Úloha VI.2 ... roztržitý drát

2 body; průměr 2,31; řešilo 32 studentů

Jak by musel být minimálně dlouhý ocelový drát ve stočeném stavu, aby se při volném zavěšení za jeho jeden konec přetrhl? Používáme ocelový drát o hustotě $\varrho = 7\,900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, průměru $D = 1\,\mathrm{mm}$ a mezi pevnosti $\sigma_{\mathrm{max}} = 400\,\mathrm{MPa}$. Uvažujte, že jsme v homogenním tíhovém poli o intenzitě $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Bonus *Uvažujte teď nejdelší drát, který se ještě nepřetrhne. O kolik procent se protáhne po zavěšení? Youngův modul pružnosti v tahu použité oceli je $E = 200\,\mathrm{GPa}$.*

Karel s drátem v oku.

Stalo se to snad každému z nás. Volně jste si zavěsili svůj oblíbený ocelový drát, načež se ozvala rána jako z děla a vy jste viděli, jak se sám od sebe přetrhl. Zkusme se celému případu trochu věnovat, a spočítat si, že to je prakticky nesmysl.

Předesíláme raději předem, že problematiku akustiky trhání drátů necháváme na rozmyšlení čtenáři. Co nás ale bude zajímat, je například průběh (tažného) napětí podél drátu, stejně jako zákony hovořící o vztahu mezi tímto napětím a elastickým prodloužením.

Trhání drátu

Co mohlo způsobit přetržení drátu? Zcela jistě ta jediná vnější síla na drát působící, tíhová síla. Pokud je totiž dostatečně velká, drát se už neunese a praskne. No ano, ale kde? Ve skutečnosti dráty praskají, kde se jim zlíbí, takové my ale uvažovat nebudeme. Jsme přece fyzici, máme k dispozici dokonalý drát. Ten nemá žádnou mikroskopickou poruchu, žádné průřezové fluktuace či z dřívějška materiálově unavené zóny. Jinými slovy, budeme se tedy zabývat fyzikou zcela homogenního tenkého ocelového válce. Takový drát pak musí prasknout u zavěšeného konce. To proto, že tam tažné napětí dosahuje maxima. Každé místo drátu je totiž vystaveno přesně takovému napětí, aby uneslo celou část drátu, která visí pod ním. Podrobněji níže. Za zmíněných předpokladů a uvážení jednoduchého modelu drátu, který se nedeformuje vůbec nebo při deformaci nemění svůj průřez (diskuzi o Hookeově zákonu a různých i jiných modelech drátu se budeme věnovat až v dalším odstavci), můžeme postupovat přímočaře. Aby se žádný kus drátu nepohyboval, musí být výslednice sil na něj působící nulová. Proto síla, kterou musí vyvíjet průřezová ploška v každém místě drátu, je přesně rovna tíze celé části drátu pod ní, jelikož právě na tento kus již nepůsobí žádná vnější síla krom této a tíhové.[1] Naši úvahu zapíšeme do rovnice

$$F = \varrho l S g\,,$$

kde F značí tahovou sílu, již vyvíjí průřezová ploška na svoje okolí, pokud je ve výšce l od volného konce drátu. S je plocha průřezu a písmena ϱ, resp. g značí hustotu drátu, resp. tíhové zrychlení. Jak vidno, vztah pro sílu je lineární v délce, proto bude dosahovat maxima, právě když to udělá l. Maximální napětí, které se v drátu objeví, σ_0, je proto rovno

$$\sigma_0 = \varrho h g\,, \tag{1}$$

kde h je délka drátu. Pokud chceme zjistit mezní délku drátu, který už praskne, stačí nám výraz v rovnici (1) dát do rovnosti s mezí pevnosti materiálu σ_{max}. Jedná se totiž o prahovou hodnotu napětí, při které již dojde přetržení. Jednoduchou algebraickou operací získáme

$$h_{\mathrm{mez}} = \frac{\sigma_{\mathrm{max}}}{g\varrho}$$

[1] Jen na doplnění, jak již víme, dále tam existuje vnitřní pnutí, to však ze zákona akce a reakce nemá žádný vliv na pohyb celku. Krásný příklad za vše – ani ten největší silák nezdvihne židli, na které sedí. Je to asi tak stejně možné jako dvakrát napočítat do nekonečna nebo vyhrát Tour de France na rotopedu.

a číselně $h_{\mathrm{mez}} \doteq 5{,}2\,\mathrm{km}$.

