3}.$$

Pro kouli o objemu  $V$  a obsahu  $S_2$  provedeme obdobný postup:

$$\frac{S_2^3}{V^2} = (4\pi r^2)^3 \left(\frac{3}{4\pi r^3}\right)^2 = 36\pi \Rightarrow S_2 = V^{2/3}\sqrt[3]{36\pi}.$$

Nyní už můžeme spočítat rozdíl potenciální povrchové energie. Bubliny mají tendenci zaujmout tvar s nejmenší potenciální energií. Z pozorování víme, že je tímto tvarem koule, a proto pro kladný výsledek odečteme povrch koule od povrchu čtyřřtěnu.

$$\Delta E = 2\sigma(S_1 - S_2) = 2\sigma V^{2/3} (6\sqrt{3} - \sqrt[3]{36\pi}) \doteq 4,74 \cdot \sigma V^{2/3}.$$

Výsledek je podle očekávání kladný. Pro lepší představu výsledek vydělíme povrchovou energií koule  $E_2$ :

$$\frac{\Delta E}{E_2} = \frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{6\sqrt[6]{3} - \sqrt[3]{36\pi}}{\sqrt[3]{36\pi}} \doteq 0,49.$$

Povrchová energie se tedy zvětší zhruba o polovinu.

### Komentář k došlým řešením

Pro většinu z vás nebyl s úlohou problém, ale často se vyskytovaly některé chyby. I když to v zadání není explicitně uvedeno, bublinou se většinou myslí tenká dvojblána většinou z mýdlové vody, která má zevnitř i zvenku vzduch, a tudíž má dva povrchy. Naproti tomu bublina vzduchu pod hladinou má jenom jeden povrch. Naprostá většina řešitelů počítala se vztahem  $E = \sigma S$ , aniž by uvedla, jestli myslí mýdlovou bublinu nebo bublinu pod hladinou. I když je zde uveden výpočet pro mýdlovou bublinu, body jsem za to nestrhával. Dalším nedostatkem byl tvar výsledku. Hodně řešení obsahovalo výrazy se zlomky pod odmocninami, které navíc byly ještě umocněné. Nejlepší způsob, jak tyto výrazy upravit, je převést je na racionální mocniny prvočíselných činitelů a konstant a pak případně zapsat odmocninami.

**Viktor Skoupý**  
skoupy@fykos.cz

### Úloha III.3 ... jedeme do zatáčky

4 body; průměr 3,18; řešilo 38 studentů

*Jak známo, vlaky nemají diferenciál, tedy při průjezdu zatáčkou se obě kola musí otáčet stejnou úhlovou rychlostí. Předpokládejte nyní, že kola mají válcový tvar. Proto při jízdě zatáčkou pojedou jedno kolo po delší trajektorii než druhé. Osička bude namáhána na krut a v jistý okamžik již třecí síla mezi kolem a kolejnicí nebude dostatečně velká a dojde k prokluzu jednoho z kol, čímž napětí v osičce klesne na nulu. Určete vzdálenost mezi jednotlivými prokluzy v závislosti na poloměru zatáčky  $R_z$ . Kolo má poloměr  $R$ , osa má poloměr  $r$ , délka osy je  $L$ , modul pružnosti materiálu osy ve smyku je  $G$  (ocel), vagon s  $N$  koly má hmotnost  $M$  a koeficient statického tření mezi kolem a kolejnicí je  $f$ . Nakonec můžete dosadit realistické hodnoty.*

*Nápověda* Pro zkrut  $\varphi$  válce o poloměru  $R$ , délce  $l$  a modulu pružnosti ve smyku  $G$ , na který působíme momentem  $M$ , platí

$$\varphi = \frac{2Ml}{G\pi R^4}.$$

*Vymyslel Lukáš cestou vlakem do Krušných hor.*

Zamysleme se nejprve nad tím, co se v zadaném modelu děje. Když vjede vlak do oblouku, tak je vnitřní kolejnice kratší než kolejnice vnější, proto musí vnitřní kolo vykonat méně otáček (mají dle zadání stejný poloměr, tedy i obvod). Pokud má však vnitřní kolo vykonat méně otáček než kolo vnější, musí docházet ke kroucení osy kol. Kroucení osy má ale za následek vzrůstající moment síly působící na kola. Tento moment je kompenzován též vzrůstající třecí silou mezi koly a kolejnicemi. Poznamenejme na okraj, že tyto síly mají opačný směr, proto nezpůsobují přímo brzdění vagonu. A při pohybu po přímé trati mají nulovou (konstantní) velikost. Pokud ale tyto třecí síly překonají mezní hodnotu, dojde k prokluzu, a jak je uvedeno v zadání, torzní napětí v ose klesne na nulu. Dále se na celou situaci podíváme matematicky.

Mezní velikost třecí síly, která může působit mezi koly a kolejnicemi, určíme ze zatížení jednotlivých kol a koeficientu statického tření, dále pak maximální moment sil působících na

osu určíme z definice momentu sil a uvážení, že na ose jsou připevněna kola dvě, která na ni působí v opačných směrech.

$$F_{t, \max} = \frac{1}{N} M g f \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_{\max} = \frac{2 M g R f}{N}.$$

Nyní jsme určili maximální moment sil, který může působit na osu, aby nedošlo k prokluzu. Z nápovědy v zadání určíme maximální zkrut osy

$$\varphi_{\max} = \frac{4 M g R L f}{\pi N G r^4},$$

kde jsme se nenechali zmást a do jmenovatele napsali  $r$  a nikoli  $R$ , abychom udrželi v souladu text zadání a nápovědu.

K tomuto zkrutu dojde tehdy, když bude rozdíl uražených trajektorií kol roven  $R\varphi_{\max}$ . Rozdíl drah projetých jednotlivými koly je  $L\Omega$ , kde  $\Omega$  je oblouková míra projížděného oblouku, a proto vzdálenost projatá mezi prokluzy je  $\Delta x = \Omega R_z$ , kde  $R_z$  je poloměr oblouku. Pokud dáme tyto vztahy dohromady, dostaneme

$$R\varphi_{\max} = L\Omega = L \frac{\Delta x}{R_z} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = R\varphi_{\max} \frac{R_z}{L}.$$

Nyní ještě dosadíme za  $\varphi_{\max}$  a dostaneme výsledek

$$\Delta x = \frac{4 M g R^2 R_z f}{\pi N G r^4}.$$

Vidíme, že výsledek nezávisí na rozchodu kol a na poloměru oblouku závisí lineárně, tedy pro rovnou trať  $R_z \rightarrow \infty$  nedochází k prokluzu, což jsme očekávali.

Nyní můžeme ještě dosadit hodnoty odpovídající vagonu:  $M = 20 \text{ t}$ ,  $R = 46 \text{ cm}$ ,  $r = 10 \text{ cm}$ ,  $N = 8$ ,  $f = 0,15$ ,  $G = 80 \text{ GPa}$ ,  $R_z = 300 \text{ m}$  a dostaneme pro vzdálenost mezi prokluzy  $\Delta x \doteq 3,7 \text{ cm}$ .

Poznamenejme nakonec, že aby k tomuto nežádoucímu prokluzu nedocházelo, jsou kola vagonů kuželovitého tvaru a z tohoto důvodu nejsou při průjezdu obloukem poloměry obou kol stejné. Na trati ale můžeme pozorovat příčné (vyleštěné) proužky, které mohou mít tento původ. Na druhou stranu, pohyb vlaku po kolejích je velmi komplexní problém, proto je potřeba započítat i další vlivy. Co ale podporuje vznik příčných proužků je to, že pokud dojde k prokluzu, tak se kolejnice vyleští (sníží se její drsnost a tím i koeficient tření  $f$ ) a zvýší se tím pravděpodobnost proklouznutí dalšího kola. Toto je důvodem, proč nejsou vyleštěná všechna místa stejně, ale vynikají nestability.

*Lukáš Ledvina*

lukasl@fykos.cz

### Úloha III.4 ... rychlá kráska

4 body; průměr 0,58; řešilo 48 studentů

*Terka se ve svém autě blíží relativistickou rychlostí v k rovinnému zrcadlu. Blíží se kolmo na rovinu zrcadla v kolizním kurzu. Přitom se samozřejmě dívá na sebe, jak se k zrcadlu blíží. Jaká je rychlost, kterou se Terka blíží ke svému neskutečnému obrazu, a jakou rychlost ona pozoruje svým zrakem?*

Bonus Zrcadlo není rovinné, ale kulové.

*Náhodou napadlo Karla při sledování Dr. Who, když se rozbily hodiny na křbové římse.*

Prvním krokem k vyřešení problému je pochopení toho, co je po nás požadováno. Zrádné totiž je, co že se vlastně považuje za obraz Terky. Co vidí Terka svými očima je poměrně zřejmé. Podotázka „jak rychle se blíží ke svému obrazu“ je poněkud záluďnější. Touto otázkou je myšleno, jak se přibližuje ke svému obrazu v klidové soustavě. Avšak pohybuje-li se Terka relativistickou rychlostí, potom poloha jejího obrazu záleží na poloze pozorovatele! (Rozmyslete si: K různým pozorovatelům dorazí světlo z Terky odražené od zrcadla za různou dobu, proto ve stejném okamžiku uvidí obraz Terky na jiném místě.) Zvolme si tedy nějakého významného pozorovatele v klidové soustavě. Nabízí se pozorovatel na povrchu zrcadla v místě, kde do zrcadla Terka narazí.

Nyní si ujasněme co se v naší situaci děje. Uvědomme si rozdíl mezi relativistickou a klasickou kinematikou. Rychlost světla již není zanedbatelně velká a ztrácíme absolutnost času.

