Úloha IV.4 ... vybitý puding

4 body; průměr 2,94; řešilo 31 studentů

Modelů atomu vodíku bylo nespočetné množství a mnohé z nich už jsou překonané, ale my máme rádi puding a tak se vrátíme k tzv. pudinkovému modelu vodíku. Atom tvoří koule o poloměru R s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem („puding“), v kterém se nachází jeden elektron („rozinka“). Samozřejmě nejlépe je elektronu v místě s nejnižší energií, tak sedí ve středu pudingu. Celkově je soustava elektricky neutrální. Jakou energii musíme dodat elektronu, abychom ho dostali do nekonečna? Jaký by musel být poloměr pudingu, aby se tato energie rovnala Rydbergově energii (excitační energie elektronu v atomu vodíku)? Poloměr vyjádřete v násobcích Bohrova poloměru. *Jakub vařil puding.*

Najprv si určíme hustotu elektrického náboja ρ kladne nabitej gule s polomerom R. Náboj elektrónu je $-e$ a keďže je atóm celkovo neutrálny, tak kladne nabitá guľa má náboj $+e$. Pre homogénne rozloženie náboja v guli je hustota v nej všade rovnaká. Dá sa teda vypočítať ako podiel celkového náboja e a objemu gule V

$$\rho = \frac{e}{V} = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3e}{4\pi R^3}\,.$$

Budeme chcieť vypočítať elektrické pole, ktoré vytvára kladná časť atómu (v jej poli sa bude elektrón pohybovať). Nato nám bude užitočná *Gaussova veta*. Tá vraví, že ak vezmeme ľubovoľnú uzavretú plochu[1] S, tak tok elektrickej intenzity[2] Φ plochou S je úmerný náboju Q_{in} vymedzenému plochou S, tj.

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_0}\,.$$

Vo vzťahu ešte vystupuje konštanta ε_0, aby sedeli jednotky (naschvál si to môžete vyskúšať pre guľu a jeden bodový náboj v jej strede). Využijeme symetriu našej situácie a zvolíme za uzavretú plochu povrch gule $K(r)$ s polomerom r a so stredom v strede nabitej gule. Jednak zo symetrie vieme, že vektor elektrickej intenzity smeruje od stredu, teda je vždy kolmý na povrch gule (bude sa ľahko rátať skalárny súčin), a po druhé vieme, že jeho veľkosť je na povrchu gule rovnaká a označíme ju $E(r)$. Dostaneme tak

$$\oint_{K(r)} E(r)\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{\mathrm{in}}(r)}{\varepsilon_0}\,.$$

Veľkosť intenzity je v rámci integrácie konštanta, takže ju môžeme vybrať pred integrál. Zvyšný integrál je integrál povrchu gule, teda výsledkom integrálu je povrch gule $4\pi r^2$. Dostaneme tak

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\mathrm{in}}(r)}{\varepsilon_0}\,.$$

Teraz si rozdelíme výber gule na dva prípady. Ak je polomer gule r väčší/rovný polomeru R alebo ak je polomer gule r menší/rovný polomeru R. V prvom prípade je náboj vo vnútri gule

[1] Uzavretá plocha v trojrozmernom priestore znamená plocha, ktorá nemá hranicu, okraj. Napríklad povrch gule nemá hranicu, preto je to uzavretá plocha. Ale ak by sme povrch gule rozrezali rovinou na dva guľové vrchlíky, tak tieto vrchlíky majú hranicu – kružnicu v mieste rezu – a preto nie sú uzavreté plochy.

[2] Tok vektorového poľa $\boldsymbol{A}$ plochou je analógiou toku vody plochou, kde vektormi sú vektory rýchlosti. Tok cez celú plochu sa získa spočítaním/integráciou malých tokov $\mathrm{d}\Phi$ cez jednotlivé malé plochy $\mathrm{d}S$. Ak vektor $\boldsymbol{A}$ smeruje kolmo na plochu $\mathrm{d}S$, tak je veľkosť toku $\mathrm{d}\Phi = A\mathrm{d}S$. Ak vektor $\boldsymbol{A}$ smeruje v rovine plochy $\mathrm{d}S$, tak cez plochu nič "netečie" a tok je nulový. Tok teda závisí od orientácie vektora $\boldsymbol{A}$ a plochy. Preto sa definuje *vektor plochy* $\mathrm{d}S$, ktorý má veľkosť $\mathrm{d}S$ a má smer normály plochy $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\boldsymbol{n}$. Tok je potom skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{A}$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, $\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

polomeru r rovný celkovému náboju kladnej gule e. V druhom prípade je náboj vo vnútri gule polomeru r rovný súčinu hustoty kladného náboja a objemu gule polomeru r. Dostaneme tak

$$Q_{\rm in}(r) = \begin{cases} e\,, & r \geq R\,,\\ e\frac{r^3}{R^3}\,, & r \leq R\,. \end{cases}$$

