Úloha VI.3 . . . kule a šlupka

4 body; průměr 3,41; řešilo 44 studentů

Máme měděnou plnou kouli a měděnou tenkou kulovou slupku (tak tenkou, že můžete zanedbat její tloušťku). Obě mají při pokojové teplotě stejný poloměr. Jak se bude jejich poloměr měnit, když je začneme ohřívat? (Zapište závislost poloměru na teplotě a okomentujte ji.) U měděné slupky uvažujte, že má v sobě malé otvory, které vyrovnávají vnitřní a vnější tlak vzduchu.

Karel se inspiroval knížkou Physics for Scientists and Engineers od Serwaye & Jewetta.

Máme-li při teplotě T_0 tyč délky l_0, dokážeme malé změny její délky způsobené změnou teploty popsat pomocí koeficientu délkové teplotní roztažnosti α a teplotního intervalu ΔT vztahem

$$l(T_0 + \Delta T) = l_0 \left(1 + \alpha \Delta T\right) . \tag{1}$$

Malou změnou se rozumí taková, že součin $\alpha \Delta T \ll 1$.

Co se ale děje s plošným nebo prostorovým útvarem? To samé. Představme si, že těleso, které zkoumáme, je složeno z atomů, které jsou navzájem spojeny vazbami, které podléhají stejné deformaci jako pružná tyč (tj. s teplotou se roztahují podle vztahu (1) – je jasné, že když se takto mění délka jedné vazby, při spojení více vazeb za sebe se celková délka tělesa bude měnit stejně). Ukažme si to na obdélníku (strany a, b; plocha $S_0 = ab$), resp. kvádru (strany a, b, c; objem $V_0 = abc$). Pokud uvažujeme, že teplotní roztažnost je izotropní (tj. do každého směru se zkoumaný předmět roztahuje stejně), dají se plocha, resp. objem vyjádřit jako

$$S(T_0 + \Delta T) = a\left(1 + \alpha \Delta T\right) \cdot b\left(1 + \alpha \Delta T\right) = S_0 \left(1 + \alpha \Delta T\right)^2 , \quad \text{resp.}$$
$$V(T_0 + \Delta T) = a\left(1 + \alpha \Delta T\right) \cdot b\left(1 + \alpha \Delta T\right) \cdot c\left(1 + \alpha \Delta T\right) = V_0 \left(1 + \alpha \Delta T\right)^3 .$$

Nyní využijeme předpokladu, že $\alpha \Delta T \ll 1$. Umocníme-li závorky, dostaneme

$$(1 + \alpha \Delta T)^2 = 1 + 2\alpha \Delta T + \alpha^2 \Delta T^2 ,$$
$$(1 + \alpha \Delta T)^3 = 1 + 3\alpha \Delta T + 3\alpha^2 \Delta T^2 + \alpha^3 \Delta T^3 .$$

Jestliže je koeficient α malý, jeho druhá nebo třetí mocnina je ještě menší. Můžeme tedy členy s vyššími mocninami zanedbat a dostáváme pouze lineární závislost.

$$S(T_0 + \Delta T) \approx S_0 \left(1 + 2\alpha \Delta T\right) ,$$
$$V(T_0 + \Delta T) \approx V_0 \left(1 + 3\alpha \Delta T\right) .$$

Proč jsme se zabývali těmito vztahy? Odpověď souvisí se zadáním – zvětšuje-li se koule, děje se tak ve všech třech rozměrech. Roztahuje-li se zanedbatelně tenká kulová slupka, mění se rozměry jen dva (předpokládáme, že se všechno děje tak pomalu a rovnoměrně, že nedochází k žádným lokálním deformacím).

Pokud vyjádříme rozměry obou těles pomocí poloměru (první řádek bude odpovídat slupce, druhý plné kouli, bereme r_0 při původní teplotě T_0, r při teplotě $T_0 + \Delta T$), dostaneme:

$$4\pi r^2 = 4\pi r_0^2 \left(1 + 2\alpha \Delta T\right) , \quad \text{resp.}$$
$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \left(1 + 3\alpha \Delta T\right) .$$

Z těchto vztahů si už jednoduše můžeme vyjádřit poměr r/r_0 v závislosti na teplotním rozdílu ΔT.

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt{1 + 2\alpha \Delta T}\,, \quad \text{resp.}$$
$$\frac{r}{r_0} = \sqrt[3]{1 + 3\alpha \Delta T}\,.$$

Což znamená, že kulová slupka bude při zahřátí zvětšovat svůj poloměr s druhou odmocninou teplotního rozdílu, zatímco pro plnou kouli bude platit závislost na odmocnině třetí. Protože v argumentu odmocniny ale není stejná závislost na α, je potřeba znovu využít toho, že $\alpha \Delta T$ je malá hodnota a rozepsat si odmocninu do Taylorova polynomu.[1] Dostaneme

$$\frac{r}{r_0} = \sqrt{1 + 2\alpha \Delta T} \approx 1 + \frac{1}{2} 2\alpha \Delta T + \dots\,, \quad \text{resp.}$$
$$\frac{r}{r_0} = \sqrt[3]{1 + 3\alpha \Delta T} \approx 1 + \frac{1}{3} 3\alpha \Delta T + \dots\,,$$

což se po pokrácení zlomků redukuje pro oba případy na

$$\frac{r}{r_0} = 1 + \alpha \Delta T\,.$$

Tento výsledek je identický se vztahem (1) a znamená to, že koule i kulová slupka se bude rozpínat s teplotou stejně.

Aleš Podolník
`ales@fykos.cz`

[1] Pro $x \ll 1$ platí, že $\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x^2)$, kde $o(x^2)$ je velmi malý, až zanedbatelný zbytek závislý na x^2.