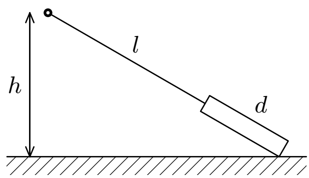
23. ročník, úloha V . 3 ... *vozík* *!!! chybí statistiky !!!*

Na pevném závěsu ve výšce $h = 1\,\mathrm{m}$ nad zemí je upevněn provázek délky $l = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Na konci provázku je přivázána deska délky $d = 0{,}5\,\mathrm{m}$ tak, že provázek je napnut a spolu s deskou leží v jedné přímce (viz obrázek). Když soustavu uvolníme, deska nejprve po hraně klouže bez tření, dokud nedopadne celou svou délkou na zem. Potom se pohybuje proti třecí síle s koeficientem smykového tření f. Spočítejte, jaká musí být jeho hodnota, aby deska svým bližším koncem doklouzala přesně pod závěs.

Vykoumal Lukáš L. pro fyziklání.



Obr. 1. Závěs s tyčí

Řešení tohoto příkladu začneme odzadu. Když deska dopadne na zem, bude mít x-ovou složku rychlosti v_x a její levý okraj bude od závěsu ve vodorovné vzdálenosti, kterou jednoduše vypočteme z Pythagorovy věty

$$s = \sqrt{l^2 - h^2}\,.$$

Dál bude deska konat rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením gf, než se zastaví. Analogicky volnému pádu máme $v_x = \sqrt{2gfs}$, a tedy

$$f = \frac{v_x^2}{2g} \frac{1}{\sqrt{l^2 - h^2}}\,.$$

Teď už zbývá pouze vypočítat x-ovou složku rychlosti těžiště desky. Použijeme k tomu zákon zachování energie. Pro to ale potřebujeme zjistit, jaká část potenciální energie se přemění na rotaci okolo těžiště a jaká část se přemění na jeho posun. K tomu musíme vědět, jakou rychlostí se bude těžiště pohybovat a jaká bude úhlová rychlost rotace tyče kolem něj.

Co se stane po dopadu? Kdybychom uvažovali, že tyč i podložka jsou dokonale tuhé, proběhne pružný ráz a následný pohyb nebude tak jednoduchý, jak se píše v zadání. Protože se deska neodrazí, musí se ve směru osy y úplně zastavit. Při dopadu dojde k nějakým ztrátám energie, ale vzhledem k tomu, že v ose x nejsou žádné zábrany, rychlost v tomto směru zůstane nezměněna.

Zaměřme se na situaci těsně před dopadem. Konec závěsu se pohybuje po kružnici se středem v závěsu a poloměrem r a proto má rychlost $\boldsymbol{v_1}$ kolmou na provázek. Tu si můžeme rozepsat po složkách na $\boldsymbol{v_1} = (v_x, -v_y)$ (mínus proto, že rychlost směřuje dolů). Když se podíváme na druhý konec tyče, vidíme, že se pohybuje směrem podél země. Protože je tyč dokonale tuhá, musí být x-ová složka rychlosti druhého konce stejná, tedy $\boldsymbol{v_2} = (v_x, 0)$. Jaká teď bude rychlost těžiště? Bude to aritmetický průměr rychlosti levého a pravého krajního bodu. Rychlost jednotlivých bodů podél tyče totiž musí spojitě přecházet z hodnoty napravo v hodnotu nalevo. Tedy rychlost těžiště bude

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{t} = \left(v_x, -\frac{v_y}{2}\right)\,.$$

Jaká bude úhlová rychlost rotace? Když odečteme rychlost těžiště od rychlostí obou krajních bodů, měli bychom dostat navzájem opačné rychlosti, ze kterých bychom už měli být schopni úhlovou rychlost vypočítat, protože $\omega = v/r = 2v/d$. Opravdu vyjdou dvě opačné rychlosti o velikosti $v_y/2$, a úhlová rychlost rotace tedy bude $\omega = v_y/d$.

Zapišme tedy zákon zachování energie s tím, co víme:

$$
\begin{aligned}
mgy &= \frac{m}{2}\left(v_x^2 + \frac{v_y^2}{4}\right) + \frac{v_y^2 J}{2d^2}\,,\\
\frac{ghd}{l+d} &= v_x^2 + \frac{v_y^2}{3}\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Ve druhém řádku jsme dosadili za počáteční výšku těžiště a moment setrvačnosti tyče vůči těžišti (všeobecně známá hodnota $md^2/12$) a rovnici dále zjednodušili.

Nicméně stále máme příliš neznámých na jednu rovnici. Využijeme tedy již zmíněného poznatku o směru rychlosti levého konce desky. Protože známe parametry závěsu, umíme říct, pod jakým úhlem α je skloněno lanko při doteku desky se zemí. Protože je rychlost na lanko kolmá, známe vztahy mezi jejími složkami

$$\boldsymbol{v_1} = (v_x, -v_y) = (v\cos\alpha, v\sin\alpha)\,,$$

tedy $v_y = \operatorname{tg}\alpha$, $v_x = \sqrt{(l/h)^2 - 1}$. Dosazením do (1) máme

$$v_x = h\sqrt{\frac{3ghd}{(l+d)\,(2h^2+l^2)}}\,.$$

Takže se po dosazení konečně dostáváme k výsledku

$$f = \frac{v_x^2}{2g}\frac{1}{\sqrt{l^2-h^2}} = \frac{3h^3 d}{2(l+d)(2h^2+l^2)\sqrt{l^2-h^2}} \approx 0{,}08\,.$$

Nejčastější chybou řešitelů této úlohy bylo, že jste vůbec neuvažovali to, že se tyč otáčí, a zapomněli tak při výpočtu na rotační energii.

Aleš Podolník
`ales@fykos.mff.cuni.cz`