Úloha III.S ... aplikační

6 bodů; průměr 3,75; řešilo 28 studentů

a) *V textu seriálu jsme využili přibližný vztah pro $\sqrt{1+h^2}$, kde h je malá hodnota. Zkoumejte, jak přesná je to aproximace. Jak moc se může h lišit od nuly, aby se aproximovaná a přesná hodnota lišily o méně než deset procent? Podobnou aproximaci můžeme provést pro libovolnou rozumnou funkci pomocí tzv. Taylorova rozvoje. Pokuste se na internetu najít Taylorův rozvoj například pro funkce $\cos h$ a $\sin h$ kolem bodu $h = 0$, zanedbejte členy vyšší než h^2 a najděte přibližnou mezní hodnotu h, kdy se aproximovaná a přesná hodnota liší o 0,1.*

b) *Uvažujme vlnovou rovnici pro klasickou strunu ze seriálu a nechť je struna pevně upevněna na jednom konci v bodě $[x; y] = [0; 0]$ a na druhém konci v bodě $[x; y] = [l; 0]$. Pro jaké hodnoty ω, α, a a b je výraz*

$$y(x,t) = \sin(\alpha x)\left[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)\right]$$

řešením vlnové rovnice?

Tip *Dosaďte do pohybové rovnice a využijte okrajové podmínky.*

c) *V minulém díle seriálu jsme porovnávali hodnoty akce pro různé trajektorie částice. Nyní vypočtěte hodnotu Nambu-Gotovy akce pro uzavřenou strunu, která od času 0 do času t stojí na místě v rovině (x^1, x^2) a má tvar kruhu o poloměru R. Máme tedy*

$$X(\tau,\sigma) = (c\tau, R\cos\sigma, R\sin\sigma, 0)$$

pro $\sigma \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Načrtněte dále, jak vypadá světoplocha této struny (na poslední, nulovou komponentu zapomeňme) a jak vypadají čáry konstantního τ a σ.

a) V textu seriálu jsme využili aproximace

$$\sqrt{1+h^2} \approx 1 + \frac{1}{2}h^2 .$$

Dosadíme-li pár hodnot do obou stran výrazu, zjistíme, že pro malá h lze vztah považovat za praktický přesný (relativní odchylka od přesné hodnoty je pro $h = 0{,}1$ pouhých 0,001 %). Rozdílnost pravé a levé strany však pro vyšší hodnoty h stoupá. Pro $h = 1$ je to již 6 % rozdíl a pro $h = 10$ nelze už ani mluvit o aproximaci.

Jaká je tedy hodnota h, aby byla odlišnost pravé a levé strany právě 10 %? Tuto hodnotu určíme řešením následující rovnice

$$\frac{1 + 0{,}5h^2 - \sqrt{1+h^2}}{\sqrt{1+h^2}} = 0{,}1\,.$$

Po dvou umocněních na druhou dostaneme kvadratickou rovnici v h^2, jejímž řešením dostáváme dvě reálná řešení $h \doteq \pm 1{,}195$. Hodnota h se tedy může lišit od nuly maximálně o 1,195, aby byla přesnost aproximace maximálně 10 %.

Podobnou aproximaci lze provést i pro další funkce. Speciálně pro sinus a kosinus máme rozvoje

$$\sin h = h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} + \dots\,,$$

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + \dots$$

Čím více členů v Taylorově rozvoji funkce vezmeme v úvahu, tím lepší dostáváme aproximaci. Jednotlivé členy se obvykle liší řádově. V případě sinu dává například první člen pro $h = 0{,}5$ příspěvek 0,5, zatímco druhý člen 0,02 a následující pouhých 0,000 3. Člen následující po členu, do kterého uvažujeme rozvoj, pak můžeme považovat za odhad chyby aproximace. V našem případě uvažujeme jen členy do h^2 v rozvojích výše a následující člen pak určuje přibližnou chybu. Pro h odpovídající chybě 0,1 pak máme podmínku

$$\frac{h^3}{6} \approx 0{,}1\,,$$
$$\frac{h^4}{24} \approx 0{,}1\,.$$

Řešením dostáváme v prvním případě mezní hodnotu 0,843 a ve druhém případě 1,245 (hodnoty udáváme v radiánech). Tento odhad chyby není daleko od skutečné hodnoty, která je 0,854 a 1,261.

b) Dosaďme navrhovaný tvar řešení do vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0\,,$$

kde jsme označili rychlost šíření vlny $c^2 = (T_0 l)/m$. K tomu potřebujeme umět parciálně derivovat podle x a t. Derivujeme-li parciálně podle jedné proměnné, považujeme ostatní proměnné za konstanty a tedy pro první derivace

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \sin(\alpha x)\left[-a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos \omega t\right]\,,$$
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \alpha \cos(\alpha x)\left[a \cos(\omega t) + b \sin \omega t\right]\,.$$

