

Milí řešitelé!

A je to tady. FYKOS vstupuje do druhého poločasu. Motivace pro všechny řešitele, jimž se v první půlce nedařilo dle jejich představ i pro nově příchozí. Ale ani vy na prvních místech byste neměli usnout na bobkových listech, vždyť souboj o účast na podzimním soustředění právě odstartoval.

Čtvrtá série začíná odpočinkovým výstupem schodů, následovaným zelenou úlohou. Věděli jste, že rotační kulometry střílí tak rychle, že jim mnohdy nevystačí munice ani na půlminutovou palbu? To je méně, než co by kámen do vody hodil. Anebo ne? To zjistíte ve třetí úloze. Jako nehodnocený bonus se můžete pokusit uhodnout, kterým českým filmem je inspirována čtvrtá úloha. Vodo-topo-plyn, tak by se dala ve zkratce popsat následující trojice úloh. Jenom s tím plynem v kuchyni asi moc nepochodíte. Nu a tradiční seriálový závěr se tentokrát věnuje rozmístění předmětů ve vesmíru.

Organizátoři

Změny v příjmu řešení

Začaly platit dříve ohlášené změny, shrňme je ještě jednou.

Předně je posunut termín doručení o 22 hodin dříve, tzn. místo obvyklé středy bude dnem doručení úterý a čas osmá hodina večer.

Dále převádíme veškerý příjem elektronických řešení výlučně na webové rozhraní¹ a na e-mailové adrese fykos-solutions@fykos.cz přijmeme jen dotazy týkající se vašich řešení. Pro dotazy týkající se nějak vás konkrétně použijte adresu fykos@fykos.cz, všeobecné dotazy doporučujeme pokládat do našeho fóra².

Poslední změna se též týká elektronických řešení – nově přijímáme jenom PDF soubory³.

Tyto změny nám usnadní zpracování vašich řešení.

Aktuálně

Stále se můžete přihlásit do týmové soutěže ve fyzice – Fyziklání, které pořádáme **17. února**. Registrace je na webu⁴.

Opět se budou konat přednášky, jež jste někteří zažili na podzim. Tentokrát se sejdeme během letního semestru celkem šestkrát a to v termínech: 1. 3., 15. 3., 29. 3., 12. 4., 26. 4. a 10. 5. vždy od 18.00 hodin. Témata zatím nejsou známa, ale brzy se objeví na stránce přednášek⁵.

Nakonec zpráva pro „mrtvé duše“ – pokud jste nám tento školní rok ještě neposlali žádnou úlohu a nijak se neozvete, tak v rámci šetření lesů vám už další brožurku nebudeme posílat.

Vyhodnocení soutěže v anketách

V listopadu jsme vyhlásili soutěž o sladkou odměnu, kterou výherci obdrží, když se s nimi osobně potkáme – buď jim to výzvou k přihlášce na Fyziklání nebo DSEF. Pokračujme seznamem nejčastějších odpovědí:

1. korespondenční seminář: FYKOS

¹Po registraci na adrese <http://fykos.cz/upload>.

²<http://fykos.cz/diskuse>

³Pokud píšete řešení na počítači, je obvykle triviální získat výstup i v PDF. Inspiraci hledejte na webu <http://vyfuk.fykos.cz/jak-psat-reseni/elektronicka>.

⁴<http://fyziklani.cz/>

⁵<http://fykos.cz/akce/prednasky>

2. organizátor FYKOSu: Karel Kolář
3. řešitel FYKOSu: já
4. letošní úloha ve FYKOSu: Brumlovo tajemství
5. fyzikální zákon: Archimédův zákon, zákon zachování energie, Newtonův gravitační zákon
6. fyzikální jednotka: newton
7. kniha o fyzice: Feynmanovy přednášky z fyziky
8. televizní seriál: The Big Bang Theory
9. evropské město: Londýn
10. křestní jméno: Jan, Karel, Tomáš

V některých případech se o první místo dělilo více odpovědí, hlasy byly pak počítány všem. Některé z vás možná bude zajímat, že téměř identická anketa probíhala v 18. ročníku a některé odpovědi zůstávají stejné nebo ekvivalentní – kromě očekávané odpovědi na první otázku to byly: číslo 2 (tehdejší šéf Honza Prachař), fyzikální jednotka, kniha o fyzice a křestní jméno (Jan). Nejčastější odpověď na otázku 3 (tehdy Student Pilný) naopak letos propadla a získala pouhý jeden hlas, Sheldon a spol. vystrčili Simpsonovy ze světla reflektorů, klasická fyzika zvítězila nad relativitou (5. $E = mc^2$) a ani letos nevyhrálo město, ve kterém se bude konat IPhO.

Srovnání s ještě starší anketou – v XV. ročníku můžete provést na webu⁶.

Soutěže se účastnilo 26 řešitelů a vítězové jsou tři. Všichni uhodli po 7 odpovědích, jsou to: *Miroslav Hanzelka*, *Kristína Nešporová* a *Patrik Turzák*. Gratulujeme. Nadpoloviční úspěch měly ještě *Týna Kohoutová*, *Radka Štefaníková* a *Markéta Vohníková*, těm patří už jen uznání a jméno v brožurce.



Zadání IV. série



Termín uploadu: 6. března 2012 20.00
Termín odeslání: 5. března 2012

Úloha IV.1 ... schody z Chrudimi

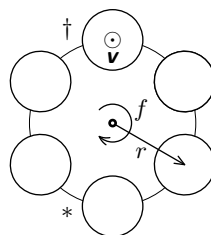
2 body

Eskalátory v metru na náměstí Míru mají n schodů a pohybují se rychlostí v . Spočtete, kolik schodů ve skutečnosti vyšlapete, pokud po nich jdete rychlostí v_1 : a) po směru jízdy, b) proti směru jízdy. Při pohybu proti směru uvažujte, že $v_1 > v$.

Úloha IV.2 ... Gatling

2 body

Stroj byl původně navržen pro distribuci semen do země, ale ukázal se jako mnohem užitečnější pro distribuci olova do nepřátel (rotační kulomet). Spočítejte, kde vzhledem k hlavní Gatlingu hrozí nebezpečí zasažení kulkou. Ráže je d , počet hlavní n , vzdálenost osy hlavně od osy hřídele je r , otáčky všech hlavní jsou f , kadence výstřelů je F a ústová rychlost střel v .



Obr. 1: Gatling zepředu, * nabíjení, † výstřel

⁶<http://fykos.cz/rocnik15/serie7.pdf>

Úloha IV.3 ... kámen letí

3 body

Hodíme kulatý kámen o hmotnosti m z výšky h nad hladinou do rybníka o hloubce d . Přibližně za jak dlouho spadne na dno (od okamžiku puštění)? Jak se výsledek změní, když kámen nebude kulatý, ale placatý?

Úloha IV.4 ... Stavinoha

4 body

Model rakety má motůrek, jenž dává konstantní tah, dokud má palivo o počáteční hmotnosti m_p . Prázdná raketa váží m_0 a motor palivo spaluje lineárně s časem. Do jaké výšky může raketa vyletět, letí-li v homogenním gravitačním poli a zanedbáme-li odpor vzduchu?

Úloha IV.5 ... únik plynu

4 body

Spočítejte, kolik procent své hmotnosti za rok ztratí zemská atmosféra, pokud uvážíte, že končí 10 km nad zemí, po celé své výšce má konstantní tlak (stejný jako u hladiny moře), je tvořena ideálním plynem o teplotě 300 K, splňuje Maxwellovo rychlostní rozdělení a gravitace se v jejím objemu nijak neprojevuje.

Úloha IV.P ... účet za topení

5 bodů

V některých bytovkách se teplá voda ohřívá centrálně pro všechny její obyvatele. V zásobníku je během dne udržována konstantní teplota vody. Šetřiví obyvatelé však ohřev na noc vypínají, voda tedy do rána vystydně a poté se opět musí ohřát. Odhadněte (na základě vyhledaných údajů), kolik energie se tímto ušetří, a navrhněte obyvatelům lepší způsoby, jak ušetřit při zachování komfortu.

Úloha IV.E ... už to bublá!

8 bodů

Změřte účinnost rychlovarné konvice. Údaj o příkonu naleznete obvykle na samolepce zesponu konvice. Výkon určíte tak, že zjistíte, o kolik stupňů Celsia se zahřál daný objem vody za jednotku času. Pokuste se minimalizovat chybu měření a popište, jak jste se toho snažili dosáhnout.

Varování Rozhodně sami nepoužívejte voltmetr a ampérmetr u tak vysokého napětí a proudu.

Úloha IV.S ... seriálová

6 bodů

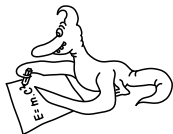
a) Spirální galaxie můžeme velmi hrubě popsat logaritmickou spirálou

$$r(\varphi) = r(0) \exp(\varphi \operatorname{tg} \Phi),$$

kde r a φ jsou polární souřadnice a Φ je úhel otevření odpovídající úhlu, který svírá kolmice k průvodiči s tečnou ke spirále (úhel otevření roste ve směru hodinových ručiček, vyjadřujeme jej v radiánech, přičemž hodnota může nabývat více než 2π). Zvažme $\Phi = 10^\circ$. Odvodte vztah pro poměr vzdáleností dvou sousedních závitů téhož spirálního ramene od centra galaxie. Jak by se poměr změnil, kdyby ramena byla čtyři (rovnoměrně rozložená). Vyjádřete vzdálenost pro sousední ramena v $r(0) = 8 \text{ kpc}$.

b) Uvažujte nekonečný vesmír s konstantní hustotou hvězd a bez extinkce. Vyjádřete vztahy pro integrální a diferenciální počet hvězd v závislosti na zdánlivé hvězdné velikosti. Co se stane, bude-li zdánlivá hvězdná velikost velká?