Řešme nejprve situaci s rovinným zrcadlem a klidovým pozorovatelem (spojeným se zrcadlem). Necht' Terka má v soustavě spojené se zrcadlem rychlost  $v$ . Jelikož však tato rychlost není v porovnání s velikostí rychlosti světla zanedbatelná, bude se pozorovatel ze zrcadla jevit její rychlost jiná. Necht' v čase  $t$  dorazí k pozorovateli světlo od Terky ve vzdálenosti  $x$ . Za čas  $dt$  dorazí k pozorovateli světlo od Terky v poloze o  $dx$  bližší. Uvědomíme-li si pohyb Terky a konstantní rychlost šíření světla, dostaneme se k rovnosti

$$\frac{x}{c} + dt = \frac{dx}{v} + \frac{x - dx}{c},$$

odkud dostáváme

$$dx = dt \frac{vc}{v - c}.$$

Zdánlivá rychlost Terky je tedy

$$v' = \frac{vc}{v - c}. \quad (1)$$

Jelikož se ale pozorovatel nachází na povrchu zrcadla, vidí ve chvíli, kdy k němu dorazí světlo z Terky ze vzdálenosti  $x$ , v zrcadle obraz Terky z téže vzdálenosti. A tento obraz bude od pozorovatele taktéž ve vzdálenosti  $x$ . Vzdálenost Terky od jejího obrazu se tedy bude snižovat rychlostí  $w_1$

$$w_1 = \frac{2vc}{v - c}.$$

Z pohledu Terky situace vypadá jinak. Terka je v klidu, zato se k ní ale blíží zrcadlo rychlostí  $v$ .

Doba, za kterou dorazí světlo od Terky k zrcadlu  $Z_2$  a zpět k Terce, je stejná jako doba, za kterou se zrcadlo posune z polohy  $Z_1$  do polohy  $Z_3$ . Dostáváme tedy

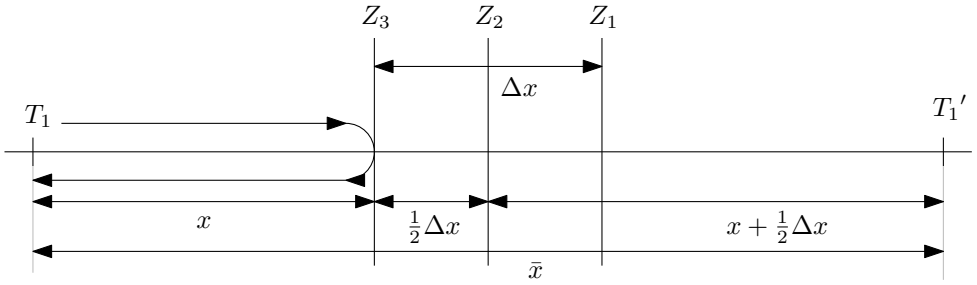
$$\frac{2x + \Delta x}{c} = \frac{\Delta x}{v}$$

neboli

$$\Delta x = \frac{2vx}{c - v}, \quad (2)$$

kde rozměry jsou popsány podle obr. 1. Vzdálenost  $\bar{x}$ , ve které vidí Terka svůj obraz, je

$$\bar{x} = 2x + \Delta x = 2x + \frac{2vx}{c - v} = \frac{2cx}{c - v},$$



Obr. 1: Situace s rovinným zrcadlem v soustavě spojené s Terkou. Obloukovými šipkami je naznačen tok světla (samozřejmě vše probíhá na optické ose, šipky jsou obloukovité pouze pro názornost).

zbývá nám už tedy jen spočítat rychlost úbytku této vzdálenosti

$$w_2 = \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| = \frac{2c}{c-v} \left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{2cv}{c-v}.$$

Nyní se zamyslíme nad situací s kulovým zrcadlem. V silničním provozu se používají vypuklá kulová zrcadla. Použijeme zobrazovací rovnici kruhového zrcadla ve tvaru

$$x' = \frac{xf}{x+f},$$

kde  $x$  je vzdálenost objektu (Terky) od zrcadla,  $x'$  je vzdálenost obrazu Terky od hlavní roviny zrcadla (kolmá rovina na optickou osu, procházející bodem průniku optické osy a zrcadla) a  $f$  je ohnisková vzdálenost zrcadla. Připomeňme si, že pro kulové zrcadlo je ohnisková vzdálenost polovina poloměru.

Řešme nejprve situaci opět z pohledu pozorovatele na v soustavě spojené se zrcadlem na průsečíku jeho povrchu s optickou osou. Analogicky se dostaneme k rovnici (1), nicméně dále musíme postupovat obezřetněji. Vzdálenost Terky od obrazu  $\bar{x}$  můžeme vyjádřit jako

$$\bar{x}(x) = x + x'(x),$$

kde  $x$  je vzdálenost, ve které vidí pozorovatel Terku a  $x'(x)$  je vzdálenost obrazu Terky, jak jej vidí pozorovatel, podle zobrazovací rovnice. Po dosažení zobrazovací rovnice tedy dostáváme

$$\bar{x} = x + \frac{xf}{x+f}.$$

Stačí nám tedy najít už jen rychlost změny této veličiny

$$w_3 = \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| = \left| v' + \frac{v'f(x+f) - xv'f}{(x+f)^2} \right| = v' \left| \frac{(x+f)^2 + f^2}{(x+f)^2} \right| = \frac{vc}{v+c} \frac{(x+f)^2 + f^2}{(x+f)^2}.$$

Nyní se zaměříme na situaci s kulovým zrcadlem z pohledu Terky. Situace je zachycena na obrázku 2.





obrazu vůči zrcadlu musí být kvůli symetrii stejná jako rychlost Terky. Ale vzhledem k tomu, že intuitivní představa současnosti ve speciální teorii relativity není platná, je potřeba situaci popisovat z pohledu nějakého pozorovatele – určovat vzdálenosti, jaké vidí pozorovatel, v časech, které vidí pozorovatel.

*Lubomír Grund*  
grund@fykos.cz

### Úloha III.5 ... sféricky symetrické kuře ve vakuu

5 bodů; průměr 1,88;

řešilo 40 studentů

Do nádoby o objemu  $V = 1 \text{ m}^3$ , ve které je velmi nízký tlak (prakticky dokonalé vakuum), umístíme  $V_0 = 11$  vody o pokojové teplotě  $t_0$ . Jaký bude konečný stav, ve kterém se bude nacházet nádoba a voda v ní? Pro účely výpočtu předpokládejte, že nádoba je dokonale tepelně izolovaná od okolního prostředí a má zanedbatelnou tepelnou kapacitu.

*Karel se nechal inspirovat problémem, o kterém spekoval jeden spolužák na Didaktice II.*

Fyzikálně principy sú jasné: po vložení do vákuu začne voda v takomto nízkom tlaku prudko vriet a vyparovať sa. Tak sa bude postupne zvyšovať tlak vodných pár a znižovať teplota vody, vyparovanie je totiž veľmi energeticky náročné. Ak bude vyparovanie pokračovať dosť dlho, môže dokonca voda začať mrznúť.

Vo finálnom stave teda bude väčšina nádoby vyplnená vodnou parou, niekde dole bude trochu vody a/alebo ľadu. Takto na konci musí byť všetko v rovnováhe – vyparovanie vody a sublimácia ľadu sa musí vyrovnáť s kondenzáciou a desublimáciou vodnej pary. Ako vyzerá takáto rovnováha?

Pozrime sa najprv na prípad len voda – vodná para. So zvyšujúcou sa teplotou vody sa zvyšuje vyparovanie, so zvyšujúcim sa tlakom pary rastie miera kondenzácie. Pre daný tlak existuje práve jedna teplota, pri ktorej sa tieto dva deje vyrovnajú.<sup>2</sup> Zistiť túto teplotu môžeme rôznymi spôsobmi. Na fázovom diagrame, ktorý sa kreslí práve do  $pT$  grafu,<sup>3</sup> je to čiara oddeľujúca vodu a vodnú paru (nazýva sa krivka koexistencie). Tvar tejto čiary sa riadi Clausiusovou-Clapeyronovou rovnicou, a dokonca existujú aj empirické zákony popisujúcu túto závislosť  $p(T)$  (napr. Antoineova rovnica).

Rovnováha iných dvoch fáz je o tom istom – ľad a vodná para môžu takisto koexistovať, avšak pri nižších teplotách a tlakoch. Rovnováha ľadu, vody a vodnej pary je ale špeciálna. Existovať môže len pri istom tlaku a teplote a nazýva sa trojný bod. Konkrétne je tento tlak  $p_t \approx 612 \text{ Pa}$  a teplota  $T_t \approx 273,16 \text{ K}$ .

Späť ku príkladu. Voda sa vyparuje a chladne: ak sa podarí vypariť dostatok vodnej pary pred tým, ako teplota vody klesne na teplotu tuhnutia, nastane rovnováha vody a vodnej pary. Ak však voda vychladne a stále je v okolí nízky tlak, teplo potrebné na vyparovanie bude brať z toho, že začne mrznúť. Tak sa môže ustáliť rovnováha v trojnóm bode. Ak však zmrzne všetka voda a tlak je stále nízky, bude ďalej sublimovať (už je to samozrejme ľad) a nakoniec nastane rovnováha vodnej pary a ľadu.

<sup>2</sup>Prečo sa teda vyparuje napr. voda z oblečenia aj pri atmosférickom tlaku? Rovnovážny tlak vodnej pary je totiž len časťou tlaku atmosféry, ktorá je zložená prevažne z iných plynov. Tlak samotnej vodnej pary je teda pokojne menší ako kilopascal. To isté platí aj pre sublimáciu ľadu.

<sup>3</sup>Pekný diagram majú na wikipedii [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Phase\\_diagram\\_of\\_water.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Phase_diagram_of_water.svg).

Ako to bude v našom prípade, zistíme, až keď dosadíme nejaké čísla.<sup>4</sup> Najprv len orientačne: ochladením litra vody z izbovej teploty, napr. 20 °C, na teplotu tuhnutia získame asi  $20 \text{ K} \cdot 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} = 84 \text{ kJ}$ . Týmto teplom vieme vypariť  $84/2500 \text{ kg} \doteq 34 \text{ g}$  vody. To je asi  $(34 \text{ g})/(18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}) \doteq 1,9 \text{ mol}$  v látkovom množstve. Stavová rovnica ideálneho plynu hovorí

$$p = \frac{nRT}{V}.$$

Objem  $V$  je s dobrou presnosťou práve objem nádoby,  $T$  povedzme tá teplota tuhnutia vody. Tak dostaneme tlak približne 4300 Pa, čo je bezpečne nad tlakom trojného bodu 612 Pa. Vyzerá to teda, že výsledný stav bude obsahovať len vodu a veľmi riedku vodnú paru. Treba už len zistiť, aká časť vody sa skutočne vyparí.

