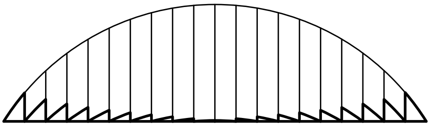
23. ročník, úloha II . S ... *záhada meotaru a rybí oko* *(6 bodů; průměr 2,60; řešilo 10 studentů)*

a) *Možná jste si všimli, že mezi zdrojem a průhlednou podložkou na fólie je v tradičním meotaru za účelem soustředění světla vložená dost zvláštní čočka, která vypadá spíš jako rýhovaná deska (viz také úloha VI.2 ze XVII. ročníku). Vznikne tak, že standardní plosko-vypuklou čočku rozřežeme na soustředné prstence, z každého si necháme jen úplný konec a výsledek opět složíme, takže získáme něco jako „osově symetrické pahorkaté sklo“ (viz obrázek).*



Obr. 1. Čočka z meotaru

Takto vzniklá čočka má všude stejný sklon jako původní spojka, a podle Snellova zákona tak očekáváme, že bude stejně dobře soustřeďovat světlo. Naproti tomu, z pohledu Fermatova principu, už každé dráze nepřísluší stejný čas, neboť jsme v různých místech odebrali různě tlusté vrstvy skla – například úplně nejkratší čas teď odpovídá cestě po optické ose. Zdá se tedy, že Fermatův pricnip selhává – podle něj by čočka soustřeďovala jen světlo jdoucí po optické ose a nefungovala tak, jak má. Rozhodněte kdo má pravdu: Snell, Fermat? A proč?

b) *Najděte dráhy paprsků ve dvojrozměrné situaci, kdy závislost indexu lomu na vzdálenosti r od počátku je dána funkcí*

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2} .$$

c) *(Bonus.) Vložíme-li do prostoru s proměnlivým indexem lomu bodový zdroj světla, může se stát, že se velká část paprsků, které z něj vycházejí, sejde v jednom bodě, jako je tomu v případě spojné čočky. Takto vzniklý bod pak nazýváme obrazem bodu původního. Popište geometrické zobrazení* zdroj → obraz, *které tímto způsobem indukuje prostředí s indexem lomu z předchozí úlohy.*

Z Kroniky Dalimilovy.

Starý známý meotar

Jak Snellův, tak i Fermatův princip dávají v naší situaci správnou předpověď, je jen třeba je správně interpretovat. Vysvětlení pomocí Snellova zákona je jednodušší: Nově vzniklá čočka má v každém místě stejný sklon jako ta původní, a všechny procházející paprsky se tedy na šikmých rozhraních budou lámat stejně, jako by se jednalo o nezměněnou ploskovypuklou čočku.

Abychom dostali správnou odpověď i z Fermatova principu, musíme použít jeho správnější verzi, která říká, že světlo šířící se mezi dvěma body si vždy vybere dráhu se *stacionárním* časem, tedy dráhu, která odpovídá lokálnímu (ne nutně globálnímu) extrému celkového času na skupině všech možných drah. Nyní vše funguje tak, jak má, protože pohybujeme-li se jen v rámci jednoho prstence, čas potřebný pro průchod zůstává stejný, stacionární. Tím, že jsme z každého prstence odebrali danou vrstvu skla, jsme vytvořili jakésy „schody“ – každému prstenci odpovídá různý čas, který se zvyšuje se vzrůstající vzdáleností od optické osy, v rámci jednoho prstence se ale nemění. I Fermatův princip tedy předpovídá, že světlo bude k cestě do ohniska procházet skrz všechny části čočky, stejně jako tomu bylo před rozřezáním, a zdánlivý paradox je vysvětlen. Bylo by podezřelé, kdybychom ze Snellova a Fermatova principu obdrželi protichůdné závěry, vždyť jsme, byť na jednoduchých situacích, ukázali, že jsou ekvivalentní!

Otázkou zůstává, co se děje na rozhraních mezi prstenci. Geometrická optika stačit nebude, protože zde pozorujeme skokový nárůst času, tedy konečně velkou změnu času v měřítku kratším, než je vlnová délka použitého světla. Proto můžeme očekávat, že zde do hry vstoupí vlnové vlastnosti světla, tedy především interference. Na závěr bychom měli podoknout, že nově vzniklá čočka nebude mít zcela identické vlastnosti jako její ploskovypuklá předchůdkyně ani z hlediska geometrické optiky (jak si správně všiml *Jakub Vošmera*). Odebrání vrstev skla totiž posouvá místa, odkud se dále paprsky šíří k optické ose, a soustřeďování[1] nebude dokonalé. V praktických situacích je ale tento posun zanedbatelný, a v případě potřeby se dá kompenzovat správnou úpravou sklonu jednotlivých prstenců.