Bonus Jaká je pravděpodobnost, že dvě hvězdy se nám v galaxii promítnou za sebe? Uvažujte osamocené hvězdy, ne dvojhvězdy.



Řešení III. série

Úloha III.1 ... Wattův regulátor

2 body; průměr 1,42; řešilo 52 studentů

Mějme dvě těžké kuličky. Každá z nich je připojena tyčkou do kloubu (z opačných stran). Obě koule se mohou vychylovat pouze v jedné svislé rovině. Celou soustavou začneme otáčet okolo svislé osy procházející kloubkem. Jak závisí odchylna tyček na úhlové rychlosti?

Regulovčik Lukáš.

Úlohu nejnárodněji vyřešíme v neinerciální vztažné soustavě rotující společně s regulátorem. Na kuličku působí celkem tři síly – tíhová \mathbf{F}_G , odstředivá \mathbf{F}_O a reakce tyčky \mathbf{F}_T . Pokusme se najít podmínku, kdy budou síly vyrovnané (obrázek 2). Z jednoduché trigonometrie máme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{|\mathbf{F}_O|}{|\mathbf{F}_G|} = \frac{\omega^2 l \sin \alpha}{g},$$

kde g je tíhové zrychlení a l délka tyčky od kloubu ke kuličce.

Nyní už je vidět první řešení $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, označme jej „povislé“. Dále uvažujeme jen $\sin \alpha \neq 0$ a můžeme jím tedy dělit. Úpravou rovnice získáme vztah pro α .

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\omega^2 l}{g} \Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{g}{\omega^2 l} \right). \quad (1)$$

Nezapomeňme, že poslední úpravu můžeme udělat jen s předpokladem

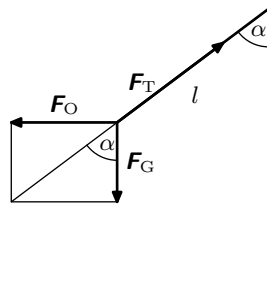
$$\omega^2 l \geq g \quad (2)$$

kvůli definičnímu oboru funkce \arccos .

Jak výsledky fyzikálně interpretovat? Povislé řešení je za obvyklých okolností (2) labilní a stabilní výchylka kuliček závisí na rychlosti ω podle (1). Pokud však (2) neplatí, výchylka kuliček pak na rychlosti ω nezávisí ($\alpha = 0$) a regulátor nefunguje.

Poznámky k došlým řešením

Téměř všichni z vás zapomínali uvažovat podmínky, za nichž mohou provádět úpravy vztahů a kdy jsou výsledné vzorce platné. Stačí se podívat na (1) při $\omega = 0$ a je jasné, že nemůže platit vždy. Pouze Filip Ayazi, Veronika Dočkalová a Patrik Švančara uvažovali podmínku (2), vysloužili si tak bod navíc.



Obr. 2

Část řešitelů pouze odvodila nějaký vztah pro α , v němž však ponechali r , které samotné závisí na α .

Michal Koutný
michal@fykos.cz

Úloha III.2 ... projížďka po řece

2 body; průměr 1,35; řešilo 43 studentů

Představte si řeku přehrazenou hrází. Aby mohly lodě překonávat celý splavný vodní tok, jsou v rámci hráze umístěna zdymadla. Uvažujte, že na řece, která má průtok $Q = 200 \text{ m}^3/\text{s}$, je umístěné zdymadlo, které funguje mezi dvěma vodními hladinami před a za hrází s výškovým rozdílem $H = 4 \text{ m}$ a má rozměry $s = 100 \text{ m}$ a $d = 20 \text{ m}$. Kolik lodí denně může zdymadlo přepravit z nižší nádrže do vyšší (pokud je bere vždy po jedné), pokud maximální průtok vody do a ze zdymadla je $Q_Z = 250 \text{ m}^3/\text{s}$?
Karlovi uplavaly včely.

Popišme nejdříve, jak jeden takový cyklus přepravy pomocí plavební komory probíhá. V počátečním stavu jsou vrata mezi plavební komorou a dolní nádrží otevřená, hladina vody v komoře je tedy stejně vysoko jako v dolní nádrži. Do komory vpluje loď (v našem případě pouze jedna) a vodotěsná vrata se za ní zavřou. V tomto stavu je vodní hladina v komoře nezávislá na výšce vodní hladiny před a za ní. Loď se přiváže ke zdi komory, aby nebyla unášena proudem vody. Dále obsluha otevře průtok mezi komorou a horní nádrží. Komora a horní nádrž se budou chovat jako dvě spojené nádoby, výška jejich hladin se tedy vyrovná (budeme uvažovat, že výšky hladin v obou nádržích jsou konstantní, tedy pouze se mění výška hladiny v komoře). Jakmile jsou hladiny vyrovnané, mohou se otevřít horní vrata komory, loď se odváže a může odplout. Nyní může do komory připlout loď z horní nádrže, což se ale v našem případě neděje. Horní vrata se opět uzavřou, uzavře se i průtok mezi horní nádrží a komorou a naopak se otevře průtok mezi komorou a dolní nádrží. Jakožto ve dvou spojených nádobách, i zde se výšky hladin opět vyrovnají. Nakonec dojde k otevření dolních vrat, uzavření průtoku mezi komorou a dolní nádrží a cyklus se může opakovat.

Jestliže je mezi hladinami výškový rozdíl H a rozměry nádrže jsou s a d , pak je potřeba pro zvýšení hladiny v komoře z dolní hodnoty na horní napustit do nádrže objem $V = Hsd$. Stejný objem je poté třeba při snižování hladiny vypustit. Je-li maximální průtok vody do a ze zdymadla Q_Z , pak se komora napustí (vypustí) za čas

$$t_n = \frac{V}{Q_Z} = \frac{Hsd}{Q_Z}.$$

Průtok řeky v tomto případě není limitující, při napouštění komory vodou z horní části řeky je vždy průtok Q_Z . Jelikož však do blízkosti zdymadla přitéká méně vody, hladina v tomto místě mírně poklesne oproti normálu. Výška hladiny v komoře se pak vyrovná s touto mírně pokleslou hladinou a zpátky do normálního stavu vyšší hladiny se obě tyto hladiny dostanou za chvíli po ukončení napouštění komory.

Během jednoho cyklu se tedy napouštěním a vypouštěním komory spotřebuje doba $2t_n = 64 \text{ s}$. K tomuto času je navíc třeba přičíst dobu, kterou trvá otevírání a zavírání vrat, vplouvání a odplouvání lodí, její uvazování a obsluha celého zařízení. Tato doba není zadána, můžeme ji tedy pouze odhadovat. Jestliže odhadneme celou dobu jednoho cyklu na dvě minuty, pak za den (24 hodin) může zdymadlo přepravit 720 lodí.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha III.3 ... train à grande vitesse

4 body; průměr 3,11; řešilo 37 studentů

Trat' má poloměr oblouku R , vlak má těžiště ve výšce H nad kolejemi s rozchodem D . Jakou maximální rychlostí může po takovéto trati jet vlak, pokud požadujeme, aby se mohl kdykoli zastavit, aniž by spadl na bok? Za jakých podmínek je maximální rychlost neomezená?

Poznámka Zanedbejte síly působící mezi jednotlivými vagony a šířku vagonu vzhledem k poloměru oblouku. Napadla Lukáše během návratu z org. výletu od Berouna.

Jak všichni víme, tratě a silnice mívají klopené zatáčky. Maximální klopení zatáčky určíme jednoduše z podmínky stability při zastavení vlaku. Pokud vlak stojí, tak musí tíhová síla směřovat mezi kolejnice, viz obrázek 3 (v opačném případě by došlo k převrácení a to nechceme). Proto pro úhel sklonu trati vůči vodorovné rovině platí

$$\alpha \leq \alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{D}{2H}. \quad (3)$$

Dále budeme uvažovat hodnotu α_{\max} , protože tato umožňuje nejvyšší maximální rychlost.

Nyní musíme vyšetřit, kam bude působit výsledná (tíhová a odstředivá) síla, pokud bude vlak projíždět zatáčku o poloměru R rychlostí v . Podrobnější rozkreslení sil a použitých veličin je na obrázku 4.

