23. ročník, úloha III . 3 ... *Hospodine, pomiluj ny!* *(4 body; průměr 1,44; řešilo 16 studentů)*

Jak roste hlasitost (definujte si sami) sboru s počtem jeho členů? Co z toho plyne? Členy sboru uvažujte jako bodové zdroje zvuku stejné amplitudy a frekvence, ale posunuté o náhodnou fázi. Všichni bodoví zpěváci se nacházejí v jednom místě.

Na notu soborvého zpěvu se naladil Jakub.

Jako „definici hlasitosti“ budeme používat intenzitu zvuku I – ta je rovna střední hodnotě akustického plošného výkonu. Co nás však vede k této volbě především, je jednoduchý vztah k akustickému tlaku p (za běžných podmínek): $I \sim \langle p^2 \rangle$, tedy je úměrná střední hodnotě čtverce akustického tlaku. To je podstatné především z toho důvodu, že akustický tlak se chová vcelku lineárně, takže je možné v libovolném okamžiku vypočítat akustický tlak pouhým sečtením příspěvků všech zpěváků.

Míníme-li navíc „stejnou amplitudu“, nejspíš máme na mysli právě amplitudu akustického tlaku.

Vyšetřujme tedy akustický tlak v čase pro různý počet zpěváků. Budeme předpokládat, že průběh příspěvku p_i od jednoho (i-tého) zpěváka bude kosinový (komu se to zdá jako přílišné zjednodušení, nechť si provede příslušný rozklad do Fourierovy řady – z kolmosti jednotlivých členů řady pak vyplyne, že výsledná intenzita poroste stejně) s náhodnou počáteční fází φ_i a úhlovou frekvencí $\omega = 2\pi/T$, kde T je perioda. Tedy

$$p_i(t) = A\cos(\omega t + \varphi_i)$$

a pro N zpěváků máme celkový akustický tlak

$$p(t) = \sum_{i=1}^{N} A\cos(\omega t + \varphi_i)\,.$$

Příslušnou zvukovou intenzitu vypočteme jako integrál čtverce akustického tlaku přes celou periodu, tedy

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T c\,p(t)^2 dt = c\int_0^T \left(\sum_{i=1}^{N} A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_i\right)\right)^2 \mathrm{d}t\,,$$

kde c zahrnuje všechny možné multiplikativní konstanty (závisející na prostředí, vzdálenosti od chóru, ...). Je vidět, že intenzita se může v závislosti na fázovém posunu pohybovat od 0 (každý zpěvák má druha zpívajícího v protifázi) do N^2cA^2 (všichni zpěváci mají fázi stejnou).

Naší snahou bude dále nalézti střední hodnotu intenzity pro všechny možné fázové posuny (vůči prvnímu zpěvákovi). Předpokládáme, že tyto posuny jsou zcela rovnoměrně rozděleny, tudíž budeme hledat střední hodnotu v $(N-1)$-rozměrném intervalu $(0, 2\pi)^{N-1}$,

$$\langle I \rangle = cA^2 \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int_{(0,2\pi)^{N-1}} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{N} A\cos(\omega t + \varphi_i)\right)^2 \mathrm{d}t\,\mathrm{d}U\,;$$

kde $\mathrm{d}U = \mathrm{d}\varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_3 \ldots \mathrm{d}\varphi_N$ je element objemu v $(0{,}2\pi)^{N-1}$. Uvědomme si však, jak počítáme intenzitu – počítáme střední hodnotu funkce $\cos^2 x$ přes periodu v čase. Zřejmě se nic nestane, když místo času budeme integrovat přes bezrozměrnou fázi

$$\frac{1}{T}\int_0^T f\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_0)\,\mathrm{d}\varphi_0\,,$$

a vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je podél všech φ_i periodická, můžeme si libovolně (pevně) posunout počáteční fázi a dostáváme

$$\langle I\rangle = \frac{cA^2}{(2\pi)^N}\int_{(0,2\pi)^N}\left(\sum_{i=1}^{N}\cos\varphi_i\right)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} =$$
$$= \frac{cA^2}{(2\pi)^N}\int_{(0,2\pi)^N}\left(\sum_{i=1}^{N}\cos^2\varphi_i + 2\sum_{1\le i<j\le N}\cos\varphi_i\cos\varphi_j\right)\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\,,$$

přičemž nyní integrujeme již přes všechny $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$.

Každý člen první sumy dá po zintegrování $2^{N-1}\pi^N$, neboť

$$\int_{(0,2\pi)^N}\cos^2\varphi_i\,\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi_i\,\mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}\varphi_2\ldots\mathrm{d}\varphi_i\ldots\mathrm{d}\varphi_N\,,$$

při integraci podél daného fázového posunu dostáváme $\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi_i\,\mathrm{d}\varphi_i = \pi$, podél ostatních fázových posunu se výraz chová jako konstanta a při každé integraci tak pouze přibude činitel rovný délce intervalu, tj. 2π. Integrál z druhé sumy dá nulu, protože $\int_0^{2\pi}\cos\varphi_i\cos\varphi_j\,\mathrm{d}\varphi_i = 0$, $i \neq j$.

Celkem tedy dostáváme

$$\langle I\rangle = \frac{NcA^2}{2}\,,$$

zvuková intenzita je tedy (v průměru) přímo úměrná počtu pěvců, což není překvapivé – dalo se očekávat, že každý zpěvák bude dodávat konstantní výkon nezávisle na jejich počtu.

Z lineární závislosti intenzity na N pak dále plyne, že průměrná velikost akustického tlaku poroste přímo úměrně s $\sqrt{N}$.

Někteří se pokoušeli řešit úlohu pomocí fázorů. Pokud dílčí příspěvek jednoho zpěváka k akustickému tlaku vyjádříme pomocí komplexní exponenciály $p_j = A_j\cos(\omega t + \varphi_j) = \Re(A_j e^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_j)})$, celkový akustický tlak je potom

$$p = \sum_j p_j = \sum_j \Re(A_j e^{i(\omega t+\varphi_j)}) = \Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sum_j A_j e^{\mathrm{i}\varphi_j}\right)\,.$$

Pokud tedy dávají jednotliví zpěváci harmonický příspěvek k akustickému tlaku se stejnou frekvencí, celkový akustický tlak bude mít také harmonický průběh (s touž frekvencí), a to i při různých dílčích amplitudách. Celková amplituda je pak dána výrazem $\left|\sum_j A_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}\right|$. Ve fázorovém diagramu bude každému členu $A_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}$ příslušet vektor o velikosti A_j natočený o příslušný úhel φ_j.

Pokud budou všechny $A_j = A$ stejné a všechny fázové posuny φ zcela náhodné, výsledná amplituda bude dána vzdáleností od počátečního bodu při náhodné procházce při kroku délky A. Tato vzdálenost je v průměru přímo úměrná druhé odmocnině počtu kroků, takže amplituda akustického tlaku bude taktéž přímo úměrná odmocnině počtu zpěváků

$$\left\langle\left|\sum_{j=1}^{N} A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j}\right|\right\rangle \sim \sqrt{N}\,,$$

což souhlasí s naším výsledkem výše.

Marek Nečada
marekn@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.