A pre veľkosť elektrickej intenzity $E(r)$ dosadením dostaneme

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\,, & r \geq R\,,\\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{er}{R^3}\,, & r \leq R\,. \end{cases}$$

Všimnime si, že pre $r \geq R$ rovnomerne nabitá guľa vytvára rovnaké pole ako bodový náboj rovnakej veľkosti umiestnený v jej strede. Vo vnútri gule elektrická intenzita lineárne rastie z nuly v strede po maximum na povrchu gule.

A teraz vypočítame energiu/prácu W potrebnú na prenesenie náboja zo stredu gule do nekonečna. Na elektrón pôsobí sila veľkosti $F(r) = eE(r)$ smerujúca do stredu gule. Najprv ukážeme surový postup integrovania. Práca je

$$W = \int_0^{+\infty} F(r)\,\mathrm{d}r\,.$$

Rozdelíme si integrál na dva integrály na dvoch intervaloch

$$W = \int_0^R F(r)\,\mathrm{d}r + \int_R^{+\infty} F(r)\,\mathrm{d}r\,,$$

dosadíme vzťah pre silu a elektrickú intenzitu

$$W = \int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2 r}{R^3}\,\mathrm{d}r + \int_R^{+\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\,\mathrm{d}r\,,$$

vyberieme konštanty pred zátvorku a zintegrujeme funkcie

$$W = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{+\infty}\,,$$

dosadíme medze a dostaneme výsledok

$$W = \frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\,.$$

Teraz ukážeme postup bez integrovania (integrovanie za nás urobili ľudia pred nami). Prácu na presun do nekonečna môžeme rozdeliť na prácu zo stredu na povrch W_1 a z povrchu do nekonečna W_2.

V prvom prípade pôsobiaca sila závisí lineárne od vzdialenosti od stredu, čo nám pripomína pružinu s určitou tuhosťou k

$$F(r) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r\,,$$

$$k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,.$$

Vieme, že potenciálna energia pružiny je[3] $E_\mathrm{p} = kx^2/2$. Z toho vieme zistiť prácu W_1 ako rozdiel potenciálnych energií v R a 0:

$$W_1 = E_\mathrm{p}(R) - E_\mathrm{p}(0) = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}R^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\,.$$

V druhom prípade, ako sme už spomenuli, sa pole správa ako pole bodového náboja. Teda prácu W_2 vypočítame z rozdielu potenciálnych energií bodových nábojov v nekonečnej vzdialenosti a vo vzdialenosti R. Potenciálna energia bodových nábojov opačnej polarity je

$$E_\mathrm{p} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}\,.$$

Potom práca W_2 je

$$W_2 = E_\mathrm{p}(+\infty) - E_\mathrm{p}(R) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\,.$$

Dokopy práca W je

$$W = W_1 + W_2 = \frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\,.$$

Teraz túto energiu položíme rovnú Rydbergovej energii (energia základného stavu atómu vodíka, ionizačná energia elektrónu), ktorej vzťah si môžeme nájsť/odvodiť:

$$\frac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = W = \frac{m_\mathrm{e}e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.$$

Vyjadríme si polomer R

$$R = \frac{3h^2\varepsilon_0}{\pi m_\mathrm{e}e^2}\,,$$

porovnáme so vzťahom pre Bohrov polomer R_B (polomer dráhy elektrónu v základom stave v Bohrovom modeli, vzdialenosť od jadra vodíka v základnom stave s najväčšou elektrónovou hustotou)

$$R_\mathrm{B} = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_\mathrm{e}e^2}\,,$$

a dostaneme

$$R = 3R_\mathrm{B}\,.$$

Jakub Kocák
jakub@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.

[3] Veličina r by v pružine prislúchala výchylke x.