Označme si pomer hmotnosti vyparenej  $m_{\text{vyp}}$  a pôvodnej vody  $m_0 = 1 \text{ kg}$  ako  $\alpha = m_{\text{vyp}}/m_0$ . Už vieme, že  $\alpha$  bude ešte menšie ako 0,034. Na vyparenie tohoto pomeru potrebujeme  $\alpha m_0$  tepla. Ak bude výsledná teplota  $T_1$ , ochladením vody získame  $(T_0 - T_1)c m_0$  tepla. Takto vieme vyjadriť, ako bude závisieť výsledná teplota na pomere  $\alpha$

$$T_1(\alpha) = T_0 - \alpha \frac{l}{c}.$$

Vyparenie takéhoto množstva pary nám vyrobí plyn s tlakom

$$p = nRT_1/V = \frac{\alpha m_0 RT_1(\alpha)}{M_{\text{H}_2\text{O}} V}.$$

Ak budeme meniť  $\alpha$ , budeme dostávať dvojice hodnôt teploty a tlaku. Tieto hodnoty popisujú rovnováhu vzhľadom na prenesené teplo a na rovnovážny stav vodnej pary, no nemusia popisovať rovnováhu vyparovania a kondenzácie vody a vodnej pary. Na to musíme nájsť také hodnoty, ktoré túto rovnováhu spĺňajú, čo môžeme spraviť rôznymi spôsobmi: numerické riešenie Antoinovej rovnice alebo grafické riešenie pomocou fázového diagramu vody.

V druhom prípade postupujeme nasledovne: do fázového diagramu nakreslíme množinu možných stavov  $(T(\alpha), p(\alpha))$  v závislosti na parametri  $\alpha$ . Táto čiara pretne hranicu medzi vodou a vodnou parou, no a tento bod je práve náš hľadaný rovnovážny stav – leží na krivke koexistencie vody a vodnej pary.

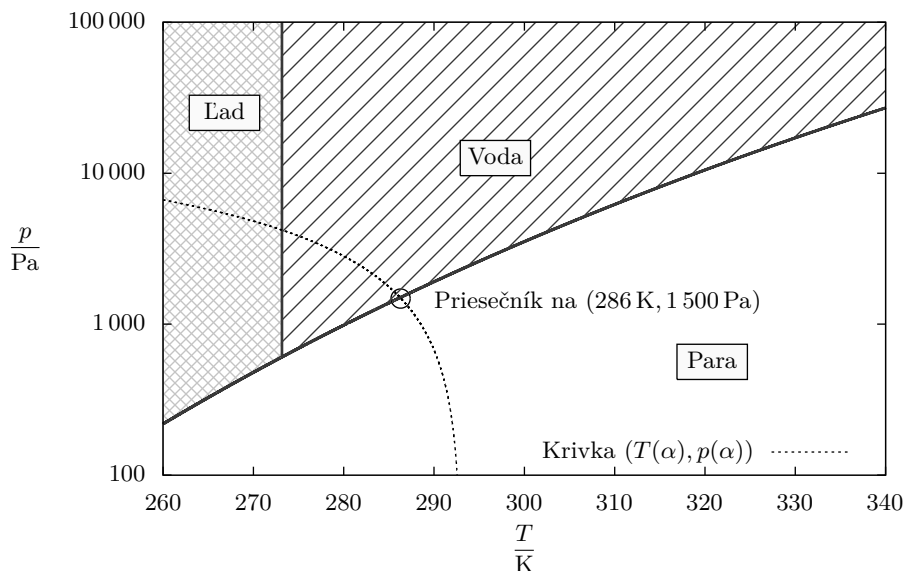
Osobne som si zvolil cestu grafického riešenia. Krivku koexistencie som vykreslil pomocou Antoinovej rovnice.<sup>5</sup> Pre počiatočnú teplotu  $T_0 = 293 \text{ K}$  numericky vychádza priesečník na teplote  $T_1 \approx 286 \text{ K} \doteq 13 \text{ °C}$  a tlaku  $p_1 \approx 1500 \text{ Pa}$ . Parameter  $\alpha$  zodpovedajúci tejto hodnote je približne 0,011, vyparená hmotnosť vody je asi  $m_{\text{vyp}} = \alpha m_0 \approx 11 \text{ g}$ .

Ako to vyzerá, si môžete pozrieť na obrázku 3. Vidíme trojný bod a tri fázové oblasti. Proces vyparovania prebieha od  $\alpha = 1$ , čo je spodok prerušovanej krivky a zastaví sa, keď dosiahneme rovnováhu dvoch fáz – teda krivku oddeľujúcu vodu a vodnú paru. Prerušovaná krivka síce pokračuje ďalej a pretína aj rozhranie vody a ľadu, ale tento bod je nefyzikálny, lebo proces na krivke predpokladal iba premenu vody na paru.

Ešte dva komentáre na záver. Po prvé, určite ste si všimli, koľko zanedbaní sme urobili. Hlavné v počítaní energetickej bilancie sme neuvažovali vnútornú energiu plynu, či to, že ochladzovať

<sup>4</sup>Použijeme orientačnú tepelnú kapacitu  $c = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}^{-1}$  a merné skupenské teplo vyparovania pri izbovej teplote  $l = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  prevzaté z [http://en.wikipedia.org/wiki/Properties\\_of\\_water#Heat\\_capacity\\_and\\_heats\\_of\\_vaporization\\_and\\_fusion](http://en.wikipedia.org/wiki/Properties_of_water#Heat_capacity_and_heats_of_vaporization_and_fusion).

<sup>5</sup>Parametre aj tvar rovnice sú na [http://en.wikipedia.org/wiki/Antoine\\_equation](http://en.wikipedia.org/wiki/Antoine_equation).

Obr. 3: Fázový diagram a krivka  $(T(\alpha), p(\alpha))$ .

sa nebude celá, ale len nevyparená voda (tieto dve zanedbania sa čiastočne rušia). Taktiež sme neuvažovali zmeny tepelnej kapacity vody na danom intervale. Všetko je to ospravedlnené tým, že ako  $\alpha$ , tak relatívna zmena teploty sú veľmi malé. Počítanie s vyššou presnosťou by nám neprineslo žiadnu novú fyziku, no postup by bol výrazne komplikovanejší.

Po druhé, vieme približne popísať závislosť koncového stavu na počiatočnej teplote  $T_0$ . Pri vyššej teplote by sa vyparilo viac vody, lebo tlak nasýtených vodných pár rastie s teplotou, a to celkom rýchlo. Skúšaním rýchlo zistíme, že na druhú stranu by sa pri pôvodnej teplote vody  $3^\circ\text{C}$  rovnováha ustálila v trojnóm bode. Pre ešte nižšiu teplotu by sme začali pozorovať aj tvorbu ľadu.

**Ján Pulmann**

janci@fykos.cz

### Úloha III.P ... zahvízdej mi něco

5 bodů; průměr 2,10; řešilo 31 studentů

Vysvětlete, na jakém principu funguje hvízdání pomocí úst. Uvažujte přitom nejprve jednoduché modely a postupně přejděte ke složitějším. Pak vyberte nejlepší z nich a na základě něj odhadněte, v jakém rozsahu se může pohybovat základní frekvence hvízd. (Pokud umíte hvízdát, můžete zkusit posoudit přesnost vašeho odhadu pomocí experimentu.)

*Mirek chce nenápadně zjistit, kolik řešitelů taky neumí hvízdát.*

Tato úloha má plné právo nazývat se problémovou. Jak si ukážeme, základní fyzikální principy hvízdání nejsou příliš složité, nicméně přesný popis jevu není možný kvůli komplikované stavbě

ústní dutiny. Budeme se snažit spíše o srozumitelné vysvětlení zkoumaných jevů než o podrobný matematický popis.

V následujícím textu si zopakujeme, co to je vlastně zvuk, podíváme se na stojaté vlnění ve vzduchovém válci, naučíme se něco málo z hudební teorie a seznámíme se s principem akustických rezonátorů, konkrétně Helmholtzova rezonátoru. Nakonec zkusíme nabyté poznatky aplikovat na samotné hvízdání ústy a zamyslíme se nad rozdíly mezi modelem a skutečností.

## Zvuk

Jako zvuk v běžném životě označujeme vjem, který jsme schopni vnímat pomocí sluchu. Ve fyzice pod tímto pojmem obvykle rozumíme longitudinální (podélné) mechanické vlnění ve hmotném prostředí, nehledě na to, zda se jedná o slyšitelnou frekvenci. Akustickou (zvukovou) vlnu si můžeme představit jako periodické zhušťování a rozpínání látkového prostředí, v našem případě vzduchu. Při popisu vlnění se díváme buďto na výchylku jednotlivých částic kolem jejich středních poloh, nebo na okamžitou výchylku objemového elementu<sup>6</sup>

$$y(x, t) = y_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c_s} \right) \right], \quad (3)$$

kde  $y_0$  je amplituda a  $c_s$  rychlost zvuku v daném prostředí. Uvažujeme zde rovinnou vlnu, kde  $x$  určuje vzdálenost daného bodu vlny od bodového zdroje zvuku. Rychlost zvuku v plynném prostředí je přibližně dána vztahem

$$c_s = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}, \quad (4)$$

kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta ideálního plynu a  $\rho$  je jeho hustota. Amplitudou zvukového vlnění se zde zabývat nebudeme (závisí na ní především intenzita zvuku), důležitá pro nás bude frekvence, resp. vlnová délka. Jednak proto, že podle frekvence určujeme výšku tónu, a jednak proto, že vlnová délka určuje módy stojatého vlnění, které mohou existovat v rezonančním válci daných rozměrů.

