Úloha VI.4 ... kroule

4 body; průměr 2,91; řešilo 35 studentů

Jaká část povrchu ledové kry tvaru koule trčí nad hladinu? Hustota ledu je $917\,\mathrm{kg/m^3}$*, hustota mořské vody* $1025\,\mathrm{kg/m^3}$.

Nadnesla Dominika.

Hustotu vody označíme ϱ_V a hustotu ľadu ϱ_L. Polomer našej kryhy bude r, a výška tej časti kryhy (teda výška guľového vrchlíka), ktorá je nad vodou, bude h. Vzorce pre guľový vrchlík je zaujímavé si odvodiť, no je to tabuľková záležitosť,[1] takže sa nimi nebudeme veľmi zaoberať. Pre povrch kryhy nad vodou platí

$$S_\mathrm{K} = 2\pi rh\,,$$

ako sa môžete presvedčiť napríklad integrovaním cez uhol. Objem tohoto vrchlíka je zase

$$V_\mathrm{K} = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)\,.$$

Na kryhu pôsobia pri rovnováhe dve dôležité sily, tiažová a vztlaková, ktorých veľkosti sa rovnajú. Tiažová sila pôsobí na celý objem V, vztlaková len na ponorený objem $V - V_\mathrm{K}$

$$\varrho_\mathrm{L} V g = \varrho_\mathrm{V}(V - V_\mathrm{K})g\,,$$
$$\frac{\varrho_\mathrm{L}}{\varrho_\mathrm{V}}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)\,,$$
$$4\frac{\varrho_\mathrm{L}}{\varrho_\mathrm{V}} = 4 - \frac{h^2}{r^2}\left(3 - \frac{h}{r}\right)\,.$$

Po substitúciách

$$\alpha = \frac{h}{r}\,,\quad \beta = 1 - \frac{\varrho_\mathrm{L}}{\varrho_\mathrm{V}}$$

dostaneme kubickú rovnicu pre neznámu α

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\beta = 0\,.$$

Riešiť takúto rovnicu je možné, no nie je to vôbec jednoduché, čo je aj dôvod, prečo sa to v škole neučí. Jedna z možností je vybrať si jednu z množstva metód numerického odhadu koreňov.

Po vykreslení[2] dostaneme tri reálne korene, pričom jeden je záporný a druhý je väčší ako jedna, čo nie je fyzikálne riešenie. Správny koreň je niekde okolo 0,4, čo sa dá určiť z grafu.

Ak by sme chceli presnejšiu metódu, dobrá voľba je Newtonova metóda dotyčníc.[3] Pre funkciu

$$f(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\beta$$

hľadá koreň tým, že ju aproximuje jej dotyčnicou v bode. Zvolí sa počiatočný odhad koreňa α_0 a iteruje sa podľa predpisu

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}\,,$$

kde čiarka značí deriváciu funkcie f (opäť odporúčam vyhľadať a odvodiť si :)). Táto metóda je zvlášť účinná, ak máte pokročilejšiu kalkulačku s tlačítkom ANS. Výraz hore do nej prepíšete

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_cap`
[2] `http://www.wolframalpha.com/`
[3] `http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method`

a výskyty α_n nahradíte ANS. V našom prípade by ste po nastavení aktuálneho odhadu zadali výraz

$$\text{ANS} - (\text{ANS}^3 - 3 \times \text{ANS}^2 + 4 \times (1 - 917/1025)) \div (3 \times \text{ANS}^2 - 6 \times \text{ANS}) \,.$$

Stláčaním = potom postupne iterujete až do správneho výsledku, čo je s dostatočnou presnosťou $\alpha = 0{,}403$. Chceme spočítať pomer S_K ku celkovej ploche kryhy, $4\pi r^2$

$$\eta = \frac{S_\mathrm{K}}{4\pi r^2} = \frac{2\pi r h}{4\pi r^2} = \frac{h}{2r} = \frac{\alpha}{2} \approx 0{,}2 \,.$$

Z povrchu guľatej kryhy teda vidíme asi jednu pätinu.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`