Nejkratší ocelový drát, který by se mohl takto kvůli své vlastní váze přetrhnout, měří asi 5,2 km. Kdo máte doma pouze 5 km dlouhý drát, tak bohužel, nic takového se vám nepovede.

Natahování drátu

Pokud se nám podaří zavěsit drát jen o malinko kratší, už by se, v ideálním případě, diskutovaném v prvním odstavci, neměl roztrhnout. Všechny tyto úvahy však byly vedeny pro drát, který si zachovával plochu průřezu, a tím bylo zajištěno neměnné napětí při libovolném prodloužení. Jak ale uvidíme dále, ani to nemusí být splněno vždy, obzvlášť když uvažujeme nějaký realističtější model. A jak se mezi řemeslníky říká, každá ves, jiný drát, zkusme si tedy vymyslet hned několik modelů drátu, podle toho, jak na napěťový stav reagují. Prvním příkladem může být drát, který při zvýšení napětí nedělá vůbec nic. Je to (nerealistický) model drátu, který pouze „čeká na přetrhnutí“. Nazvěme si jej „drát zachovávající délku“. Naším druhým modelem bude drát, který při zvýšení (tažného) napětí reaguje prodloužením, zachovává si však průřez. Říkejme mu proto „drát zachovávající průřez“. A pak tu máme další exemplář, kterým je „drát zachovávající objem“. Od něj budeme jen chtít, aby, jak název napovídá, zachovával objem. V neposlední řadě však musíme zmínit i krapet realističtější model, který má svým chováním blízko k poslednímu jmenovanému, zužuje se však podle platného zákona. Tím je tzv. Poissonův zákon, hovořící o změně plochy průřezu při podélné deformaci. Tento model nazvěme „Poissonův drát“. Pro každý z modelů teď udělejme menší komentář.

Především ale zmiňme důležitou věc. Další významná aproximace, bez které by se nám počítalo velmi nepříjemně, je linearizace vztahu mezi relativním prodloužením a napětím v celém rozsahu prodloužení materiálu. Považujme tedy všechny dráty za Hookeovské. Ve skutečnosti se před přetržením materiál dostane do plastické oblasti, kdy jsou jeho deformace nevratné, co je však pro nás důležitější, neplatí Hookeův zákon.

Drát zachovávající průřez

Poslední z dvojice drátů, pro který platí výpočet prvního odstavce. Tím prvním je drát zachovávající délku, který se však do odstavce o natahování drátu dostal nešikovností autora. Dle zmíněné aproximace platí důležitý vztah mezi napětím a relativním prodloužením, již několikrát zmíněný Hookeův zákon

$$\sigma = E\varepsilon\,, \tag{2}$$

kde ε je relativní prodloužení a E Youngův modul pružnosti v tahu. Protože je ale v každém místě drátu jiné napětí, uvažujme nejprve prodloužení mezi dvěma dostatečně blízkými body, abychom v dobrém přiblížení mohli zanedbat tíhu úseku drátu mezi těmito body, a též uvažovat, že na prodloužení se výlučně podílí pouze síly působící na oba konce úseku. Za těchto podmínek je naše úloha již zcela lineární. Pro prodloužení Δl nám z rovnice (2) vyjde