## Stojaté vlnění ve vzduchovém válci

Nyní se podíváme na to, jak se chová zvukové vlnění v dlouhé válcové dutině naplněné vzduchem. Pro jistotu zde připomeňme vztahy mezi vlnovou délkou  $\lambda$ , frekvencí  $f$  a úhlovou frekvencí  $\omega$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c_s}{\lambda}.$$

Stojaté vlnění vzniká interferencí dvou shodných vln, příchozí a odražené. Superpozicí dvou vln popsanych rovnicí (3) dostaneme v jednorozměrném případě vztah

$$y(x, t) = 2y_0 \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega x}{c_s}\right) = 2y_0 \cos(2\pi f t) \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right),$$

kde  $2y_0 \sin(2\pi x/\lambda)$  je amplituda stojatého vlnění. Pro lepší představu si nejprve myslíme, že místo vzduchového válce máme strunu. Pevně uchycený konec struny odpovídá uzavřenému

<sup>6</sup>Místo výchylky objemového elementu či částic můžeme vlnění také popsat pomocí lokální odchylky tlaku plynu

$$p(x, t) = p_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c_s} \right) \right].$$

válci, volný konec struny otevřenému. Při odrazu na volném konci má odražená vlna stejnou fázi jako vlna příchozí, dochází tedy ke konstruktivnímu skládání a v bodě vznikne kmitna, tj. místo s maximální amplitudou. Při odrazu na pevném konci je fáze odražené vlny opačná, skládání je pak destruktivní a v bodě vznikne nehybný uzel.

Chování struny odpovídá harmonickému pohybu částic při šíření zvuku. Na uzavřeném konci zřejmě nemůže docházet k posunu objemových elementů vzduchu, částice se zde pružně odrážejí, což odpovídá opačné fázi vlny. Na pevném konci je tedy uzel. Pro změny tlaku však dostaneme opačný výsledek, neboť odrazy částic představují harmonické změny tlaku v oblasti uzavřeného konce (uzavřený konec působí silou proti pohybu částic), máme zde tedy „tlakovou kmitnu“. Na otevřeném konci vzduch volně proudí, z pohledu částic zde bude kmitna, zatímco tlak se vyrovnává s okolím, bude mít proto na otevřeném konci uzel.<sup>7</sup> Fáze harmonických změn tlaku a polohy částic jsou tedy posunuty ve fázi o  $\pi/2$ .

Zajímat nás bude především případ, kdy jsou oba konce otevřené. Jeden konec představuje dýchací ústrojí, druhý konec jsou ústa. Je zřejmé, že aproximovat ústní dutinu trubicí není možné, představujeme si proto pro teď, že se nesnažíme hvízdát, ale hrajeme třeba na píšťalu. Jaké stojaté vlnění může v píšťale vznikat? Jestliže jsou oba konce otevřené, musí se v nich nacházet kmitny. Pokud jsou to jediné kmitny v celém válci o délce  $L$ , platí pak  $L = \lambda/2$ . Mezi kmitnami se v tomto případě nachází pouze jeden uzel. Bude-li uzlů  $n \in \mathbb{N}$ , bude platit obecně  $L = n\lambda/2$ . Frekvence vln je potom

$$f = \frac{nc_s}{2L}. \quad (5)$$

Ještě poznamenejme, že šířka válce musí být menší než vlnová délka, abychom mohli zanedbat kolmé šíření.

### *Trocha hudební nauky*

Nyní si musíme objasnit, proč vlastně chceme, aby byl zvuk tvořen stojatým vlněním určité frekvence a ne směsí libovolných vln s proměnnými frekvencemi. Akustické kmity, které nemají konstantní frekvenci, vnímáme jako hluk. Oproti tomu pravidelné kmitání naše sluchová centra přeloží jako tón. Sami však možná víte, že pokud si necháte na počítači vygenerovat tón jedné frekvence, může být jeho poslech poměrně nepříjemný (zvláště jedná-li se o vysoké frekvence). Každý hudební tón totiž obsahuje další, tzv. alikvotní neboli vyšší harmonické tóny. V případě píšťaly se jedná o ty frekvence, pro něž je v rovnici (5)  $n = 2, 3, \dots$ . Pokud tedy budeme hledat frekvenci hvizdu, bude nás vždy zajímat první harmonická, tj.  $n = 1$ .

Také budeme chtít později určit tónový rozsah hvizdu. K tomu potřebujeme vědět, že v evropské hudbě se používá rovnoměrné temperované ladění, které rozdělí každou oktávu (rozdíl mezi dvěma sousedními harmonickými frekvencemi) na dvanáct tónů. Frekvence každého tónu je vždy rovna  $\sqrt[12]{2}$ násobku frekvence tónu pod ním. Při přiřazování tónů frekvencím pak můžeme vyjít z komorního A (nejčastěji 440 Hz), nebo použít převodní tabulku.<sup>8</sup>

Jak jsme už ale zmínili výše, pomocí chvění vzduchu ve vzduchové trubicí hvízdání modelovat nelze. Jaký vhodný model tedy můžeme použít?

<sup>7</sup>Ve skutečnosti se tlak vyrovná až vně trubice, uzel tedy není přímo v rovině otevřeného konce, ale tuto skutečnost si tady dovolíme zanedbat.

<sup>8</sup><http://www.phy.mtu.edu/~suits/notefreqs.html>

*Helmholtzův rezonátor*

Resonancemi vzduchu v dutinách se zabýval významný německý fyzik a fyziolog Hermann von Helmholtz, po němž jsou tyto resonance také pojmenovány. Helmholtz při svém výzkumu v oblasti akustiky používal k identifikaci frekvencí jednotlivých tónů mosaznou baňku s úzkým hrdlem, kterou dnes nazýváme Helmholtzův rezonátor.<sup>9</sup> Princip funkce Helmholtzova rezonátoru je podobný jako v případě hry na skleněné láhve. Vnější silou je dovnitř dutiny vtlačěn vzduch, který po zeslabení vnější síly opět uniká ven. Tlak v dutině se sníží až na hodnotu menší, než je okolní tlak, proto je vzduch opět vztážen dovnitř a proces se opakuje, pouze s menší intenzitou.

Oscilace vzduchu v rezonátoru budeme modelovat pomocí harmonického oscilátoru (pružiny). V hrdle se nachází masa vzduchu o hmotnosti  $m$ , tuhost systému definujeme jako

$$k = - \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y=y_0},$$

kde  $y$  je výchylka od ekvilibría  $y_0$  a  $F$  je okamžitá síla působící na masu vzduchu v hrdle. Pro úhlovou frekvenci oscilací platí

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = - \frac{1}{m} \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y=y_0} = - \frac{S}{m} \left. \frac{dp}{dy} \right|_{y=y_0}, \quad (6)$$

kde  $S$  je průřez hrdla a  $p = F/S$  je okamžitý tlak vzduchu. Nyní zavedeme předpoklad, že se jedná o adiabatický děj. Tento předpoklad je nutný také pro platnost vztahu (4). Při odvozování Poissonova zákona pro adiabatický děj dojdeme přes první větu termodynamickou, stavovou rovnici ideálního plynu a vztah pro výpočet vnitřní energie ideálního plynu<sup>10</sup> k rovnici

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa \frac{p}{V}, \quad (7)$$

kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta ideálního plynu a  $V$  je objem celé rezonanční komory včetně hrdla. V rovnici (6) můžeme psát  $dy = dV/S$ , neboť ke změně objemu dochází ve válcovitém hrdle komory, kde zřejmě  $V(y) \propto y$ . Po této úpravě dosadíme z (7), dostaneme

$$\omega^2 = \frac{\kappa S^2 p_0}{m V_0}.$$

Veličiny  $p_0$  a  $V_0$  opět označují rovnovážné hodnoty.

Dále si můžeme hmotnost masy vzduchu v hrdle vyjádřit pomocí hustoty vzduchu  $\rho$ , délky hrdla  $L$  a průřezu hrdla jako

$$m = \rho S L \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{\kappa S p_0}{\rho L V_0}. \quad (8)$$

Umocněním vztahu (4) dostaneme

$$c_s^2 = \kappa \frac{p_0}{\rho}$$

<sup>9</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz\\_resonance](http://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_resonance)

<sup>10</sup>Odvození není těžké, ale již bychom příliš odbočili. Výpočet najdete např. na české i anglické Wikipedii v článku Adiabatický děj (Adiabatic process).

a dosazením do (8) získáme

$$\omega^2 = \frac{c^2 S}{LV_0}.$$

Tento vztah nakonec přepíšeme pomocí  $\omega = 2\pi f$  jako

$$f = \frac{c_s}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{LV_0}}. \quad (9)$$

Empirická měření ukazují,<sup>11</sup> že místo délky  $L$  je přesnější uvažovat ekvivalentní délku  $L_{\text{eq}} = L + 0,4D$ , kde  $D$  je hydraulický průměr hrdla. Proto pokud neplatí  $L \gg D$ , měli bychom ve vztahu (9) psát  $L_{\text{eq}}$  místo  $L$ .

### Hvízdání

Nyní se už konečně podívejme na samotné hvízdání. Na rozdíl od Helmholtzova rezonátoru má rezonanční dutina (ústní dutina) ještě jeden otvor (hrtan), ze kterého proudí dovnitř dutiny vzduch hnaný z plic. To pro nás však není podstatné, důležité je, že má vzduch v dutině vyšší tlak a uniká ven úzkým otvorem (ústy). Navíc lze také hvízdát i při nasávání vzduchu, potom je princip zcela identický.

Podle článku Whistling na anglické Wikipedii<sup>12</sup> mohou při hvízdání ústy zůstat rty v téměř neměnné pozici, přičemž výšku tónu měníme pouze pozicí jazyka.<sup>13</sup> Rty a zuby mění pouze barvu tónu. Potom by ve vztahu (9) byl jedinou proměnnou objem  $V_0$ . Velikost objemu vzduchu, který se podílí na resonanci v ústní dutině, závisí na tom, jak moc přiblížíme jazyk k hornímu patru. Teoreticky bychom mohli snížit objem téměř na nulu, frekvence by potom nebyla shora omezena. Dolním limitem je objem ústní dutiny.