Z tohoto obrázku je vidět, že maximální velikost odstředivé síly je

$$F_o \leq F_G \operatorname{tg} 2\alpha \leq F_G \operatorname{tg} 2\alpha_{\max}.$$

Nyní použijeme vzorec pro tangens dvojnásobného úhlu⁷ $\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha / (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$. Proto platí

$$F_o \leq F_G \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_{\max}}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_{\max}}.$$

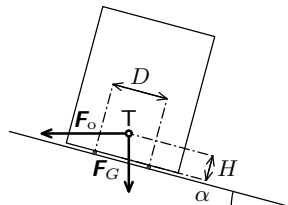
Nyní dosadíme ze vztahu (3), $F_o = Mv^2/R$ a $F_G = Mg$, kde M je hmotnost vagonu.

$$\frac{Mv^2}{R} \leq Mg \frac{D/H}{1 - \frac{1}{4}(D/H)^2},$$

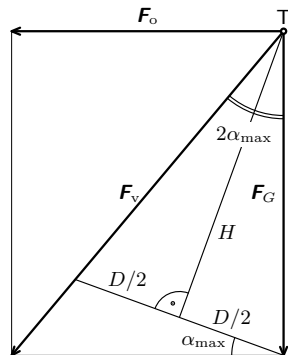
$$v \leq \sqrt{4gR \frac{DH}{4H^2 - D^2}}.$$

Vidíme, že pokud není splněna podmínka $D < 2H$, nebude takto vypočtená rychlost existovat. Zamysleme-li se podrobněji, zjistíme, že tento výsledek odpovídá případu, kdy i nekonečná odstředivá síla nezpůsobí převrnutí vlaku. Tedy pokud platí $2H < D$, tak pro sklon kolejí $\alpha' = \operatorname{arctg}(D/2H) > 45^\circ$ může vlak projíždět zatáčku libovolnou rychlostí.

⁷Můžeme si jej odvodit ze součtových vzorců pro sinus a cosinus $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ vzájemným vydělením a rozšířením zlomku výrazem $1/\cos^2 \alpha$.



Obr. 3: Nákres sil působících na vlak v zatáčce



Obr. 4: K diskusi stability v zatáčce

Ještě osvětleme, proč byla v zadání poznámka o zanedbání sil mezi vagony a rozměrů vagonu oproti poloměru oblouku. Důvod pro první poznámku je zřejmý – můžeme dosti těžko určit, jakým způsobem na sebe vzájemně působí vagony. Druhá poznámka souvisí s tím, že na vnitřní stranu vlaku působí kvůli menšímu poloměru zatáčení menší dostředivá síla než na vnější stranu a takto můžeme uvažovat pouze jednu působící odstředivou sílu v těžišti.

Poznámky k došlým řešením

Značná část z vás si neuvědomila, že trať může být nakloněná, proto také byla v zadání podmínka, která říkala, že se vlak při zastavení (nikoli zastavování!) nesmí převrátit na bok.

Za řešení, které neuvažovalo sklonění trati, jsme dávali dva body, za úplné řešení body čtyři. Pokud bylo správně diskutováno, za jakých podmínek je rychlost vlaku neomezená, tak jste se dočkali bodu navíc.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz

Úloha III.4 ... těžký úděl

4 body; průměr 1,90; řešilo 29 studentů

Při řezání stromů musí zahradník počítat s lečjakými problémy. Uvažujme větev připojenou k nepružnému lanu (tj. tuhost roste nade všechny meze) přes kladku. Dole stojí dva brigádníci, kteří jistí větev, aby nespadla do bazénu. Větev spadne volným pádem z výšky h , než se provaz napne. Za určitých okolností brigádníci držící druhý konec lana vyjedou tak vysoko, že narazí do kladky. Stanovte podmínky, za jakých bude řezání bezpečné.

Nápověda Uvažujte nejprve chování dvou hmotností na ledě, které jsou spojeny nepružným lanem a mají různé rychlosti. Mikuláš vyprávěl Jakobovi, jak na něj spadla větev.

Rychlost větve v momentě, kdy se lano napne, je $v_0 = \sqrt{2hg}$.

V momentě napnutí se musí vyrovnat rychlosti větve a brigádníků. Jak naznačuje nápověda, jde o zachování hybnosti a nikoliv energie. Tedy brigádníci získají směrem nahoru rychlost $v_1 = m_v v_0 / (m_b + m_v)$, kde m_v a m_b označují hmotnosti větve a brigádníků.

Dále předpokládejme, že větev je lehčí než brigádníci (zajišťovat těžší větev by bylo hloupé). Brigádníci mají tedy směrem dolů zrychlení (je to i zrychlení větve směrem nahoru)

$$a = g \frac{m_b - m_v}{m_b + m_v}.$$

Nechť H_v je výška větve nad zemí, když se napne lano, a H_b je vzdálenost brigádníků od kladky.

Nejprve předpokládejme $H_v > H_b$ (větev je nad hlubokým bazénem), a tak nehrozí, že větev spadne na zem dřív, než si brigádníci „rozbijí držky“ nebo než se jejich výstup zastaví. Čas, který potřebují do zastavení, je $t = v_1/a$. Za tento čas se dostanou do výšky

$$v_1 t - \frac{at^2}{2} = \frac{m_v^2 h}{m_b^2 - m_v^2}$$

a musí platit

$$H_b > \frac{m_v^2 h}{m_b^2 - m_v^2},$$

aby brigádníci nenarazili do kladky.

Za předpokladu $H_b \geq H_v$ může větev narazit do země ještě během výstupu brigádníků a to, když platí

$$H_v < \frac{m_v^2 h}{m_b^2 - m_v^2}.$$

Za takového předpokladu je čas do nárazu větve

$$t_n = \frac{v_1 - \sqrt{v_1^2 - 2aH_v}}{a}.$$

Rychlost brigádníků je pak $v_2 = v_1 - at_n = \sqrt{v_1^2 - 2aH_v}$ a jejich vzdálenost od kladky $H_b - H_v$. Jejich zrychlení je teď g . Analogicky, aby nenarazili, musí platit

$$H_b - H_v > \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2 - 2aH_v}{2g} = \frac{m_v^2 h}{(m_b + m_v)^2} - H_v \frac{m_b - m_v}{m_b + m_v}.$$

V případě, že $m_v > m_b$, platí tytéž vzorce. Tak však pro a dostaneme záporné číslo, a proto v případě $H_v > H_b$ brigádníci určitě narazí.

Dávid Hvizdoš
david@fykos.cz

Úloha III.5 ... zemnicí roviny

5 bodů; průměr 2,07; řešilo 15 studentů

Mějme dvě nekonečně velké vodivé roviny, které jsou obě uzemněné a vzdálené od sebe l . Mezi nimi je umístěn bodový náboj velikosti q ve vzdálenosti x od horní roviny. Určete náboj indukovaný na spodní rovině. Karel vykradl cosi, co se odkazuje na Stony Brook University.

Úlohu vyřešíme pomocou dvoch mocných nástrojov elektrostatiky, Gaussovho zákona a superpozície. Začneme však pekným trikom, ktorý je kľúčom ku celému riešeniu. Predstavme si myslennú rovinu rovnobežnú s oboma vodivými rovinami tak, aby v nej ležal náboj q . Ak sa v situácii zo zadania naindukujú na spodnej rovine celkovo náboj Q , tak z princípu superpozície vieme, že pri pridaní druhého náboja na myslennú rovinu sa naindukujú znova taký istý náboj, teda spolu $2Q$.

Teraz pridáme na túto rovinu N nábojov, pričom N je veľmi veľa. Dokonca tak veľa, že sa z nej stane celkom homogénne nabitá rovina s plošnou hustotou náboja rovnou

$$\sigma = q \frac{N}{S},$$

pričom N aj S rastú nad všetky medze.

Keďže je plošná hustota takmer konštantná, môžeme situáciu považovať za symetrickú voči posunutiu v rovine, a elektrické pole za homogénne (pretože siločiarly nemajú kam, zo symetrie, ujsť).

Situácia sa teraz veľmi zjednodušila. Máme tri nekonečné roviny, pričom jedna je rovnomerne nabitá. Označme hornú rovinu 1 a dolnú rovinu 2 a ku nim prislúchajúcej indukované plošné hustoty σ_1 a σ_2 .

Malo by byť jasné, aké pole je vonku z týchto dvoch rovín, v priestore naokolo. Roviny sú uzemnené, čo znamená, že pri prenášaní náboja z ich povrchu do nekonečna sa nevykoná žiadna práca. Ak by teda bolo mimo týchto rovín nejaké pole, tak by sme pri pohybe náboja od nich

konali práci. Mimo rovin je teda pole nulové, a nenulová elektrická intenzita sa nachádza len medzi týmito rovinami.

Taktiež vieme, že na oboch rovinách je rovnaký potenciál. Ak označíme intenzity medzi doskami číslami prislúchajúcimi ich rovinám, kladný smer od strednej dosky, tak pri posúvaní náboja z tejto dosky na rovinu 1 pole vykoná prácu

$$W = xE_1.$$

Rovnakú prácu ale musí pole vykonať aj pri prechode na druhú rovinu, nakoľko na nich je rovnaký potenciál, a to potenciál zeme

$$xE_1 = (l - x)E_2 \Rightarrow E_1 = \frac{l - x}{x}E_2.$$

Teraz už len použijeme Gaussov zákon. Ako plochu uvažujeme valec s obsahom podstavy S , ktorá bude vždy rovnobežná s rovinami. Jeho stenami žiaden tok netečie, intenzita je s nimi vždy rovnobežná (kolmá na normálu). Pre valec, ktorý pretína len strednú rovinu, platí

$$\begin{aligned} E_1S + E_2S &= \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}, \\ E_2 &= \frac{l\sigma}{x\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

A pre valec prechádzajúci len spodnou rovinou platí

$$-E_2S = \frac{\sigma_2 S}{\varepsilon_0}.$$

Pri pridaní N nábojov je na spodnej rovine celkový náboj NQ , a voči plošnej hustote je vo vzťahu

$$\sigma_2 = Q \frac{N}{S} = \frac{Q}{q} \sigma \Rightarrow Q = q \frac{\sigma_2}{\sigma}.$$

Plošnú hustotu σ_2 ale už vyjadrenú máme

$$\begin{aligned} \frac{l\sigma}{x\varepsilon_0} &= -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}, \\ \frac{\sigma_2}{\sigma} &= -\frac{l}{x}. \end{aligned}$$

Takže po dosadení dostávame

$$Q = -\frac{l}{x}q.$$

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Úloha III.P ... zkroťte Gaiu

5 bodů; průměr 2,39; řešilo 36 studentů

Navrhňte způsob, jak přeměnit rotační energii Země na elektrickou energii. Fantazii se meze nekladou, konstruktéři jsou schopní a postaví všechno.

