23. ročník, úloha VI . 1 ... husitská *(4 body; průměr 2,73; řešilo 15 studentů)*

Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α stojí směrem po spádnici vozová hradba. Vozy jsou stejně těžké, mezi sousedními dvěma je vzdálenost s, celkem jich je N. Na počátku jsou všechny zabržděné. Mazaný bratr Žižka odbrzdí horní z nich a ten se začne pohybovat směrem dolů a bere s sebou další vozy (hned po nárazu se nabouraný vůz odbrzdí a pokračuje dolů spolu s tím, který do něj narazil). Vypočítejte, jakou rychlost bude mít celá vozová hradba po posledním nárazu. Jako bonus můžete určit, jaké by měly být hmotnosti vozů tak, aby se rychlost hradby mezi dvěma nárazy nezměnila.

Na zašlou slávu husitství vzpomínal Jakub.

Předpokládejme, že srážky mezi vozy jsou dokonale nepružné, tzn. po nárazu se vozy spojí a pokračují spolu (podobně jako vagónky v železničních modelech).

Nechť má horní vůz index 1, dolní N. Dále označme w_i rychlost vozů $1, \dots, i$ těsně po srážce a v_i rychlost týchž vozů před následující srážkou.

Abychom zjistili rychlost prvních i vozů po srážce využijeme zákon zachování hybnosti

$$v_{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} m_j = w_i \sum_{j=1}^{i} m_j \quad \Rightarrow \quad w_i = v_{i-1} \frac{\sum_{j=1}^{i-1} m_j}{\sum_{j=1}^{i} m_j} \,.$$

Dále potřebujeme znát rychlost i vozů po rozjetí. Pomůže nám zákon zachování energie

$$\frac{1}{2} v_i^2 \sum_{j=1}^{i} m_j = \frac{1}{2} w_i^2 \sum_{j=1}^{i} m_j + gs \sin\alpha \sum_{j=1}^{i} m_j \quad \Rightarrow \quad v_i = \sqrt{w_i^2 + 2gs\sin\alpha} \,.$$

Výše uvedené vztahy použijeme k vytvoření rekurentního vzorce pro w_i; první člen je $w_1 = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a dále máme

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} m_j}{\sum_{j=1}^{i} m_j} \sqrt{w_{i-1}^2 + 2gs\sin\alpha} \,.$$

Stejné hmotnosti rekurenci zjednoduší na

$$w_i = \frac{i-1}{i} \sqrt{w_{i-1}^2 + 2gs\sin\alpha} \,.$$

To je diferenční rovnice, jejíž řešení lze „uhodnout“[1] a správnost výsledku lze dokázat indukcí. Speciálně pro $i = N$ máme

$$w_N = \sqrt{\frac{(N-1)(2N-1)}{3N}\, gs\sin\alpha} \,.$$

Proberme nyní případ, kdy požadujeme stejné rychlosti soustavy vozů po nárazu. Rychlost, kterou chceme zachovat je

$$w_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \mu v_1 \,.$$

Dále musí platit $w_{i+1} = w_i$, což při využití rekurentího vztahu dává

$$m_{i+1} = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}} - 1 \right) \sum_{j=1}^{i} m_j \,.$$

[1] Jako odrazový můstek poslouží stránka `http://www.wolframalpha.com/`.

V případě stejné rychlosti před srážkou je jasné, že první vůz musí před prvním nárazem získat vyšší rychlost než ostatní vozy. Nechť je tedy mezera mezi prvním a druhým vozem λ-násobek normální vzdálenosti s. Nyní máme podmínky $m_1 = m$ a $v_i = v_1 = \sqrt{2g\lambda s \sin\alpha}$. Jejich dosazením do rekurentních vztahů a úpravou získáváme

$$\lambda = \lambda \left(\frac{\sum_{j=1}^{i} m_j}{\sum_{j=1}^{i} m_j + m_{i+1}} \right)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad m_{i+1} = \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda - 1}} - 1 \right) \sum_{j=1}^{i} m_j \,.$$

Často jste při srážkách používali zákon zachování kinetické energie, což by odpovídalo pružným srážkám, jelikož však vozy pokračovaly spojené, jednalo se o srážky nepružné. Mnoho z vás též uvažovalo, že rychlost spojených vozů mezi srážkami vzroste vždy o konstantu, což však není pravda, takto se mění jen kinetická energie vozů. Rekurentních posloupností se nehledíc na množství nejméně lekali bratři *Patrik Švančara* a *Lubomír Grund*.

Michal Koutný
xm.koutny@seznam.cz