Podle lorda Rayleigh<sup>14</sup> se frekvence hvizdu může pohybovat v rozsahu 500 Hz až 4 200 Hz. Zkusme rozumně zvolit hodnoty veličin v (9) a provést dolní odhad. Rychlost zvuku je přibližně  $c_s \approx 300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , otvor mezi rty nebude mít menší průřez než  $S \approx 0,5 \text{ cm}^2$ , objem úst s jazykem u dolního patra odhadneme na  $V_0 \approx 50 \text{ ml}$ . Nejhuře se odhaduje délka  $L$ , předpokládáme, že je rovna tloušťce rtu  $L \approx 5 \text{ mm}$ . Po dosazení dostaneme nejnižší možnou frekvenci

$$f_{\text{min}} \approx 700 \text{ Hz}.$$

Zahrneme-li hydraulický průměr  $D \approx 5 \text{ mm}$ , dostaneme o něco nižší frekvenci  $f_{\text{min}} \approx 500 \text{ Hz}$ . Náš odhad je spíše řádový, hodnoty  $S$  i  $L$  jsou špatně měřitelné a liší se člověk od člověka, takže s výsledkem můžeme být velmi spokojeni. Při horním odhadu snižujeme  $V_0$ , dolní mez je však těžké stanovit. Resonanční objem určitě může poklesnout až na jednotky mililitrů, pro  $V_0 = 2 \text{ ml}$  dostaneme pětkrát vyšší frekvenci

$$f_{\text{max}} \approx 2\,500 \text{ Hz}.$$

To je méně, než tvrdí Rayleigh, ale vzhledem k hrubosti odhadů je to stále výborný výsledek.

Podle našeho odhadu se tónový rozsah hvízdání pohybuje v rozmezí  $H_4$  až  $D_7^\#$ . Pro srovnání, rozsah sopránu je přibližně  $C_4$  až  $C_6$ .<sup>15</sup> Zajímavé je, že pokud se vrátíme k modelu vzduchové

<sup>11</sup>[http://www.lightandmatter.com/html\\_books/Osn/ch05/ch05.html#Section5.5](http://www.lightandmatter.com/html_books/Osn/ch05/ch05.html#Section5.5)

<sup>12</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/Whistling>

<sup>13</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/Whistling>. Pozici rtů nemůžeme příliš měnit proto, že při zmenšení otvoru dochází k zadušení tónů, zatímco při zvětšení otvoru není tón čistý a rychle přechází v šum

<sup>14</sup><http://mysite.du.edu/~jcalvert/waves/pipes.htm>

<sup>15</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Vocal\\_range](http://en.wikipedia.org/wiki/Vocal_range). Oktávy značíme dolním indexem podle polohy na moderním pianě od  $A_0$  po  $C_8$ , komorní  $A$  je  $A_4$ .



trubice a použijeme pro určení frekvence hvizdu vztah (5), do nějž dosadíme hloubku ústní dutiny  $L \approx 10$  cm, dostaneme frekvenci  $f \approx 1500$  Hz, což je také řádově dobrý výsledek. Fyzikálně však nemůže být správný, protože šířka ústní dutiny je srovnatelná s její hloubkou (transversální šíření) a také víme, že při změně polohy jazyka v ústech necháváme vzduch stále volně proudit, nedochází tedy ke zkrácení délky  $L$ . Výšku tónu by pak nebylo možné modulovat.

### Experimentální ověření

Co se týče experimentálního ověření výsledků, tak autor tohoto textu hvízdát neumí, nicméně se našel dobrovolný experimentální subjekt, jehož tónový rozsah hvizdu byl změřen pomocí programu Audacity. Nejnižší naměřená základní frekvence byla 440 Hz ( $A_4$ ), nejvyšší 1400 Hz ( $\sim F_6$ ). Na dolní hranici byl záznam již dost zašumělý a nešlo již dost dobře rozlišit mezi základní frekvencí a druhou harmonickou, proto byl nejnižší tón dodatečně stanoven poslechem oproti klavíru. Měření je v souladu s naším i Rayleighovým odhadem, spíše nižší rozsah (méně než dvě oktávy) je čistě otázkou trénovanosti subjektu. Pro zajímavost – podle Guinnessovy knihy rekordů<sup>16</sup> je v současnosti nejvyšším tónem dosaženým při hvízdání nota  $H_7$  (3951 Hz). Nejnižším zahvízdaným tónem je  $F_3$  (174,6 Hz).<sup>17</sup>

### Závěr

Co říci závěrem? V úvodu jsme předesílali, že se pokusíme spíše o kvalitativní popis, nakonec se nám však zkoumaný děj povedlo i docela dobře kvantifikovat. Musíme však mít na paměti, že jsme si spoustu věcí zjednodušili a nemáme záruku, že je náš model skutečně fyzikálně správný. Podrobný rozbor by vyžadoval exaktní výpočty a pravděpodobně bychom skončili u modelování proudění vzduchu v ústní dutině. O modelování naleznete více v odkazu v poznámce,<sup>18</sup> kde se autor práce zabývá prouděním vzduchu ve flétnách.

### Komentář k došlým řešením

Ve značném počtu řešení se vyskytoval předpoklad, že v ústní dutině vzniká stojaté vlnění, podobně jako ve flétnách. Jak jsme však uvedli výše, tento model není vhodný z důvodu složité stavby ústní dutiny. Někteří z vás tvrdili, že hvízdání je umožněno díky rezonanci rtů – při hvízdání sice můžeme zaznamenat jemné chvění rtů a tváří, ale to je pouze důsledkem rezonance vzduchu v ústní dutině; hvízdát lze i s „inhibovanými“ rty. V nemalém počtu řešení se objevil Helmholtzův rezonátor jako vhodný model pro hvízdání, ale občas jste přisuzovali schopnost měnit frekvenci hvizdu spíše změně velikosti otvoru mezi rty než změně rezonančního objemu ústní dutiny. Velikost otvoru, kterým vzduch uniká, sice ovlivňuje základní frekvenci, ale pouze omezeně, neboť s příliš otevřenými ústy přechází hvizd ve foukání (šum) a s téměř uzavřenými ústy je hvizd zatlumen. Pochvala patří těm řešitelům, kteří Helmholtzovu rezonanci nejen srozumitelně popsali, ale také správně odvodili vztah pro základní frekvenci.

*Miroslav Hanzelka*

mirek@fykos.cz

<sup>16</sup><http://www.guinnessworldrecords.com/world-records/highest-note-whistled>

<sup>17</sup><http://www.guinnessworldrecords.com/world-records/lowest-note-whistled>

<sup>18</sup><http://www.lam.jussieu.fr/Publications/Theses/these-patricio-de-la-cuadra.pdf>

### Úloha III.E ... tenisky na vodě

Omlouváme se, ale řešení experimentální úlohy najdete v budoucí brožurce a na našem webu.

### Úloha III.S ... numerická

6 bodů; průměr 4,35; řešilo 17 studentů

1. Podívejte se na rovnice Lorenzova modelu a sepište skript na jeho simulaci v Octave (na to si případně osvěžte i druhý díl seriálu). Spolu s vykreslujícím příkazem by váš skript měl vypadat zhruba takto:

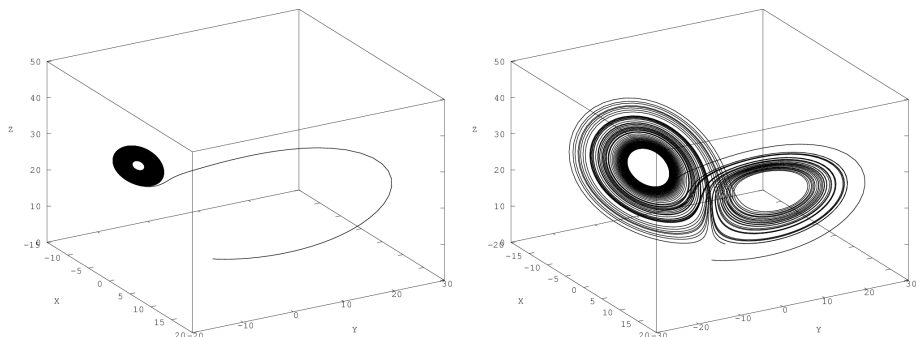
```
...
function xidot = f(t,xi)
...
xidot=...;
ydot=...;
zdot= ...;
xidot = [xidot;ydot;zdot];
endfunction
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
pocPodminka=[0.2,0.3,0.4];
reseni=ode45(@f, [0,300],pocPodminka,nastaveni);
plot3(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2),reseni.y(:,3));
```

Jen místo tří teček doplňte zbytek programu podobně jako v druhém dílu seriálu a použijte  $\sigma = 9,5$ ,  $b = 8/3$ . Pak zjistěte alespoň s přesností na jednotky, pro jaké kladné  $r$  přechází systém z asymptotického zastavování se na chaotickou oscilaci (na počátečních podmínkách nezáleží).

2. Zde je plný text octavovského skriptu pro simulaci a vizualizaci pohybu částice v gravitačním poli hmotného tělesa v rovině  $xy$ , kde všechny parametry a konstanty jsou rovny jedné:

```
clear all
pkg load odepkg
function xidot = f(t,xi)
alfa=0.1;
vx=xi(3);
vy=xi(4);
r=sqrt(xi(1)^2+xi(2)^2);
ax=-xi(1)/r^3;
ay=-xi(2)/r^3;
xidot = [vx;vy;ax;ay];
endfunction
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
x0=0;
y0=1;
vx0=...;
vy0=0;
pocPodminka=[x0,y0,vx0,vy0];
reseni=ode45(@f, [0,100],pocPodminka,nastaveni)
plot(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2));
pause()
```

- a) Zvolte počáteční podmínky  $x_0=0, y_0=1, v_{y0}=0$  a počáteční rychlost ve směru  $x$  nenulovou tak, aby byla částice vázaná, tj. neulétla z dosahu centra.
- b) Přidejte ke gravitační síle ve skriptu sílu  $-\alpha r/r^4$ , kde  $\alpha$  je malé kladné číslo. Volte postupně několik zvětšujících se  $\alpha$  počínaje  $\alpha = 10^{-3}$  a ukažte, že způsobují kvaziperiodický pohyb.



Obr. 4: Výstup skriptu pro  $r=23.8$  (vlevo) a  $r=24$  (vpravo). Na obrázku vlevo zjevně trajektorie konverguje ke stacionárnímu cyklu, zatímco napravo pozorujeme složité neperiodické chování. Předělové  $r$  tedy leží mezi těmito hodnotami a s přesností na jednotky jej určíme jako  $r_p = 24$ .