Jáchym přemýšlel nad novými zdroji energie.

Jeden ze způsobů těžení rotační energie Země člověk používá již téměř sto let. Mluvíme o vodních přílivových elektrárnách. Příliv je vždy stejně orientovaný vůči Měsíci. Jelikož se Země otáčí rychleji, příliv se vůči ní pohybuje. Ve skutečnosti ho Země trochu odnáší s sebou: vrchol přílivu předbíhá Měsíc o zhruba 3° . Tím, jak unáší příliv, se Země zpomaluje. Přílivové elektrárny pak získávají energii z toho, že ho v daném místě ještě více posunou.

Podívejme se ještě na další, poněkud fantastičtější způsob. Ukotvíme velmi pevné a dlouhé lano k Měsíci. Na jeho druhý konec připevníme vlak, který pojedje po kolejích tvaru kružnice se středem v ose rotace Země. Takto ukotvený vlak by stál vůči Měsíci a Země by se pod ním protáčela. Na kola vlaku by pak byly připojené generátory, které by vyráběly elektřinu. Pro zvýšení přenášené síly by se mohlo jednat o zubačku. Pravděpodobně by nebylo nejlepší umísťovat železnici na rovník, kde by byla rychlost vlaku největší. Rychlost vlaku (a tažného lana) by zde byla 460 m/s, což přesahuje rychlost zvuku a odpor vzduchu by dělal pořádnou neplechu. Nehledě na to, že by se železnice špatně stavěla přes oceán. Kdybychom chtěli, aby měl vlak rychlost příjemných 10 m/s, museli bychom postavit železnici ve tvaru kružnice o poloměru 140 km se středem na pólu. K tomu by se výborně hodila Antarktida. Problémem by pak už bylo ukotvení v ledu, časté sněžení a především výstřednost dráhy Měsíce (museli bychom použít dostatečně pružné lano). Výkon takové elektrárny by závisel na vlastnostech použitých materiálů. Když nebudeme uvažovat nad vlastnostmi lana, které si netroufáme odhadovat, samotný vlak by byl určitě schopen dodávat pár gigawattů (velmi hrubý odhad).

Zákon zachování momentu hybnosti nám bohužel nedovoluje těžít rotační energii Země, aniž bychom měnili její tvar či hmotnost. Další možností tedy je postavit vysoký výtah do vesmíru a posílat po něm závaží nahoru. Pro dostatečně vysoký výtah by byla práce vykonaná odstředivou silou větší než energie potřebná k překonání gravitačního potenciálu. Dále uvažujeme výtah se základnou na rovníku. Spočítejme, jaká by byla minimální výška výtahu, aby získaná energie byla kladná. Integrál

$$\int_{R_0}^{R_1} \left(m r \omega^2 - \frac{GMm}{r^2} \right) dr = m \left(\frac{1}{2} \omega^2 (R_1^2 - R_0^2) - GM \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right) \right),$$

kde R_0 je poloměr Země, R_1 je vzdálenost konce výtahu od středu Země, ω je úhlová rychlost Země, G je gravitační konstanta a M je hmotnost Země, udává, jakou práci vykoná těleso o hmotnosti m při cestě ze Země na horní konec. Položíme-li tento výraz rovný nule a vyřešíme-li pro R_1 , získáme minimální výšku výtahu. Ta vychází přibližně $1,5 \cdot 10^8$ m.

Pro získání co největší možné energie bychom chtěli co nejvyšší výtah. Bohužel v okolí $3,8 \cdot 10^8$ m se pohybuje Měsíc, který by nám výtah mohl bořit. Pro $R_1 = 3 \cdot 10^8$ m by jedno závaží o hmotnosti $m = 1$ kg vyrobilo energii 178 MJ. Pro výkon 1 GW bychom nahoru museli posílat 5,6 kg hmoty za sekundu. V tomto směru by bylo asi nejjednodušší využít vodu, které je v okolí rovníku dostatek. Po dosažení horního konce bychom tam hmotu mohli skladovat, to by nám ale příliš napínalo náš výtah. Proto bychom ji jednoduše vypustili a ona by opustila gravitační pole Země, nebo skončila na Měsíci.

Jáchym Sýkora
jachym@fykos.cz

Úloha III.E . . . hopík

8 bodů; průměr 4,25; řešilo 28 studentů

Kutálejte hopík po vodorovné podlaze kolmo proti stěně. Při odrazu od stěny hopík vyskočí. Jak závisí vzdálenost bodu dopadu od stěny na počáteční rychlosti hopíku, případně dalších parametrech?

Poznámka Užitečné informace k úloze naleznete ve studijním textu na internetu⁸.

Jáchym se vracel do mladých let.

Teorie

Budeme uvažovat, že hopík ve tvaru koule o poloměru R , tedy momentu setrvačnosti $I = \frac{2}{5}mR^2$, se kutálí bez prokluzování a srážka: a) je dokonale pružná, b) probíhá s energetickými ztrátami. Před nárazem do stěny má rychlost v_0 a tedy i obvodová rychlost je v_0 .

V okamžiku počátku nárazu, který trvá sice krátkou, ale nenulovou dobu, musí bod nárazu hopíku na stěnu zůstat v klidu, aby byl splněn předpoklad neprokluzování. Po zbytek doby nárazu se bude materiál chovat jako pružinka – „nahrne se“ blízko bodu dotyku, což odpovídá stlačení pružinky. Do této deformace se přelije kinetická energie rotace $E_r = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{5}mv_0^2$, která se v případě a), kdy je srážka pružná, zachová, v případě b) budeme uvažovat koeficient restituice k (viz. dále). Při zpětné deformaci („reformaci“ :) tedy působí síla tečná k povrchu hopíku, která bude mít jak translační, tak rotační účinek.

Zde užijeme známý fígl – do těžiště si umístíme dvě síly stejné velikosti a opačného směru (svisle nahoru a svisle dolů, viz obrázek ??), což zcela jistě můžeme udělat. Velikost každé z těchto dvou sil budiž rovna v každém okamžiku síle f , která vzniká z odpružení hopíku. Pak bude mít svislá síla spolu se silou působící tečně k hopíku čistě rotační účinek, síla mířící vzhůru translační účinek. Bude platit $fR = I\dot{\omega}$ a $f = m\dot{v}$. Jinými slovy, hopíku bude udělen impuls momentu síly $F = J\Delta\omega = Rm\Delta v = Rmv$, a protože původní vertikální rychlost byla nulová, platí $\Delta v = v$. Z tohoto vztahu si napíšeme úhlovou rychlost po odrazu $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$ – impuls působí v opačném směru než je směr původní rotace, proto $\Delta\omega$ odečítáme.

Nyní již máme vše připravené, abychom udělali energetickou bilanci pro oba naznačené případy:

a) V případě dokonale pružné srážky se veškerá mechanická energie zachovává. Rotační energie se přelije do vertikální rychlosti a rotace, tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{5}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I(\omega_0 - \Delta\omega)^2 = \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_0}{r} - \frac{rm}{I}v\right)^2, \end{aligned} \quad (4)$$

z čehož si již můžeme napsat samotnou vertikální rychlost, kterou bude hopík po odrazu mít

$$v = \frac{4}{7}v_0.$$

Poletí vzduchem dobu $t = 2v/g$, kde g je tíhové zrychlení. Po tuto dobu se bude pohybovat horizontální rychlostí v_0 – ta se po odrazu zjevně zachovala v důsledku pružnosti srážky, energetickou bilanci netřeba rozepisovat. Dostáváme hledaný vztah mezi počáteční rychlostí v_0 a vzdáleností místa odrazu a místa, kam míček dopadne d .

$$d = \frac{8v_0^2}{7g}. \quad (5)$$

⁸http://fykos.cz/rocnik25/3-e_std-text.pdf

- b) Nyní budeme uvažovat, že dochází k jistým energetickým ztrátám, které popíšeme tzv. *koeficientem restituace* k . Ten definujeme jako poměr mechanické energie po nárazu ku mechanické energii před nárazem $k \stackrel{\text{def}}{=} E/E_0$. Energetickou bilanci rotační energie (4) upravíme na

$$k \frac{1}{5} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{v_0}{r} - \frac{r m}{I} v \right)^2 \quad (6)$$

a pro horizontální složku rychlosti resp. původní translační složku energie máme

$$k \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_h^2.$$

Hopík se bude pohybovat směrem od stěny rychlostí v_h po čas, který spočteme stejně jako v předchozím případě $t = 2v/g$, kde za v dosadíme z (6),

$$t_k = \frac{2v_0 \left(10 + \sqrt{100 - 140(1 - k)} \right)}{35g},$$

do vzdálenosti

$$d_k = v_h \cdot t = \frac{2v_0^2 \sqrt{k} \left(10 + \sqrt{100 - 140(1 - k)} \right)}{35g}. \quad (7)$$