$$\varrho l g = E\frac{\Delta l}{l_0}\,, \tag{3}$$

kde l_0 je počáteční délka úseku,l je výška tohoto úseku od volného konce drátu. Z této rovnice pro prodloužení malého úseku můžeme dojít k celkovému prodloužení drátu využitím integrálního počtu, který již nespadá do standardní středoškolské látky, proto doporučuji číst opatrně a pomalu. Jde nám o to, posčítat všechny ty prťavé přírůstky délky nějak chytře. Každý součin malého dílku l_0 s jeho vzdáleností od volného konce l lze reprezentovat obsahem malého obdélníčku. Pokud za sebe takového malé obdélníčky naskládáme, dostaneme útvar, který se velmi podobá trojúhelníku. Jeho obsah už ale spočítat dovedeme! Pro celkové prodloužení drátu Δh nám pak vychází

$$\Delta h = \frac{gh^2\varrho}{2E}\,.$$

Pokud uvažujeme procentuální prodloužení ε_h, chceme spočíst

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta h}{h}\cdot 100\,\%\,,$$

číselně $\varepsilon_h \doteq 0{,}1\,\%$.

Drát zachovávající objem

V tomto případě je dobré zmínit, že kvůli změně průřezu drátu tohoto chování můžeme očekávat změny v mezní délce drátu, který se ještě nepřetrhne. Kvantitativní úvahy na toto téma však necháváme čtenáři k rozmyšlení. Nyní se však pokusíme najít vztah pro jeho prodloužení jako u předcházejícího modelu. Aby při natahování drát nezměnil objem, musí za každého počasí platit pro plochu jeho průřezu S vztah

$$S = \frac{S_0 l_0}{l_0 + \Delta l}\,, \tag{4}$$

kde S_0 a l_0 jsou počáteční obsah průřezu drátu a délka každého malého úseku. Jakmile tuto rovnici dosadíme do Hookova zákona (pozor, rovnice (3) už pro náš případ neplatí, jelikož uvažuje neměnný průřez), získáme pro prodloužení délkového elementu l_0 vztah

$$\Delta l = \frac{\varrho l g l_0}{E - \varrho l g}\,.$$

Abychom vás dlouho nenapínali, tady už nepomůže ani trojúhelník. Po zintegrování podle proměnné l v mezích původní délky drátu, tedy od 0 do h, získáme nádherný vztah

$$\Delta h = -h + \frac{E}{g\varrho}\log\left(\frac{E}{E - gh\varrho}\right),$$

k němuž je potřeba dodat drobnou poznámku. Jak jste si jistě všimli, při jistém nastavení počátečních hodnot budeme svědky logaritmu ze záporného čísla, což není vůbec pěkné. Nastává tu totiž jeden zajímavý efekt, a to ten, že pokud bude jmenovatel v logaritmu roven nule, bude se drát prodlužovat do nekonečna. Prakticky však do chvíle, než praskne. Proto pokud bude hodnota jmenovatele přímo záporná, nemá smysl prodloužení počítat.

Poissonův drát

Situace je velmi analogická té předchozí, vlastně se odlišuje pouze v míře zužování drátu. Vyjdeme přímo z Poissonova vztahu, který určuje relativní míru změny délkového rozměru průřezu (například délka strany v případě obdélníkového průřezu) při změně rozměru jiného

$$\mu\varepsilon = \frac{\Delta a}{a}\,,$$

kde a je charakteristický rozměr průřezu a μ je tzv. Poissonovo číslo. Z binomické věty pak pro změnu plošného rozměru máme

$$\mu\varepsilon = \frac{\Delta S}{2S_0} \,,$$

čímž dostáváme vztah pro velikost plochy průřezu nataženého drátu ve tvaru

$$S = S_0 \left(2\mu\varepsilon + 1\right) \,,$$

neboli analogii k rovnici (4), a tím situaci úplně převádíme na předchozí případ „drát zachovávající objem". Zbytek necháváme na dopočet nadšeným čtenářům.

Jiří Nárožný
`nahry@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.