1. Váš kód pro Lorenzův model by měl s pomocí rovnic z třetího dílu seriálu vypadat zhruba takto

```
clear all
pkg load odepkg
function xidot = f(t,xi)
r = 23;
sigma = 9.5;
b=8/3;
xdot=sigma*(xi(2)-xi(1));
ydot=-xi(1)*xi(3) + r*xi(1)-xi(2);
zdot= xi(1)*xi(2)-b*xi(3);
xidot = [xdot;ydot;zdot];
endfunction
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
pocPodminka=[0.2,0.3,0.4];
reseni=ode45(@f,[0,100],pocPodminka,nastaveni);
plot3(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2),reseni.y(:,3));
```

Tento kód jste pak mohli spouštět s různými  $r$ ... a pozorovat, pro která je už pohyb chaotický a pro která ještě ne. Asi nejlepší technika pro nalezení parametru bylo kontrolovat trajektorii pro hrubá  $r$  a pak postupně púlit interval mezi dvěma body, mezi kterými docházelo k předělu od stacionárního chování k chaosu. K vyřešení úlohy stačilo nalézt předěl

jako na obrázku 4 a pak samozřejmě zaokrouhlit na počet platných cifer, tj. máme přibližně předělové  $r = 24$ . Jemnějším dělením intervalu jste mohli dojít třeba až k  $r = 23,90$ .

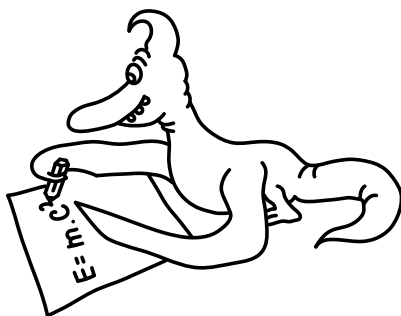
2. Skript s pozmeněnou silou byl téměř identický tomu ze zadání, změnila se pouze funkce `xidot` následujícím způsobem

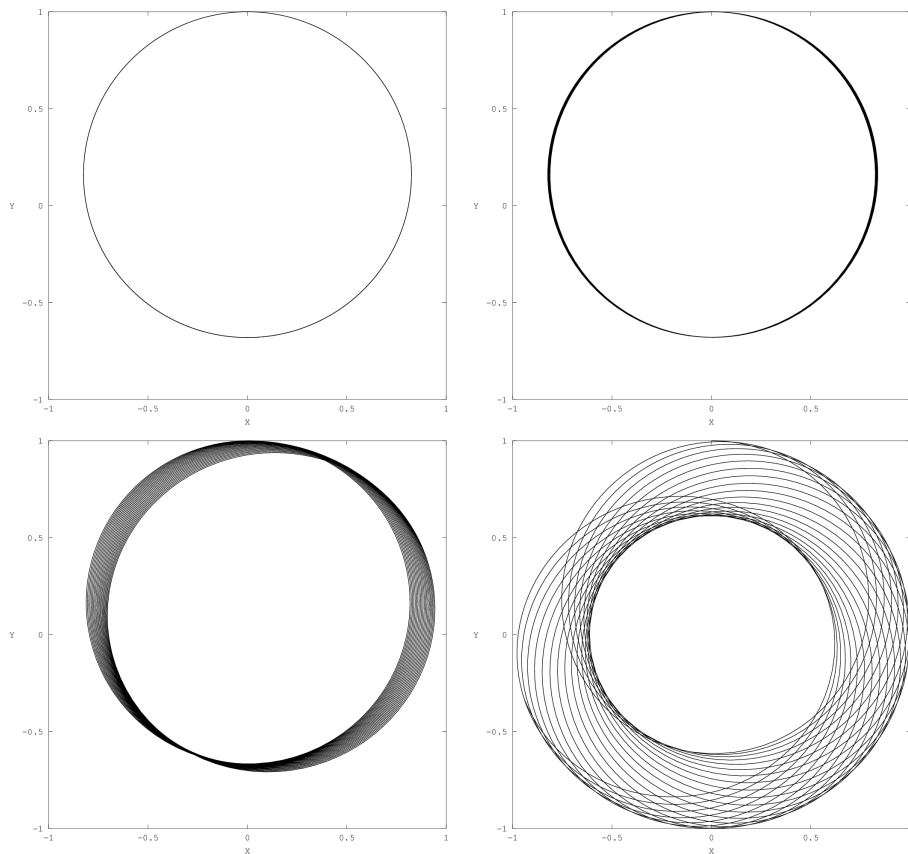
```
function xidot = f(t,xi)
alfa=0;
vx=xi(3);
vy=xi(4);
r=sqrt(xi(1)^2+xi(2)^2);
ax=-xi(1)*(1/r^3+alfa/r^4);
ay=-xi(2)*(1/r^3+alfa/r^4);
xidot = [vx;vy;ax;ay];
endfunction
```

Pokud jste zvolili `vx0` o hodně jiné než 1, skript vám začal hlásit, abyste se pokusili změnit `MaxStep` nebo `InitialStep`, aby se dokázal prointegrovat skrze oblast poblíž  $r = 0$ , kde na částici působí vysoké síly a má vysokou rychlost. Pro některé počáteční podmínky se dokonce mohlo stát, že integrátor neintegroval trajektorii dobře a vycházela vám kvaziperiodická už pro `alfa=0`. Pokud se vám toto přihodilo a stejně jste to dobře zdokumentovali spolu s různými hodnotami `alfa`, určitě dostanete plný počet bodů.

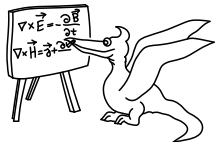
Pokud jste ale tuto smůlu neměli a zvolili třeba `vx=0.9`, získali jste grafy jako na obrázku 5. Vidíte, že i pro zcela maličká  $\alpha$  se trajektorie začíná stáčet a není periodická. Takováto efektivní síla s nenulovým  $\alpha$  působí například při zahrnutí obecně-relativistických korekcí k newtonovské gravitaci a lze ji pozorovat již ve sluneční soustavě na stáčení perihelia Merkuru.

*Vojtěch Witzany*  
witzanyv@fykos.cz





Obr. 5: Grafy pro pohyb částic v téměř newtonovském gravitačním poli s  $\alpha = 0; 10^{-3}$  (vlevo a vpravo nahoře v pořadí respektive) a  $\alpha = 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-2}$  (vlevo a vpravo dole v pořadí respektive). Pro  $\alpha = 10^{-3}$  je efekt téměř nepostřehnutelný, zatímco pro  $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$  již o kvaziperiodicitě nemůže být žádných pochyb.



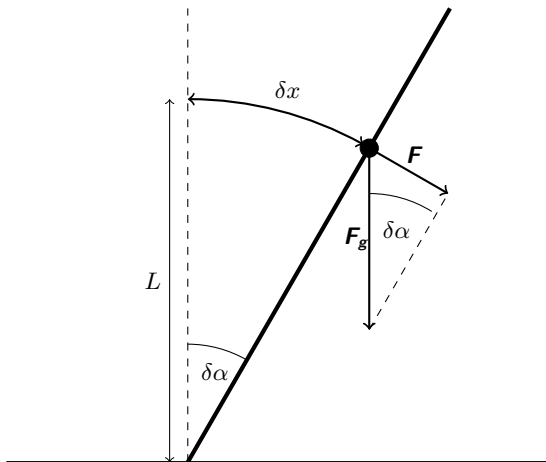
## Seriál: Definujeme chaos!

V prvních dvou dílech tohoto seriálu jsme se naučili namontovat křídýlka na slepici ve vakuu. Tedy, na příkladu rotujícího fotbalového míče jsme se naučili jak zformulovat jednoduchý model a pak také spočítat jeho důsledky pomocí numerických simulací. Ve třetím dílu jsme pak probrázili krajinu dynamických systémů a ukázali si pár ochutnávek toho, co lze čekat od chování různých vázaných pohybů.

Vázaný pohyb může být statický (tedy vlastně „nepohyb“), kvaziperiodický (kde periodický je speciální případ takového pohybu) a aperiodický. Aperiodický pohyb je navíc v drtivé většině případů chaotický. Ale co že to znamená ten chaotický pohyb? To si právě teď řekneme, počkejte minutku.

### Ztráta desetinných čísel s propiskou

Teď potřebuji, abyste si vzpomněli na úplně první seriálovou úlohu, kterou jste v tomto ročníku řešili. Měli jste v ní za úkol uvažovat nad tím, jak to, že žijeme v deterministickém světě, kde je i přesto tolik nejistoty. Chaos a s ním spojená ztráta informace s tím má mnoho dočinění. My si ale teď ukážeme, jak se informace ztrácí v příkladu z úlohy – u propisky postavené na špičce.



Obr. 6: Nákres sil působících na propisku vychýlenou o úhel  $\delta\alpha$  z nestabilní rovnovážné polohy.

U propisky budeme uvažovat pouze dva její možné pohyby – doleva a doprava. Výchytku polohy těžiště budeme značit  $\delta\alpha$  a vzdálenost těžiště od špičky  $L$ . Celá situace je načrtnutá na obrázku 6. Kdybychom uvažovali, že se propiska může pohnout i dopředu a dozadu, došli bychom k těm stejným závěrům, k jakým za chvíli dojdeme, jen bychom se museli starat o více rozměrů.

Když je těžiště propisky odchýlené o nějaký malý oblouk  $\delta x$  od polohy nad špičkou, část tíhové síly se vyruší tlakem špičky o povrch, ale část se promítne do směru pádu. Síla působící ve směru pádu je tedy  $F = mg \sin(\delta\alpha)$ . Délka oblouku od rovnovážné polohy těžiště je  $\delta x = L\delta\alpha$ <sup>19</sup> a Newtonův druhý zákon je při promítnutí do oblouku  $F = m\delta\ddot{x}$ . Dostáváme tedy diferenciální rovnici

$$m\delta\ddot{x} = mg \sin\left(\frac{\delta x}{L}\right). \quad (10)$$

Protože ale mluvíme o hodně malých vychýleních platí přibližně  $\sin \delta\alpha \approx \delta\alpha = \delta x/L$ . Když to pak dosadíme do rovnice (10) a podělíme jí  $m$ , dostáváme

$$\delta\ddot{x} = \frac{g}{L}\delta x.$$

Máme tu tedy rovnici, co říká „druhá derivace funkce = něco krát funkce“. Funkcí, které vypadají v podstatě stejně i po dvou derivacích, není mnoho – v reálném oboru je to pouze sinus, kosinus a exponenciála.<sup>20</sup> Sinus a kosinus ale po dvojím derivování před sebe vyhodí znaménko mínus, což v tomto případě nemáme, a proto řešením může být pouze exponenciála. Můžete si sami ověřit, že řešení naší rovnice je

$$\delta x = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{L}}t\right),$$

kde  $C_1, C_2$  jsou dvě konstanty odpovídající různým počátečním podmínkám. Pokud například nastavíme  $C_1 = \delta x_0$  a  $C_2 = 0$ , pak derivováním dostaneme pro rychlost v čase  $t = 0$

$$\delta v_0 \equiv \delta\dot{x}(t=0) = \delta x_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \exp\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\Big|_{t=0} = \delta x_0 \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Naopak pokud  $C_1$  úplně vynulujeme a nastavíme  $C_2 = \delta x_0$ , pak dostaneme  $\delta v_0 = -\delta x_0 \sqrt{g/L}$ .