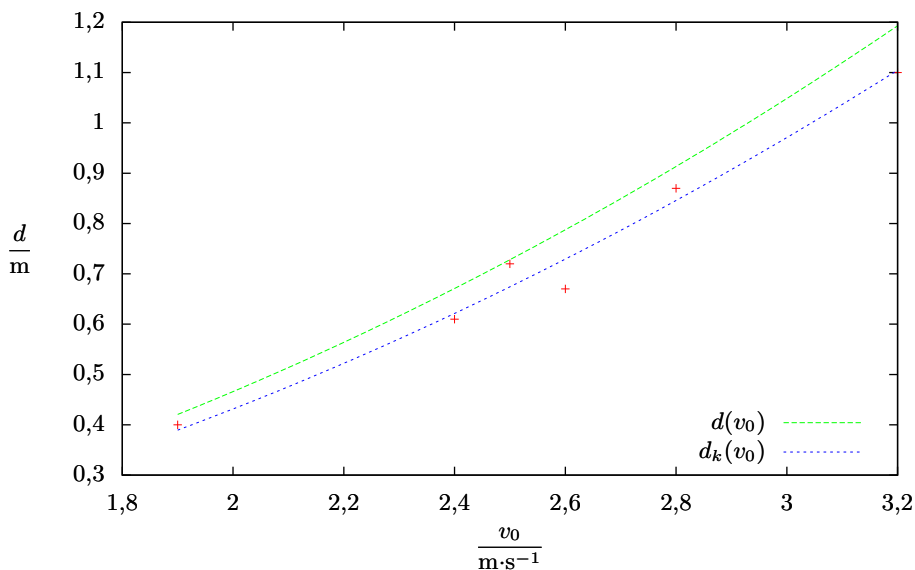
Měření

Po rovném stole jsme posílali míček proti zdi tak, aby neprokluzoval. Z dostatečně velké vzdálenosti jsme děj natáčeli a ze záznamu jsme pak určili vzdálenost dopadu i rychlost (ke stolu bylo přidělováno pásmo, takže obraz se dal snadno zkalibrovat). Frekvence snímkování byla 35 snímků za sekundu. Délku jsme byli schopní určit s přesností $\pm 0,5$ cm. V tabulce 1 jsou zapsány spočtené rychlosti těsně před nárazem a naměřené vzdálenosti dopadu.

Tabulka 1: Naměřená data

$\frac{v_0}{\text{ms}^{-1}}$	$\frac{d}{\text{m}}$
2,8	0,87
1,9	0,4
3,2	1,1
2,6	0,67
2,4	0,61
2,5	0,72

Hodnoty vynesené v grafu na obrázku 5 jsou jednak proloženy funkcí $d(v_0)$, která odpovídá (5), jednak nafitovaná funkcí $d_k(v_0)$, která odpovídá (7). Je vidět, že funkce $d(v_0)$ poměrně dost nesedí, tedy model, který neuvažuje energetické ztráty, zde není vhodný. Z fitu funkce $d_k(v_0)$, který už sedí mnohem lépe, vychází $k = 0,91 \pm 0,02$, což se příliš neshoduje s hodnotou restitučního koeficientu, který jsme experimentálně určili podělením původní výšky a výšky po odrazu na $k = 0,85 \pm 0,01$. Toto je nejspíše způsobeno různými povrchy, od kterých se míček při těchto měřeních odrážel.



Obr. 5: Proložení naměřených dat teoretickými závislostmi

Poznámky k došlým řešením

Přečiny typu, že někdo pošle experimentálku, aniž by cokoli naměřil, nebo něco naměří a nezamyslí se nad tím, co vlastně měřil (nebo to minimálně nezvěční na papír), se opakují stále. Nezbytnou součástí řešení experimentální úlohy je jak teorie, tak samotné měření. Teorie nemusí být nijak nadměrně složitá. Jde třeba udělat rozumné aproximace a tedy jakýsi model – tak, aby to mělo ještě něco společného s realitou a zároveň abyste na to stačili matematickým aparátem. Důležité tedy je především zamyslet se nad tím, co se v daném experimentu děje a pokusit se to nějak formulovat. Závěry, které teoreticky vyvodíte, byste pak měli srovnat s výsledky měření a provést diskusi. Častým zdrojem nedorozumění byl pojem *přímo úměrný*. Většina z vás to patrně myslela tak, že s rostoucí počáteční rychlostí roste vzdálenost dopadu – tedy vzdálenost dopadu je rostoucí funkcí počáteční rychlosti (tato korektní formulace se objevila v jediném řešení). Přímo úměrou se ale obvykle chápe lineární závislost, což zde nesedělo. Kdo si uvědomil, že závislost je kvadratická a rozumně to zformuloval a odůvodnil, velmi nás potěšil :).

Tereza Steinhartová
terkas@fykos.cz

Úloha III.S ... hvězdný zvěřinec

6 bodů; průměr 2,05; řešilo 21 studentů

a) Proč je třeba, aby byl molekulární mrak, ze kterého jsou tvořeny hvězdy, chladný? Zkuste odhadnout a zdůvodnit rozumnou teplotu.

- b) Podíváme-li se na HR diagram některé z hvězdokup, najdeme velký rozptyl okolo hlavní posloupnosti. Jaké jsou způsoby, jak takový rozptyl může vzniknout? Ilustrační obrázek pro hvězdokupu Plejády – M45 – najdete třeba tady⁹.
- c) Jak dlouho by žila hvězda, kdyby nebyla živena termonukleárními reakcemi, ale jen energií ze smršťování se?
- d) Planetární mlhovina Helix má průměr 16' a nachází se ve vzdálenosti cca 213 pc od Země. Jaký je její skutečný poloměr a jak je stará, pokud se její obálka rozpíná s rychlostí 20 km/s?
Janapka.

Molekulární mrak

V molekulárních mracích je neustálý tepelný pohyb částic. Částice, které se rychle pohybují, mají vysokou energii, což implikuje i jejich vysokou teplotu. V textu seriálu je zmíněno, že proti gravitačnímu kolapsu mraku působí právě tepelný pohyb částic. Čím je molekulární mrak teplejší, tím lépe vyrovná podněty, které by vyvolaly gravitační zhroucení oblaku a formaci hvězdy. Jednoduchý odhad teploty mraku můžeme udělat pomocí Jeansovy délky

$$\lambda_J \approx \sqrt{\frac{15k_B T}{4\pi G \rho \mu}},$$

kde k_B je Boltzmanova konstanta, T termodynamická teplota, G je gravitační konstanta, ρ je hustota mraku a μ je hmotnost na částici mraku. Hodnoty konstant jsou známé ($G = 6,67300 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $k_B = 1,3806503 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$), typická Jeansova délka a hustota mraku jsou uvedeny v seriálu ($\lambda_J = 10^{15} \text{ m}$, $\rho = 10^{-16} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). Poslední hodnota, kterou potřebujeme, je μ . Uvědomíme si, že hvězdy jsou na počátku tvořeny převážně vodíkem, který je také nejčastějším prvkem ve vesmíru. μ tedy bude hmotnost jednoho atomu vodíku, $1,674 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Rozměrovou analýzou zjistíme, že teploty by se měly pohybovat okolo desítek kelvinů.

HR diagram

Pro zodpovězení této otázky je třeba si uvědomit, že vesmír se nám sice promítá na plochu – nebeskou sféru, ale ve skutečnosti mezi námi a objektem mohou být jiné objekty, popřípadě prach a plyn. Velký rozptyl okolo hlavní posloupnosti HR diagramu je částečně způsoben chybou měření, neboť určování hmotností hvězd je stále poměrně nepřesné. Ale i za předpokladu, že hmotnost určit umíme velmi přesně, rozptyl bude existovat právě díky objektům v popředí či v pozadí. V uvedeném příkladu se jedná o hvězdokupu M45. Kupříkladu z internetu nebo kterékoliv chytré knížky si můžeme zjistit, že se jedná o mladou a otevřenou hvězdokupu. Mladé hvězdy jsou typicky modřejší než hvězdy staré, takže většina hvězd, které se jeví být mimo hlavní posloupnost a jsou velmi červené, budou objekty v pozadí nebo na popředí. Tento fakt se dá použít i jako test, zda hvězda náleží hvězdokupě nebo ne. Nápadné zčervenání některých hvězd patřících do hvězdokupy také může značit molekulární oblak mezi pozorovatelem a hvězdokupou. Pokud bychom měli hvězdokupu kulovou, třeba M13, bude to naopak. Kulové hvězdokupy jsou velmi staré, takže nejhmotnější a nejteplejší modré hvězdy už došly do stádia, kdy jsou červenými obry apod. Takové hvězdokupy se nám budou jevit spíše červené, takže hvězdy výrazně modré, nezapadající na hlavní posloupnost, můžeme považovat za hvězdy v popředí/pozadí.

⁹<http://www.astrophysicspectator.com/images/diagrams/PleiadesHRDiagramSup2.jpg>

Délka života hvězdy

Vzpomeneme si, jak vzniká hvězda. Vnější síla působí na molekulární oblak o vhodných parametrech, ten se začne smršťovat a ve chvíli, kdy je jeho centrum dostatečně husté, zažehnou se termonukleární reakce. Hvězdou se objekt stane tehdy, dostane-li se do hydrodynamické rovnováhy a ztráty energie smršťováním se jsou uhrazeny termonukleárními reakcemi. Pokud se zajímáme o délku života hvězdy bez termonukleárních reakcí, bude to to samé, jako kdybychom se zabývali časem, který trvá volný pád materiálu na centrum oblaku. Na počátku je takový oblak v hydrostatické rovnováze, kterou musíme narušit ve prospěch gravitace.

