Úloha I.3 ... bublina v ropovodu

4 body; průměr 2,41; řešilo 115 studentů

Máme malou kulatou bublinku plynu v kapalině, která teče nějakou rychlostí vodorovným potrubím. Jak se změní její rozměry, když se dostane do místa, kde je potrubí zúžené? K čemu se to dá využít, nebo naopak kde to dělá problémy? Uvažujte laminární proudění.

Karel se zamyslel nad osvěžovačem vzduchu.

Uvažujme nestlačitelnou kapalinu, za kterou můžeme vodu i ropu v našich úvahách směle prohlásit. Zároveň se kapalina nikam neztrácí (pokud není potrubí děravé). Objem, který proteče průřezem potrubí za jednotku času, zůstává tedy konstantní – to je rovnice kontinuity. Zúžením potrubí z původního průřezu S_0 na S dojde ke zvětšení rychlosti proudění z původní v_0 na v podle vztahu

$$Sv = S_0 v_0 \,.$$

Nyní víme, že kapalina bude mít po zúžení potrubí rychlost

$$v = v_0 \frac{S_0}{S} \,.$$

Bernoulliho rovnice, která vyjadřuje zákon zachování energie v kapalině, nám dá do souvislosti změnu rychlosti se změnou tlaku v potrubí. Uvažujeme-li, že potrubí je vedeno vodorovně, pak můžeme Bernoulliho rovnici psát ve tvaru

$$\varrho \frac{v^2}{2} + p = \varrho \frac{v_0^2}{2} + p_0 \,,$$

kde p_0 je tlak v potrubí o původním průřezu a

$$p = \varrho \frac{v_0^2}{2S^2} \left(S^2 - S_0^2 \right) + p_0$$

tlak ve zúženém potrubí.

K dalším úvahám o bublině chceme využít vhodnou rovnici popisující termodynamické chování plynu, kterým je tvořena. Řekněme, že naše bublina je koule o objemu V_0 resp. V po zúžení potrubí a je tvořena ideálním plynem. Platí pro ni tedy stavová rovnice ideálního plynu

$$pV = RnT \,,$$

kde T je absolutní teplota, n je látkové množství a R je molární plynová konstanta.

Doposavad jsme používali jednoduchých přiblížení, jako je dokonale nestlačitelná kapalina, ideální plyn nebo potrubí, ve kterém se nic neztrácí. A protože v jednoduchosti je krása, popišme si také pouze dva idealizované způsoby, kterými se plyn může dostat ze stavu s tlakem p_0, kdy má objem V_0, do stavu s tlakem p, kdy má objem V.

Bude-li zužování dostatečně pomalé (tak, aby se stihlo v každém okamžiku předat teplo a vyrovnat teploty), budeme moct děj považovat za izotermický a bude platit $p_0 V_0 = pV$. Bublina tedy zúžením potrubí změní objem na

$$V = V_0 \frac{p_0}{p} = V_0 \frac{p_0}{\varrho \frac{v_0^2}{2S^2} \left(S^2 - S_0^2 \right) + p_0} \,.$$

Protože šlo o zúžení průřezu $S_0 > S$, vidíme, že objem bubliny se zvětšil.

Druhým případem, který popíšeme, je rovnovážný adiabatický děj. Při něm platí Poissonův zákon

$$pV^{\kappa} = \text{konst}$$

a dostáváme, že objem se opět zvětší, avšak tentokrát dle vztahu

$$V = V_0 \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/\kappa} = V_0 \left(\frac{p_0}{\varrho \frac{v_0^2}{2S^2}\left(S^2 - S_0^2\right) + p_0}\right)^{1/\kappa} .$$

Poissonova konstanta $\kappa = c_p/c_V$ je podílem tepelných kapacit při stálém tlaku a stálém objemu.

Mezi izotermickým a adiabatickým dějem leží rovnovážné procesy zvané polytropické, které lze popsat rovnicí

$$pV^{a} = \text{konst}\,,$$

kde $a \in (1; \kappa)$.

Izotermická expanze bubliny bude v tomto případě reálnější model, neboť uvažujeme poměrně malé rychlosti (proudění má být laminární), a proces tedy bude probíhat dostatečně pomalu, aby se teploty vyrovnávaly průběžně. Pokud by proces probíhal rychle, izotermický by nebyl a o použitelnosti adiabatického děje by se dalo pochybovat, protože rychlý adiabatický děj není rovnovážný a popsaný vztah neplatí. To nás ovšem nemusí až tak trápit, protože při příliš rychlé expanzi by se bublina pravděpodobně rozpadla na menší.

Další věc, která hraje podstatnou roli, ale kterou uvážíme pouze formou diskuse, je povrchová energie rozhraní kapalina-plyn. Na změnu povrchu fázového rozhraní je zapotřebí energie $W = \sigma \Delta S$, kde σ je povrchové napětí. Při energetické bilanci, do které bychom zahrnuli energie spojené se změnou objemu i povrchu, bychom museli uvažovat absolutní velikost bubliny, nejenom relativní změnu objemu resp. poloměru. Při započtení kapilárního tlaku by nám vyšlo, že se bublina zvětší méně, než nám vyšlo původně. Kapilární tlak na bublinu je $p_{\mathrm{kap}} = 2\sigma/R$. Povrchové napětí vody při $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ je $\sigma = 72 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Chceme-li, aby relativní chyba, kterou způsobí ve výpočtu zanedbání kapilárních efektů, byla menší než ε, musíme mít $p_{\mathrm{kap}} < \varepsilon p$, kde p je tlak kapaliny v potrubí. Dosadíme-li za p_{kap}, dostáváme, že

$$\frac{2\sigma}{R} < \varepsilon p_{\mathrm{atm}} \cdot \frac{p}{p_{\mathrm{atm}}},$$

kde p_{atm} je atmosferický tlak. Dostáváme tedy, že poloměr R studované bubliny musí být větší než $10^{-6}(p_{\mathrm{atm}}/p)/\varepsilon\,\mathrm{m}$, kde $2\sigma/p_{\mathrm{atm}} \approx 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Vidíme, že při běžných tlacích v potrubích, které se mohou pohybovat v řádech desítek atmosfér, budou bublinky, u kterých se výrazněji projeví kapilarita, velké řádově desítky až jednotky mikrometrů. Pro takovéto bublinky převáží kapilární efekty a změny vnějšího tlaku jejich poloměr měnit nebudou.

Tento efekt může dělat problémy v plyno-/ropovodu, kde přítomností bublin proteče méně dopravovaného paliva – plynové sporáky můžou blafat. Větší bubliny ve vodě v topení můžou způsobovat nežádoucí zvuky. Daleko horší následky může mít bublina v hydraulických systémech – například zavzdušnění brzd. V cévním řečišti může zvětšená bublina ve zúžení uvolnit trombus, případně sama o sobě způsobit vzduchovou embolii. Na druhou stranu, tento efekt nám třeba umožňuje snadnější rozprašování.

Tereza Steinhartová
terkas@fykos.cz