Hlavní ale je, že pokud je malá výchylka v kladných  $\delta x$  (tj. doprava) a rychlost těžiště také doprava, výchylka roste exponenciálně (což je děsně rychle). To vše ale platí jen do okamžiku, kdy začnou být  $\delta x$  a  $\alpha$  příliš velké na to, aby platilo  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

Na obrázku 7 vidíte náčrt různých vývoju propisky v prostoru rychlostí a poloh. Na obrázku 8 vidíte vývoj kruhu počátečních podmínek okolo  $\delta x = 0$  a  $\delta v = 0$ . Když totiž roztřesenou rukou umístíme propisku na stůl špičkou dolů, nejsme si jisti, jestli jsme těžiště umístili přímo nad špičku. Nejsme si také jisti, jestli jsme na poslední chvíli do propisky trochu nedrknuli a neudělili jí tím malou rychlost – ať na jednu nebo na druhou stranu. Jsme si tedy jisti jen tím, že jsme propisce dali počáteční podmínky jen někde v podobném kruhu neurčitosti.

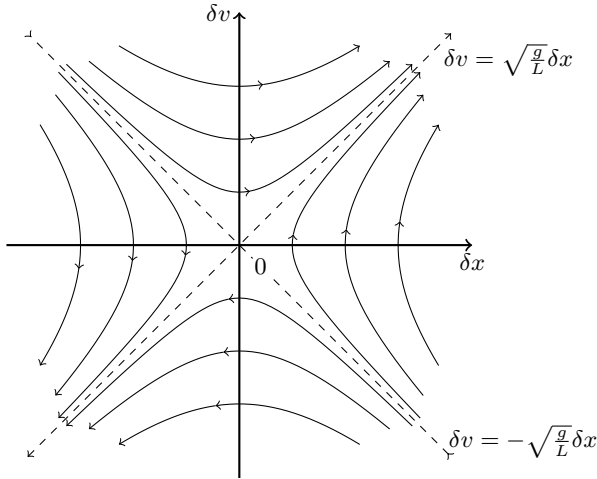
Jak ale vidíte na obrázku 8, tvar kruhu se rychle mění. Po chvíli jsme si vlastně velmi jisti tím, že těžiště propisky již není nad špičkou, ani blízko takovému bodu, protože se kruh neurčitosti vývojem úplně rozmázl do pádu buď nalevo nebo napravo. Paradoxně jsme si velmi jisti tím, že systém skončil ledaskde, jen ne tam, kde bychom v idealizovaném případě předpokládali.

## Ljapunov a jeho exponenti

Podobné jako v případě s propiskou je to s chaosem. Systém jako třeba povětrnostní podmínky nějak změříte a podle ideálních hodnot svého měření předpovíte počasí v následujících dnech. Jenže víte také o nejistotách svého měření a chaotičnosti počasí. Stejně jako v případě propisky si po několika dnech jste fakticky jisti tím, že se systém nachází s nejvyšší pravděpodobností všude možně, jen ne tam, kde jste jej předpověděli na základě naměřených hodnot.

<sup>19</sup>Úhly zadáváme v radiánech!

<sup>20</sup>Pak ještě hyperbolické funkce  $\sinh$  a  $\cosh$ , ale to jsou jen lineární kombinace reálných exponenciál.



Obr. 7: Náčrt různých vývoje malých výchylek propisky na špičce. Najděte si na grafu nějaké počáteční výchylky  $\delta x$ ,  $\delta v$  a svůj vývoj pak získáte následováním šipek. Vidíte, že všechny vývoje až na přímku  $\delta v = -\sqrt{g/L}\delta x$  asymptoticky konvergují k  $\delta v = \sqrt{g/L}\delta x$ , a tudíž vedou k pádu propisky. Pokud vás graf s jednou osou  $\delta x$  a s další  $\delta v$  mate, můžete si osu  $\delta v$  zakrýt a sledovat, kam směřuje všechen vývoj ve směru výchylky  $\delta x$ .

Veličinou, která charakterizuje tento rozpad informace, je takzvaný Ljapunovův exponent. Ljapunovův exponent charakterizuje exponenciální rozbíhání pro velmi blízké stavy. V případě propisky se malá odchylka  $\delta x_0$  od nestabilní rovnováhy na špičce rozbíhala v nejhorsím případě jako  $\delta x_0 \exp(\sqrt{g/L}t)$ , v nejlepším by se sbíhala jako  $\delta x_0 \exp(-\sqrt{g/L}t)$ . V tomto případě by tedy Ljapunovovy exponenty byly  $\pm\sqrt{g/L}$ . Jak ale vidíte na obrázku 8, pro rostoucí nejistotu je důležitý hlavně kladný exponent  $\sqrt{g/L}$ , který roztahuje počáteční podmínky a na hodnotě záporného exponentu vlastně zas až tolik nezáleží.

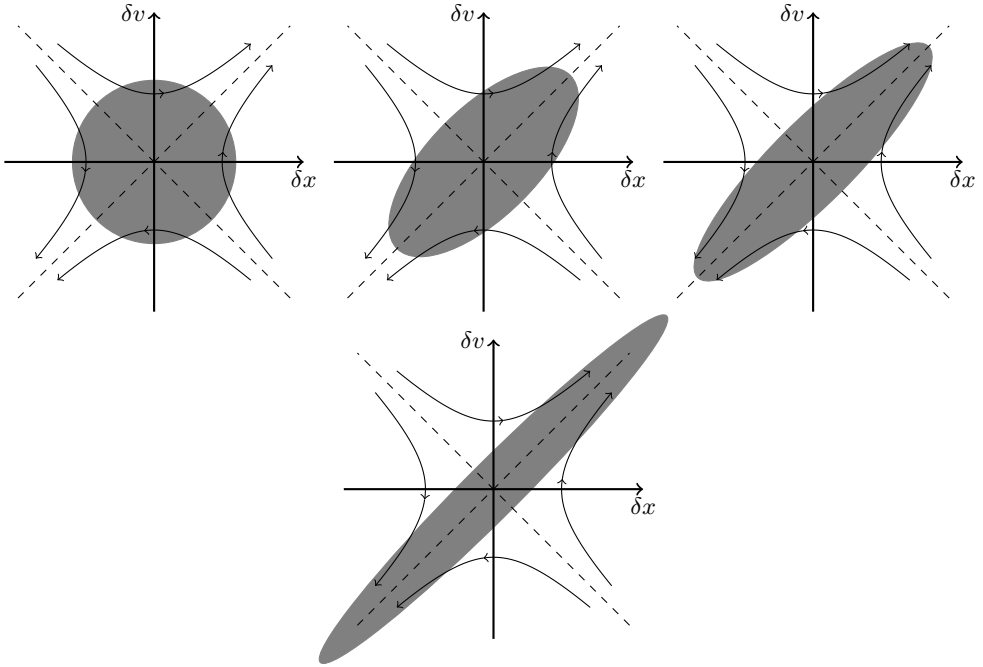
Pro obecný dynamický systém můžeme definovat Ljapunovův exponent *pro nějakou celou trajektorii* a vlastně nám nevadí, pokud se původní odchylka kromě růstu velikosti okolo původního směru nějak kroutí. Ljapunovův exponent je tedy nějaké číslo  $\lambda$  takové, že platí, že se nějaká obecně vícerozměrná odchylka  $\delta \mathbf{Z}_0$  od dané trajektorie  $\mathbf{Z}(t)$  ve své velikosti vyvíjí jako  $|\delta \mathbf{Z}(t)| = \exp(\lambda t)|\delta \mathbf{Z}_0|$ .

V jakém čase bychom ale začali sledovat rozbíhavost trajektorií? Na jakém místě bychom měli začít s malinko odchýleným trajektorijním kamarádem? Nejlepší odpověď zní, že rozbíhavost musíme nějak vystředovat přes celou trajektorii. Pokud ale sledujeme trajektorii ve vázaném systému a trajektorie nekonverguje ke statické, pohyb musí nutně pokračovat nekonečně dlouho. Formálně je tedy Ljapunovův exponent definován jako

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \mathbf{Z}_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\delta \mathbf{Z}(t)|}{|\delta \mathbf{Z}_0|} \right),$$

kde limita  $\delta \mathbf{Z}_0 \rightarrow 0$  jen značí, že se zajímáme o nekonečně malé odchylky a jejich rozbíhavost. Limita  $t \rightarrow \infty$  pak zajišťuje, že zahrnujeme do výpočtu celou trajektorii. To se může zdát dost





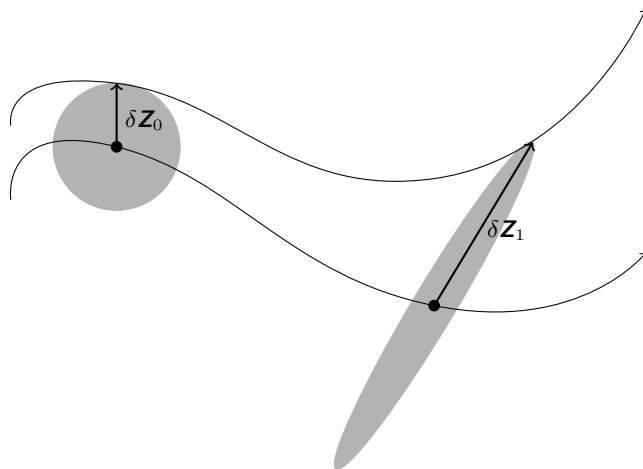
Obr. 8: Náčrt časového vývoje naší oblasti nejistoty ve výchylce propisky. Při předpokladu  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a  $L = 5 \text{ cm}$  bude naše oblast nejistoty zdeformovaná jako v posledním obrázku během 80 ms. Pokud je na vás graf složitý, stačí z něj jen vysledovat, jak se naše nejistota roztahuje jen podél osy  $\delta x$  tím, že si na ni zdeformovaný kroužek promítnete.