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g = -\frac{GM_r}{r^2} \rho.$$

Dále v řešení zanedbáme tlak a budeme uvažovat pouze gravitaci. Obě strany rovnice vykrátíme hustotou (levou stranu si musíme vyjádřit jako sílu na plochu, dp/dr je v podstatě rozdíl tlaku na vršek jednotkového objemu a spodek jednotkového objemu) a získáme tvar

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M_r}{r^2}.$$

Abychom získali kolaps jako funkci času, budeme muset rovnici integrovat. Hmotnost mraku se nám navíc nemění, takže M_r nahradíme $4\pi r_0^3/3$. Abychom mohli rovnici dobře zintegrovat, pomůžeme si vynásobením obou stran rychlostí dr/dt .

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} &= - \left(\frac{4}{3} \pi G r_0^3 \rho_0 \right) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}, \\ \int \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} dt &= \int - \left(\frac{4}{3} \pi G r_0^3 \rho_0 \right) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} dt, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 &= \left(\frac{4}{3} \pi G r_0^3 \rho_0 \right) \frac{1}{r} + C_1. \end{aligned}$$

Integrační konstantu C_1 odvodíme z faktu, že na začátku kolapsu, kdy $dr/dt = 0$, je $r = r_0$ a potom $C_1 = 4\pi G r_0^2 \rho_0/3$. Dosadíme do rovnice a po vytknutí dostaneme

$$\frac{dr}{dt} = - \left[\frac{8}{3} \pi G r_0^2 \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) \right]^{1/2}.$$

Pro integraci takové rovnice si musíme pomoci substitucemi $\psi \equiv r/r_0$ a $\chi \equiv (8\pi G \rho_0/3)^{1/2}$. Získáme rovnici

$$\frac{d\psi}{dt} = -\chi \left(\frac{1}{\psi} - 1 \right)^{1/2}.$$

Takovou rovnici není nejjednodušší vyřešit, nejlepší je sáhnout po nějaké šikovné kuchařce nebo programu, co si s podobnou rovnicí poradí. Je totiž nutná ještě jedna substituce $\psi \equiv \cos^2 \xi$. Řešení nalezneme ve tvaru

$$\frac{\xi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\xi = \frac{\xi}{2} t + C_2,$$

kde konstantu C_2 opět odvodíme z předpokladu $r = r_0$ pro $t = 0$. Po dosazení do substitucí dostaneme $C_2 = 0$, takže rovnice kolapsu je

$$\xi + \frac{1}{2} \sin 2\xi = \xi t,$$

odkud už můžeme odvodit čas volného pádu za předpokladu, že víme, že na konci bude poloměr nulový a proto ze substituce $\psi = 0$ a tedy $\xi = \pi/2$. Po dosazení vyjde vztah pro čas volného pádu $t_{\text{ff}} = \frac{\pi}{2\xi}$. Po odsubstituování dostaneme finální vztah

$$t_{\text{ff}} = \left(\frac{3\pi}{32G\rho_0} \right)^{1/2}.$$

Zkusme si do takového vztahu dosadit nějaká čísla. Pro hustotu $3 \cdot 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ nám vyjde čas volného pádu $3,8 \cdot 10^5$ let. Došli jsme ke stotisícům let, což je prokazatelně méně, než je stáří Země samotné. Kdyby hvězdy byly poháněny pouze díky volnému pádu, jevilo by se nám nebe mnohem dynamičtější a proměnlivější.

Poznámka k řešení Vyřešit onu diferenciální rovnici není zrovna triviální, jako správné řešení je tedy uznáno i takové, které rovnici jen navrhne, popřípadě pěkně popíše, co všechno je třeba uvážit.

Planetární mlhovina Helix

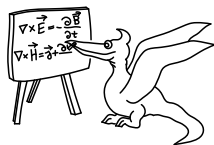
Jedná se o jednoduchý trigonometrický problém. Skutečný poloměr určíme z pravoúhlého trojúhelníku, u něhož známe jeden úhel a jednu odvěsnu – vzdálenost d , poloměr r a úhel čili úhlový poloměr objektu α , pak

$$r = d \operatorname{tg} \alpha.$$

Vzhledem k tomu, že α je blízké nule, $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ a $r = d\alpha$. Po dosazení vychází $r = 4,73$ pc. Známe skutečnou velikost a rychlost rozpínání. Uvědomíme si, že v nulovém stáří můžeme říct, že objekt byl nulové velikosti. Po převedení na roky nám vychází stáří 23 125,3 let.

Poznámka k řešení Na Wikipedii objevíte jiná čísla. V zadání jsou prostě a jenom starší údaje, z toho není třeba si dělat hlavu.

Jana Poledniková
janap@fykos.cz



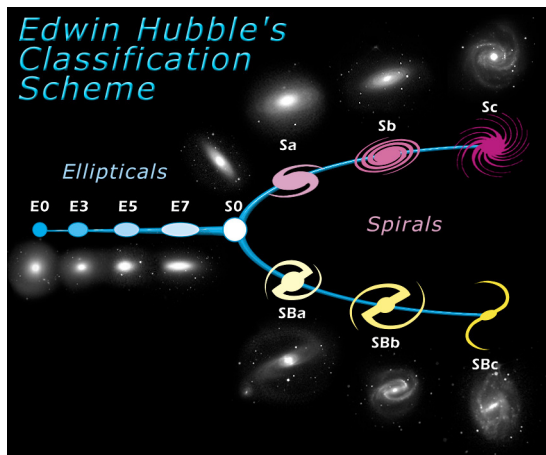
Seriál: Kdysi dávno v jedné galaxii. . .

V minulém díle jsme zlehka našukli fakt, že všechny objekty, co nad našimi hlavami vidíme pouhým okem, jsou až na tři výjimky v naší Galaxii. Zmíněné výjimky jsou malé satelitní galaxie Velké a Malé Magellanovo mračno a spirální galaxie v Andromedě, M31. Díky práci Edwina Hubblea dneska už jistojistě víme, že se jedná vzdálené hvězdné ostrovy¹⁰.

¹⁰ Ačkoliv ještě v první polovině dvacátého století byla podstata galaxií neznámá. Ve starší literatuře je často najdete označené jako spirální nebo eliptické mlhoviny.

Vidličkový diagram

Podíváme-li se na nějaký pěkný přehled galaxií¹¹, zjistíme, že galaxie rozhodně nejsou jedna jako druhá. Toho si při pozorování všiml i Hubble a rozřadil galaxie do dvou kategorií – eliptické „rané“ galaxie a „pozdní“ spirální galaxie. Předpokládal, že struktura galaxií je evoluční efekt a vytvořil tzv. *vidličkový diagram*. Samostatnou kategorií mimo vidličkový diagram tvoří nepravidelné galaxie (označené I, jako *irregular*, pěkným příkladem nepravidelné galaxie je Malé Magellanovo mračno).



Obr. 6: Vidličkový diagram podle E. Hubblea. Eliptické „rané“ galaxie jsou označeny písmenem E, spirální „pozdní“ galaxie jsou označeny písmenem S. Druhé (a případně jakékoliv další) písmeno značí jemnější rozlišení tvaru. Obrázek ve vlastnictví Space Telescope Science Institute.

S postupem času se zjistilo, že není nutně pravda, že spirální galaxie jsou pozdní a eliptické rané. Galaktická morfologie závisí na mnoha parametrech, nicméně teorie v tomto směru rozhodně není jednotná. Je zřejmé, že velkou roli budou v tomto případě hrát galaktické srážky a kanibalismus (pohlcování menších galaxií a slapové trhání sousedních galaxií). Do detailního vysvětlování tvorby nebo zániku spirálních ramen se tedy radši nebudeme pouštět. Popis omezíme na čistou fenomenologii (i ta je víc než složitá).

Jak popsat galaxii

Podíváme-li se na různé galaxie, zjistíme, že se v jejich morfologii opakují některé znaky. Spirální ramena, středové zjasnění nebo podivné kruhy a příčky. Eliptické galaxie typicky nevykazují příliš morfologických struktur. Jediné, co lze popsat je jejich elipticita

$$\varepsilon = 1 - \beta/\alpha,$$

¹¹Třeba na stránkách Hubble Heritage Team – http://heritage.stsci.edu/gallery/gallery_category.html

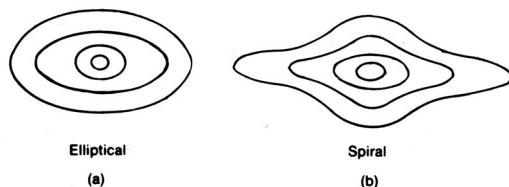
kde α , resp. β je velká, resp. malá poloosa elipsy promítnuté na nebeskou sféru. Hubbleova klasifikace se vyjadřuje jako 10ε , přičemž galaxie, kde by $\varepsilon > 0.7$ nebyly pozorovány, proto klasifikace končí u E7.