Podivný index lomu

Jelikož index lomu

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + \left(\dfrac{r}{a}\right)^2} \tag{1}$$

závisí jen na vzdálenosti od středu, můžeme využít trvzení ze závěru seriálu, podle kterého se bude zachovávat optický moment hybnosti

$$L = n(r)\, r \sin\alpha = \mathrm{konst}\,, \tag{2}$$

kde α je úhel mezi paprskem a průvodičem. Po dosazení (1) do (2) dostaneme

$$\frac{r \sin\alpha}{a^2 + r^2} = C\,, \tag{3}$$

kde $C = L/n_0 a^2$ je konstantní. Nyní bychom mohli, stejně jako většina řešitelů, dosadit do (3) za $\sin\alpha$ pomocí derivace r' podle úhlu φ polárních souřadnic a řešit vzniklou diferenciální rovnici pro $r(\varphi)$. Tento postup je možné dovézt až do konce, ale díky svojí zdlouhavosti a nutné znalosti pokročilejších technik integrování do FYKOSu spíše nepatří, jak také naznačuje nízká úspěšnost řešitelů, kteří se touto cestou vydali. Místo toho použijeme trik.

Dívejme se na trajektorii jako na funkci parametru dráhy s

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2$$

a označme $\phi(s)$ úhel, který svírá tečna trajektorie v bodě s s osou x. Zkoumejme veličinu

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\,,$$

která říká, jak rychle se trajektorie stáčí, posunujeme-li se podél ní. Pro diferenciální přírůstek $\mathrm{d}\phi$ platí

$$\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\varphi\,,$$

[1] V případě meotaru bychom měli říct spíš „zrovnoběžňování“.

kde druhý člen na pravé straně je oprava k $\mathrm{d}\alpha$ v důsledku stáčení radiálního směru (promyslete). Máme tedy

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\,. \tag{4}$$

První člen pravé strany upravíme za pomoci vztahu $\cos\alpha\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}r$ na

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\cos\alpha\ \mathrm{d}\alpha}{\cos\alpha\ \mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\sin\alpha}{\mathrm{d}r}\,,$$

a můžeme aplikovat rovnici (3)

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = C\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{a^2}{r} + r\right) = C\,\frac{r^2 - a^2}{r^2}\,.$$

S druhým členem pravé strany (4) máme méně práce

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{r\ \mathrm{d}\varphi}{r\ \mathrm{d}s} = \frac{\sin\alpha}{r} = C\,\frac{r^2 + a^2}{r^2}\,,$$

a konečně po sečtení obou výrazů dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = C\,\frac{r^2 - a^2}{r^2} + C\,\frac{r^2 + a^2}{r^2} = 2C = \mathrm{konst}\,.$$

Pohybujeme-li se tedy rovnoměrně podél trajektorie, tečna k ní se stáčí konstantní rychlostí $2C$ radiánů na metr. Jinými slovy, trajektorií musí být *kružnice* o poloměru $R = 1/2C$, kde konstanta C závisí na počátečních podmínkách (viz níže).

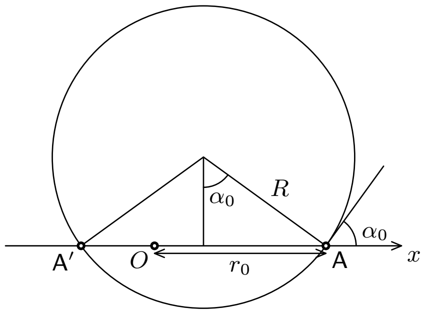
Bonus

Mějme dán bod A ve vzdálenosti r_0 od počátku souřadnic (viz obrázek). Vzhledem k isotropii prostoru si ho můžeme bez újmy na obecnosti zvolit na ose x. Zajímalo by nás, jak vypadá množina všech paprsků, které z něj vycházejí, zejména pak jejich průsečíky. Každý paprsek je určen úhlem α_0, který svírá s osou x v bodě A, a podle předchozí části tedy bude opisovat kružnici o poloměru

$$R = \frac{1}{2C} = \frac{r_0^2 + a^2}{2r_0 \sin\alpha_0}\,.$$

Kde takový paprsek protne osu x podruhé? Označíme-li tento průsečík $\mathsf{A}'(\alpha_0)$, tak z obrázku jednoduchou geometrickou úvahou dostaneme

$$|\mathsf{A}'\mathsf{A}| = 2R\sin\alpha_0 = r_0 + \frac{a^2}{r_0}\,.$$



Obr. 2. Paprsek

Poloha bodu A′ tedy nezávisí na α_0 a všechny paprsky vycházející z A se protnou ve stejném bodě A′, který leží také na ose x, a to na opačné straně ve vzdálenosti a^2/r_0 od počátku. Takto získané zobrazení zdroj → obraz můžeme zapsat vektorově jako

$$\boldsymbol{r} \quad\mapsto\quad -\frac{a^2}{|\boldsymbol{r}|^2}\,\boldsymbol{r}\,.$$

Řešitelé s lepším geometrickým vzděláním v tomoto zobrazení rozpoznají kruhovou inverzi vzhledem ke kružnici se středem v počátku a poloměrem a složenou s inverzí souřadnic.

Motivace pro další studium

Ty z vás, kteří už slyšeli o hyperbolické geometrii, a koneckonců i ostatní, určitě zaujme, jak se odpovědi na otázky (b) a (c) změní, když prohodíme znaménko ve jmenovateli (1), tedy budeme počítat s indexem lomu

$$n(r) = \frac{n_0}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}\,.$$

Dalimil Mazáč
dalimil.mazac@gmail.com

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.