divné, tak vylíčím, jak se takový Ljapunovský exponent spočítá v praxi:

1. Program začne numericky integrovat trajektorii  $\mathbf{Z}_A(t)$ , jejíž Ljapunovův exponent chceme zjistit a vedle ní úplně malinko odchýlenou trajektorii  $\mathbf{Z}_B(t)$ .
2. Program sleduje odchylování nebo sbíhání těchto trajektorií a pokusí se na tuto tendenci napasovat exponenciely s různými exponenty. Ten nejlepší fit si poznamená jako lokální Ljapunovův exponent.
3. Jakmile se trajektorie v čase  $t_{\text{moc}}$  moc rozeběhnou, vezme odchylku  $\Delta = \mathbf{Z}_A(t_{\text{moc}}) - \mathbf{Z}_B(t_{\text{moc}})$ , zahodí  $\mathbf{Z}_B$  a začne zase integrovat  $\mathbf{Z}_A(t)$  spolu s méně odchýlenou trajektorií s počáteční podmínkou  $\mathbf{Z}_C(t_{\text{moc}}) = \mathbf{Z}_A(t_{\text{moc}}) + \varepsilon\Delta$ , kde  $\varepsilon < 1$ .
4. Tento proces se dlouho opakuje a nakonec program získá přibližnou hodnotu vystředováním všech lokálních Ljapunovových exponentů.

Není to tedy žádná věda, Ljapunovův exponent je jen globální (nebo prostě zprůměrovanou) mírou sbíhavosti či rozbíhavosti blízkých trajektorií. Celá procedura dává nějaký smysl jen díky tomu, že se bavíme o vázaných trajektoriích. Chaotická trajektorie se totiž sice nikdy neopakuje zcela přesně, ale musí pořád létat v těch samých částech prostoru, takže se dříve nebo později začne opakovat *přibližně*. Když tedy zmíněnou procedurou počítáme Ljapunovský exponent po hodně dlouhou dobu, jsme si velmi jisti, že jsme vystihli typické chování trajektorie a že

jsme exponent spočítali s poměrně vysokou přesností.



Obr. 9: Náčrt časového vývoje oblasti nejistoty v případě trajektorie s kladným Ljapunovovým exponentem. Malá odchyłka  $\delta Z_0$  se po nějakém čase vyvine do lehce pootočené a exponenciálně prodloužené odchyłky  $\delta Z_1$ . V tomto obrázku existuje i směr se záporným exponentem, ale vidíte, že maximální vzdálenost odchyłených trajektorií na záporném exponentu nezávisí.

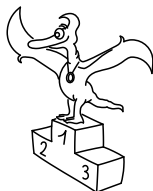
Na obrázku 9 můžete vidět ilustraci ne nepodobnou rozbíhání kruhu počátečních podmínek z obrázku 8. Vidíme na něm, že stejně jako u propisky může nejistota u trajektorie s kladným Ljapunovovým exponentem úplně rozmáznout vývoj tak, že jsme si *téměř jisti* tím, že se nenacházíme tam, kde bychom si idealizovaně mysleli. Na obrázku také vidíte, že pro odhad růstu nejistoty je nejdůležitější *největší* Ljapunovův exponent a ty menší nejsou podobně jako u propisky tak důležité.

### Konečně ta definice

Nebudeme to už zbytečně ždímat, definujme chaos. Chaotická trajektorie je taková, která je aperiodická a zároveň má alespoň jeden kladný Ljapunovův exponent. Znamená to, že její tvar je nesmírně komplikovaný a neopakující se, ale také to, že dřív nebo později nějakým vyrušením sklouzne vývoj daného dynamického systému úplně jinam – a to nejčastěji k další chaotické trajektorii.

Existují i alternativní definice chaosu, které se opírají o různé topologické pojmy a představu mísení prostoru počátečních podmínek. To dává samozřejmě velký smysl, protože si člověk dokáže lehko představit, že se malý kroužek počátečních podmínek při kladné rozbíhavosti trajektorií a komplikovaném pohybu rozmaže po celém možném prostoru stavů dynamického systému. Je proto přirozené obejít aperiodičnost a exponenty a rozmíchávání blízkých vývoju vložit rovnou do definice. Vymezení chaosu pomocí exponentů a aperiodičnosti je pro nás ale zdaleka nejpraktičtější.

To je v tomto dílu vše, teď už máme základní výbavu na chápání chaosu. V příštích dílech se konečně podíváme na nějaké zajímavé aplikace toho, co jsme se doteď naučili. Víte třeba, jak se v počítači generují náhodná čísla? A jsou opravdu náhodná? Odpovědi se dočkáte.



## Pořadí řešitelů po III. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

### Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	119
1. Filip Čermák	G Golianova, Nitra	6	4	4	1	3	4	-	6	28	79	88
2. Šimon Karch	G, Komenského, Havířov	4	4	3	2	1	5	6	7	32	76	85
3. Jan Preiss	G, Lovosice	2	4	4	1	1	4	5	-	21	63	65
4. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	4	4	4	0	3	2	7	-	24	71	63
5. Ondřej Knopp	G, Třeboň	4	4	4	0	-	3	6	-	21	76	58
6. Jakub Suchánek	G Opatov, Praha	4	0	4	1	-	1	5	-	15	66	56
7. Denisa Chytilová	G J. Škody, Přerov	4	4	-	0	1	-	5	-	14	64	54
8. David Němec	G, Tanvald	4	4	-	0	1	1	6	-	16	50	52
9. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	4	4	-	-	-	1	6	-	15	69	50
10. Jan Došek	G, Brandýs n. L.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	47

### Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	119
1. Přemysl Štastný	G, Žamberk	4	4	4	1	-	2	6	6	27	79	86
2. Jáchym Bártík	G Havlíčkův Brod	4	4	4	3	3	1	5	-	24	68	77
3.-4. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	4	4	4	2	5	-	4	-	23	75	76
3.-4. David Vokrouhlický	G Jana Keplera, Praha	4	4	4	1	1	3	3	1	21	64	76
5. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	4	4	-	1	1	2	6	-	18	66	61
6. Štěpán Stenclák	G, Třinec	-	4	4	-	-	3	4	-	15	73	58
7. Daniel Pajer	G Jana Keplera, Praha	4	4	3	0	-	-	3	-	14	59	55
8. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	4	4	-	0	3	-	5	-	16	65	51
9.-10. Aleš Krčil	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	2	4	-	0	1	1	3	-	11	47	48
9.-10. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava	4	4	1	0	-	-	-	-	9	74	48

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ	
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	4	5	5	8	6	<b>36</b>	<i>100</i>	<b>107</b>
1. Tomáš Hrbek	G J. Ressela, Chrudim	2	2	2	2	2	5	6	5	<b>26</b>	71	<b>76</b>	
2. Tomáš Fárník	G P. de Coubertina, Tábor	1	2	4	2	2	3	5	-	<b>19</b>	72	<b>73</b>	
3. Andrej Uhlíarik	G Námestovo	2	2	4	1	1	2	6	1	<b>19</b>	56	<b>54</b>	
4. Pavel Souček	G, Nymburk	2	1	2	0	5	-	5	-	<b>15</b>	52	<b>46</b>	
5. Klára Stefanová	G B. Němcové, HK	1	2	-	1	1	-	-	-	<b>5</b>	61	<b>36</b>	
6. Kristina Mrázová	G, Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	52	<b>33</b>	
7. Marian Poljak	G J. Škody, Přerov	2	2	3	0	1	-	4	-	<b>12</b>	61	<b>30</b>	
8. Jakub Pilarš	G J. Ressela, Chrudim	2	1	2	0	-	1	4	-	<b>10</b>	43	<b>29</b>	
9. Kateřina Hladká	G, Karviná	-	1	-	0	1	1	5	-	<b>8</b>	49	<b>28</b>	
10. Peter Lučanský	G Bardejov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	47	<b>27</b>	
11. Jiří Tuháček	Masarykovo G, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	<b>26</b>	

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ	
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	4	5	5	8	6	<b>36</b>	<i>100</i>	<b>107</b>
1. Jozef Bucko	G PdC, Piešťany	2	2	4	1	5	4	5	6	<b>29</b>	79	<b>85</b>	
2. Jakub Sláma	G Opatov, Praha	2	2	3	1	2	1	8	6	<b>25</b>	79	<b>84</b>	
3. Domínika Jochcová	Wichterlovo G, Ostrava	2	2	5	1	1	4	7	5	<b>27</b>	77	<b>79</b>	
4. Filip Ayazi	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	2	4	0	5	2	7	5	<b>26</b>	71	<b>75</b>	
5. Kateřina Smítalová	G, Dašická, Pardubice	2	2	3	-	5	1	8	-	<b>21</b>	65	<b>60</b>	
6. Petr Doležal	G Z. Wintra, Rakovník	-	2	4	0	1	-	-	6	<b>13</b>	72	<b>54</b>	
7. Luboš Krnáč	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	-	1	4	-	-	-	6	3	<b>14</b>	74	<b>43</b>	
8. Kryštof Šulc	VOŠ, SOŠ a G, Evropská, Praha	-	-	4	2	3	-	-	-	<b>9</b>	66	<b>38</b>	
9. Mojmír Poprocký	G Matyáše Lercha, Brno	-	2	4	-	-	-	-	-	<b>6</b>	75	<b>33</b>	
10. Pavel Blažek	G a ZUŠ, Šlapanice	1	2	4	-	-	-	5	-	<b>12</b>	72	<b>31</b>	
11. Marek Biely	G, Považská Bystrica	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	<b>30</b>	



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

18000 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)FYKOS je také na Facebooku   
<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.