U spirálních galaxií najdeme strukturu mnohem zajímavější. Středové zjasnění se nazývá *galaktická výdutě* (bulge), obklopuje ji *disk*. Pro morfologické třídy je důležitý poměr luminosit výdutě a disku ($L_{\text{bulge}}/L_{\text{disc}}$). Pokud je tento poměr přibližně 0,3, pozorujeme těsně namotanou spirálu a galaxii nazveme Sa. Pro poměr přibližně 0,05 pozorujeme volnější ramena, třída se nazývá Sc. Když se trefíme „někam mezi“, nazveme třídu galaxií Sb. Krom disku a výdutě můžeme pozorovat i *příčku* (v současné době věříme, že naše galaxie má příčku). Pokud ji pozorujeme, přidáme do názvu galaxie B. (Galaxie bez příčky se často značí A a pokud existuje jen náznak příčky, jedná se o AB.)

V klasifikaci můžeme jít ještě dál. Můžeme popsat, zda se v galaxii nachází kruh (ring, značeno r), jaká spektrální třída hvězd je v nich dominantní (A, F, G, K podle odpovídajících spektrálních tříd hvězd, O a B nikdy nejsou převažující, stejně tak M). Dále lze popsat úhel natočení číslem 1 (přímý pohled, *face on*) až 7 (pohled z boku, *edge on*). Galaxii v Andromedě tak klasifikujeme jako kS5 (převažují hvězdy spektrální třídy K, jedná se o spirálu a má poměrně vysokou inklinaci).

Výjimku z klasifikace tvoří galaxie S0, tzv. *čočkové galaxie* (lenticular), které jsou z morfologického hlediska stále velkou záhadou. Krom zmíněných morfologických znaků můžeme pozorovat ještě hvězdné halo, ve kterém se nachází kulové hvězdokupy, a poslední, neviditelnou složku, sférické halo temné hmoty.

Krom popisu morfologického se můžeme pokusit i o popis analytický. Proč jenom pokusit? Galaxie jsou obecně velmi komplexní systémy, které je analyticky prakticky nemožné popsat. V podstatě veškeré informace, které o galaxiích máme jsou výsledkem pozorování a numerických simulací. Jednou z mála popsatelných veličin je distribuce plošného jasu. Abychom ji mohli popsat, musíme si zadefinovat pár pojmů. Jedním z nich je *isofota* (isophote), oblast s konstantním počtem vyzařovaných fotonů.



Obr. 7: Isofoty eliptické a spirální galaxie orientované *edge on*. Převzato z Introduction to Cosmology, J.V. Narlikar, Cambridge University Press.

Isofoty potřebujeme pro nadefinování poloměru galaxie, neboť pokud nemáme ostrý okraj (což galaxie ostatně nemá), je poměrně těžké ho určit. Poloměr, který budeme potřebovat se jmenuje efektivní poloměr r_e , což je projektovaný poloměr, ve kterém je obsáhnuta plocha, která emituje polovinu celkového vyzařování galaxie. Pro výdutě spirálních galaxií a eliptické galaxie jde povrchová jasnost napsat ve formě tzv. *de Vacoulerova profilu*,

$$\mu(r) = \mu_e + 8,3268 \left(\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/4} - 1 \right),$$

kde μ značí povrchový jas. Obecnější je tzv. *Sérsicův profil*

$$\mu(r) = \mu_e + 8,3268 \left(\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right),$$

kde jsou tři volné parametry n , μ_e a r_e . Záměnou těchto parametrů se můžeme pokusit popsat i složitější struktury (všimněme si, že de Vacoulerův profil je v podstatě jen konkrétní případ Sérsicova profilu).

Co k různým jasnostem v galaxii přispívá? Nic jiného než rozložení hvězd. Hustota hvězd v halu je menší než v disku a proto se nám disk bude zdát jasnější. Tento fakt umíme popsat veličinami *integrální* a *diferenciální počet hvězd*. Buď $n_M(M, S, \Omega, r)$ (jednotka $\text{pc}^{-3} \text{mag}^{-1}$) hustota hvězd s absolutní hvězdnou velikostí v intervalu $\langle M, M + dM \rangle$ s atributem S (kupříkladu daná luminositní třída), které leží v prostorovém úhlu Ω ve vzdálenosti r . Počet hvězd vyhovujících našim parametrům spočítáme jako

$$n(S, r, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} n_M(M, S, \Omega, r) dM.$$

Změníme-li integrační meze a omezíme-li integrovaný interval na $\langle 0, d \rangle$, dostaneme počet hvězd, které se nachází mezi námi a daným objektem. Použijeme-li $dV = \Omega r^2 dr$, tedy

$$N_M(M, S, \Omega, d) = \left(\int_0^d n_M(M, S, \Omega, r) \Omega r^2 dr \right) dM,$$

získáme vzorec pro *integrální počet hvězd*. Diferenciací toho vztahu získáme zpět $n_M(M, S, \Omega, r)$,

$$n(S, r, \Omega) dM = \frac{1}{\Omega r^2} \frac{dN_M dM}{dr}.$$

V tuto chvíli si musíme uvědomit, že hvězdy se stejnou absolutní hvězdnou velikostí se nám budou jevit různě jasné, budou-li v různých vzdálenostech. Limitní vzdálenost d můžeme nahradit zdánlivou hvězdnou velikostí m a vyjádříme počet hvězd $\bar{N}_M(M, S, \Omega, m) dM$. Pokud vzroste limitní hvězdná velikost jen lehce, limitní vzdálenost vzroste podle ní a do prostorového úhlu se vleze více hvězd, konkrétně

$$\left(\frac{\bar{N}_M(M, S, \Omega, m)}{dm} dm \right) dM.$$

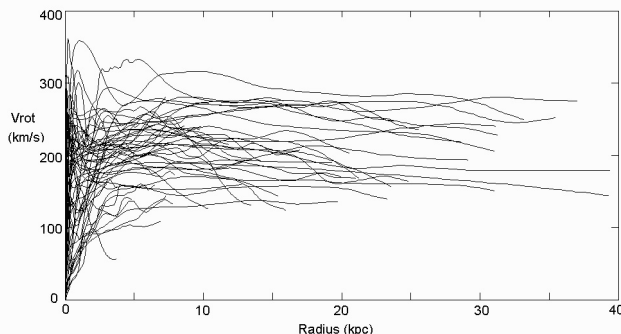
Pomocí toho si nadefinujeme *diferenciální počet hvězd*

$$A_M(M, S, \Omega, m) dM dm \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{N}_M(M, S, \Omega, m)}{dm} dM dm,$$

kde se hvězdy nachází nejen v intervalu absolutních hvězdných velikostí, ale i v intervalu zdánlivých velikostí. Tyto vztahy jsou samozřejmě hodně idealizované, neboť neberou v úvahu přítomnost prachu a plynu mezi pozorovanou galaxií a pozorovatelem.

Rotační křivky

Výše zmíněné vztahy umí galaxii popsat tak, jak ji vidíme, ale jsou nedostatečné, mají-li popsat základní kinematiku galaxie. Jako všechno ve vesmíru, i galaxie rotují¹². K tomu, abychom zjistili, jak rotují, se používají rotační křivky. Pozorováním bylo zjištěno, že rotační křivky jsou si nápadně podobné a nezáleží, zda pozorujeme spirální, eliptickou nebo čočkovou galaxii.



Obr. 8: Rotační křivky galaxií. Na y -ové ose je rotační rychlost, na x -ové ose vzdálenost od středu galaxie.

Pokud se jednotlivé křivky začnou porovnávat s typem galaxií nebo jejich jasností, objeví se korelace. Se vzrůstající luminositou v B filtru roste rotační rychlost strměji a dosahuje vyšší maximální rychlosti V_{\max} . Máme-li stejnou luminositu v B filtru, rané spirální galaxie budou mít vyšší V_{\max} než pozdní typ. Hodnota V_{\max} může být různá, ale tvar křivky vždy zůstává. Toto se stalo jedním z důkazů existence *temné hmoty*. Jak je výše zmíněno, existuje korelace mezi V_{\max} a L platící pro spirální galaxie. Rotaci galaxie lze změřit pomocí mapování neutrálního vodíku obsaženého ve spirálních ramenech galaxie. Část galaxie, která se přibližuje k nám bude posunuta do modré části spektra a vzdalující se do červené. Takový případ je ideální pro použití vztahu pro Dopplerův efekt, kde $\Delta\lambda$ je rozdíl vlnových délek, kde se detekoval maximální tok zčervenálých a zmodralých fotonů z pozorované galaxie.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{klid}}} \approx \frac{v_r}{c} = \frac{V \sin i}{c},$$

kde v_r je radiální rychlost, i je inklináční úhel mezi pozorovatelem a směrem kolmým na galaktickou rovinu a V je rotační rychlost. Korelace mezi rotační rychlostí a absolutní hvězdnou velikostí (nebo luminositou) se nazývá *Tullyho-Fisherova relace*. Jedná se o empirický závěr, pro jednotlivé Hubbleovy typy galaxií se závislost liší.

$$\begin{aligned} M_B &= -9,95 \log_{10} V_{\max} + 3,15 && \text{typ Sa,} \\ M_B &= -10,2 \log_{10} V_{\max} + 2,71 && \text{typ Sb,} \\ M_B &= -11,0 \log_{10} V_{\max} + 3,31 && \text{typ Sc.} \end{aligned}$$

¹²Naše Slunce oběhlo střed galaxie cca 21krát. Jeden oběh se nazývá galaktický rok a trvá přibližně 220 milionů let.