Pro druhé derivace pokračujeme podobně a všimněme si, že

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x,t)\,,$$
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -\alpha^2 y(x,t)\,.$$

Dosazením do vlnové rovnice a vydělením $y(x,t)$ dostáváme tedy podmínku

$$\omega^2 = c^2 \alpha^2\,.$$

Nyní uvažujme okrajové podmínky, podle kterých musí být v každém čase t

$$0 = y(0,t) = 0\,,$$
$$0 = y(l,t) = \sin(\alpha l)[a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)]\,,$$

kde první podmínka je triviálně splněna a druhá dává restrikci na hodnoty α. Protože je člen v hranaté závorce obecně nenulový, musí být nulový sinus, tedy

$$\alpha l = \pi n\,,$$

kde n je celé číslo. V případě $n = 0$ máme však triviální (nulové) řešení a záporné hodnoty n odpovídají jen řešením s opačným znaménkem prefaktorů, tedy záměně $a \to -a$ a $b \to -b$, které nejsou nikterak omezené. Proto můžeme uvažovat jen přirozená n.

Máme tedy možná řešení vlnové rovnice

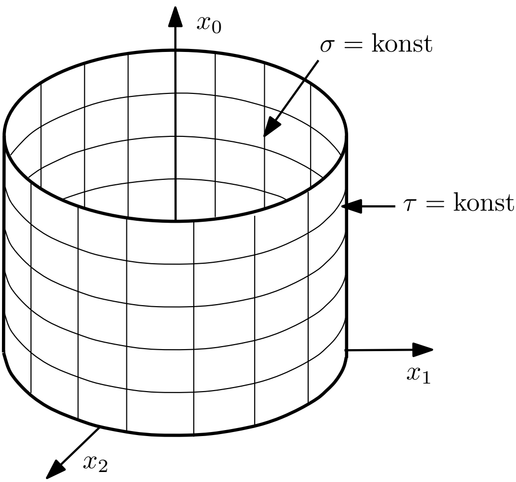
$$y(x,t) = \sin(\alpha x)[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)]\,,$$

kde

$$\alpha = \frac{\pi}{l}n\,, \quad \omega = \frac{\pi c}{l}n$$

a hodnoty a a b mohou být libovolné. Tyto hodnoty lze určit ze znalosti počáteční konfigurace struny.

Poznamenejme ještě, že číslo n odpovídá počtu „kopečků“ sinu, které se na strunu „vejdou“. Řešení pro různá n pak odpovídají různým módům kmitání struny. O tom si ještě povíme v dalším díle seriálu.



Obr. 1: Světoplocha uzavřené struny z příkladu c).

c) Kruhová struna stojící v prostoru (pro daného pozorovatele) opisuje v časoprostoru plášť válce tak jako na obrázku. Na obrázku jsou také vyobrazeny čáry konstantního τ a σ, které lze snadno určit ze znalosti parametrizace.

Vypočtěme hodnotu akce ze znalosti parametrizace přímým dosazením. Čáry konstantního τ a σ jsou na sebe kolmé a můžeme tedy dosazovat do výrazu

$$\mathcal{S}[\boldsymbol{X}(\tau,\sigma)] = -\frac{T_0}{c}\int_0^t\int_0^{2\pi}\sqrt{-\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \tau}\right|^2\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \sigma}\right|^2}\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\sigma\,.$$

My ale máme po zderivování každé složky

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \tau} = (c, 0, 0, 0)\,,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \sigma} = (0, -R\sin\sigma, R\cos\sigma, 0)\,.$$

Velikosti těchto čtyřvektorů jsou tedy (vzpomeňme na první seriál a úlohy k němu, kde jsme tyto velikosti počítali)

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \tau}\right|^2 = -c^2\,,$$
$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \sigma}\right|^2 = R^2\sin^2\sigma + R^2\cos^2\sigma = R^2\,.$$

Dosazením do výrazu pro akci a dvěma integracemi konstanty dostáváme konečně

$$\mathcal{S}[\boldsymbol{X}(\tau,\sigma)] = -\frac{T_0}{c}\int_0^t\int_0^{2\pi} cR\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\sigma = -2\pi R T_0 t\,.$$

V tomto speciálním případě lze hodnotu akce také uhádnout. Z textu seriálu víme, že hodnota akce odpovídá povrchu světoplochy vynásobenému prefaktorem $-T_0/c$. Povrch pláště válce (bez podstavy) o poloměru R a délce ct (viz zadání) je roven $2\pi Rct$ a hodnota akce bude tedy $\mathcal{S} = -2\pi T_0 Rt$, což je hodnota, která nám výše vyšla. Poznamenejme ovšem, že tomu tak nemusí být vždy, protože plocha je měřená metrikou ds a její naivní výpočet může dát obecně jiný výsledek.

Vojtěch Witzany
`witzanyv@fykos.cz`

Miroslav Rapčák
`miro@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.