Jak již bylo výše zmíněno chceme něco zjistit o kinematice. Pro takový případ je pěkně odhadnout hmotnost objektu, který se hýbe a zkusit zjistit, zdali umíme alespoň přibližně dojit k empirickým vztahům. Můžeme si jednoduše napsat Newtonův gravitační zákon a dostředivou sílu, které dáme do rovnosti (hvězdy se drží na více či méně stabilních trajektoriích). Hmotnost hvězdy je m , vzdálenost od středu galaxie r a hmotnost galaxie obsažené v poloměru r je M_r .

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{GM_r m}{r^2} \Rightarrow M_r = \frac{V^2 r}{G},$$

kde za V můžeme dosadit i V_{\max} . Pro zjednodušení zavedeme konstantu $C_{ML} \stackrel{\text{def}}{=} L_r/M_r$ a můžeme vyjádřit luminositu

$$L = C_{ML} \frac{V^2 r}{G}.$$

Pokud uvažujeme, že všechny spirály mají stejnou povrchovou jasnost v centru galaxie, můžeme zavést další konstantu $C_{SB} \stackrel{\text{def}}{=} L/r^2$, díky které se ve vztahu pro hmotnost zbavíme poloměru. Luminositu následně přepíšeme,

$$L = \frac{C_{ML}^2}{C_{SB}} \frac{V_{\max}^4}{G^2} = CV_{\max}^4,$$

kde jsme všechny konstanty schovali do C . Máme-li luminositu, můžeme si odvodit i absolutní hvězdnou velikost. Vzpomeneme si na Pogsonovu rovnici a píšeme

$$M = M_{\text{Sun}} - 2,5 \log_{10} \frac{L}{L_{\text{Sun}}},$$

$$M = -10 \log_{10} V_{\max} + \text{konst.}$$

Uvedený vztah je porovnatelný s empiricky naměřenými relacemi. Deviace vznikají v důsledku příliš ideálních předpokladů ($V = \text{konst}$ a konstantní povrchová jasnost v centru galaxie).

Nahlédnutí do temna

Výše jsme zmínili, že ploché rotační křivky jsou jedním z důkazů o existenci temné hmoty. To můžeme zkusit podpořit jednoduchým výpočtem. Vyjdeme z výsledku porovnání gravitační síly a dostředivé síly (označení zachováváme),

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{GM_r m}{r^2},$$

$$M_r = \frac{V^2 r}{G}.$$

Vztah derivujeme podle r , neboť chceme aby platil i pro infinitesimální intervaly,

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{V^2}{G}.$$

Dále si uvědomíme, že máme sféricky symetrický systém, který by měl splňovat nějaký pěkný zákon zachování, kupříkladu hmotnosti

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Dáme-li oba vztahy do rovnosti, dojdeme k vyjádření hustoty hmoty ve vnějších částech galaxie

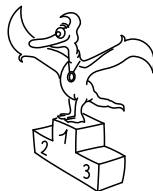
$$\varrho(r) = \frac{V^2}{4\pi G r^2}.$$

Proč vnější části? Když bychom uvažovali malá r , zjistíme, že hustota diverguje, což nikde nebylo pozorováno. A samotný důkaz existence temné hmoty? Ve vztahu pro hustotu vidíme závislost r^{-2} , což neodpovídá rozložení hvězd v galaxii, kde z pozorování profilů jasnosti byla určena závislost na $r^{-3,5}$. Pro vysvětlení se použil neviditelný hmotný komponent projevující se pouze gravitačně, temná hmota. Pomocí simulací byl upraven i vztah pro hustotu, aby byl brán v úvahu i střed galaxie.

Vztah

$$\varrho_{\text{CDM}}(r) = \frac{\varrho_0}{\left(\frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2}$$

je dnes znám jako *cold dark matter*, tedy chladná temná hmota. a je volitelný parametr, stejně jako ϱ_0 . Blízko středu galaxie se tento profil chová jako $1/r$, ve většině galaktického hala jako $1/r^2$ a na samé hraně galaktického hala jako $1/r^3$. Vzhledem k možnosti volby parametru se tento profil ukázal jako univerzální pro všechny galaxie, nezávisle na jejich typu.



Pořadí řešitelů po III. sérii



Úplné pořadí najdete z technických důvodů na našich stránkách.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF UK										
		4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	110
1. <i>Lucie Fořtová</i>	G P. de Coubertina, Tábor	4	4	4	2	-	-	4	2	20	76	69
2. <i>Martin Kihoulou</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	4	2	1	1	-	4	6	1	19	61	60
3. <i>Eva Miklušová</i>	G J. Škody, Přerov	4	2	4	2	-	3	-	1	16	60	58
4. <i>Jozef Bucko</i>	G, Námestie SNP, Piešťany	2	4	1	2	-	3	6	3	21	63	56
5. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	4	2	3	1	-	-	8	-	18	58	52
6. <i>Dalimil Ševčík</i>	G, Vyškov	2	4	3	1	-	2	5	-	17	56	50
7. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	6	2	4	2	-	2	3	2	21	57	47
8. <i>Václav Kytka</i>	Křesť. G, Kozinova, Praha	-	-	0	2	-	1	-	-	3	45	32
9. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	2	2	2	-	-	-	-	1	7	44	31
10. <i>Andrej Fúsek</i>	SPŠ Dubnica nad Váhom	-	-	-	-	-	-	-	-	-	56	30
11. <i>Petr Smášítel</i>	G, Bučovice	4	4	-	-	-	-	-	-	8	88	28
12.-13. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	-	2	-	-	-	2	-	-	4	57	26
<i>Martin Vančura</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76	26
14. <i>Jan Marek</i>	G Zábřeh	-	-	-	-	-	2	3	-	5	45	25
15. <i>Ondřej Poláček</i>	ZŠ, Žerotínova	4	2	-	-	-	-	-	-	6	72	23

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF UK										
		4	4	4	4	5	5	8	6	40	100	110
1. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	4	-	5	4	2	3	5	4	27	82	82
2. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Školská, Dubnica n/Váhom	2	4	3	2	2	3	3	3	21	58	63
3. <i>Tomáš Zahradník</i>	Gymnázium Oty Pavla, Praha	4	4	2	3	2	3	7	2	27	64	59
4. <i>Jirka Guth</i>	G, Jírovcova, Čes. Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	53
5. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	4	2	3	-	-	3	5	-	17	62	50
6. <i>Matěj Bidlák</i>	G Luďka Pika, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	90	46
7. <i>Jaroslav Hofierka</i>	G J. A. Raymana, Prešov	4	2	-	-	-	-	-	-	6	64	41
8. <i>Matěj Tomešek</i>	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	33
9.-11. <i>Josef Koláčný</i>	G, Nymburk	-	-	-	-	2	3	-	-	5	67	32
<i>Adam Práda</i>	G, Ostrov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	65	32
<i>Radka Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava Poruba	2	4	5	-	-	-	-	-	11	73	32
12.-14. <i>Petr Kovář</i>	Matičň G, Ostrava	0	4	1	0	-	4	0	-	9	37	31
<i>Viktor Skoupý</i>	G, Moravská Třebová	-	-	-	-	-	-	-	-	-	69	31
<i>Emil Skříšovský</i>	G, Česká, České Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	31
15. <i>Daniël Slezák</i>	Svobodná chebská škola, Cheb	2	2	-	0	1	2	3	2	12	37	28

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ	
		2	2	4	4	4	5	5	8	6	36	100	106
1. Lukáš Timko	G P. de Coubertina, Tábor	2	1	5	2	2	4	8	3	27	81	83	
2. Filip Murár	G, Masarykovo nám., Třebíč	2	1	5	–	1	2	–	3	14	80	61	
3. Miroslav Hanzelka	G, Česká Lípa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	54	
4. Jaroslav Průcha	G, Strakonice	1	1	0	2	2	3	–	1	10	52	51	
5. Kristýna Kohoutová	G, Žamberk	2	1	3	4	1	4	3	–	18	71	50	
6. Jozef Kaščák	G dukl. hrdinov, Svidník	1	1	1	–	–	4	4	–	11	52	48	
7. Veronika Dočkalová	G, Elgartova, Brno	3	2	–	1	–	1	8	–	15	72	46	
8. Jakub Doležal	G, Špitálská, Praha	2	1	5	1	2	2	8	–	21	65	41	
9.–10. Michal Červeňák	G Púchov	–	2	5	–	–	3	–	–	10	68	39	
David Hruška	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	2	2	5	–	–	1	–	–	10	85	39	

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ	
		2	2	4	4	4	5	5	8	6	36	100	106
1. Patrik Švančara	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	1	5	3	5	3	6	4	30	92	90	
2.–3. Tomáš Bárta	G, Nad Štolou Praha	2	–	5	2	–	–	–	–	9	75	53	
Jakub Kubečka	G, Nymburk	1	1	3	2	–	3	–	–	10	61	53	
4. Radomír Gajdošoci	G, P. Horova, Michalovce	2	–	3	1	–	2	–	–	8	71	42	
5. Daniel Hnyk	První české G, Karlovy Vary	1	1	–	0	–	4	0	1	7	47	40	
6.–8. Kristína Nešporová	G, Boskovice	1	2	3	4	–	–	5	1	16	68	26	
Ivo Vinklárek	G, Rožnov p. Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	26	
Jiří Záhora	G B. Němcové, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	26	
9. Tomáš Hadámek	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	20	
10. Petr Dobiáš	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	4	–	4	69	18	




FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.