Milí řešitelé!

Dostáváte do rukou zadání druhé série svého oblíbeného Fyzikálního korespondenčního semináře. Doufáme, že se vám naše úlohy budou líbit a pošlete nám svá řešení, na která již nyní netrpělivě čekáme.

Rádi bychom vás také všechny pozvali na *Den otevřených dveří Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy*, který se uskuteční ve čtvrtek 26. listopadu. Bližší informace najdete na adrese `http://www.mff.cuni.cz/verejnost/dod/`. Na DODu se také budete moci setkat s organizátory FYKOSu a bude k dostání i ročenka 22. ročníku.

Aktuální dění v semináři sledujte na stránkách `http://fykos.mff.cuni.cz/`, kde naleznete zadání a řešení všech úloh, aktuální pořadí, diskuzní fórum a rovněž zde můžete uploadovat své soubory s řešením.

Přejeme vám spoustu krásných chvil nad úlohami FYKOSu a těšíme se s vámi na viděnou na jarním soustředění.

Organizátoři

Zadání II. série

Termín odeslání: 14. prosince 2009

Úloha II . 1 ... *kalamita*

Jeden z organizátorů jel vlakem domů a zapadl ve vánici. Z dlouhé chvíle počítal sněhové vločky padající za oknem. A napadlo jej – kolik jich je asi v jednom kilogramu sněhu? Provedl kvalifikovaný odhad a spokojeně umrzl. Co mu vyšlo?

Úloha II . 2 ... *rušit krok*

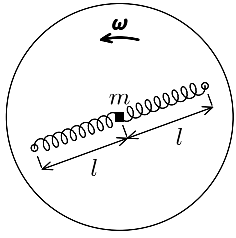
Jak rychle máme jít po visutém mostě, abychom jej co nejvíce rozkmitali? Úlohu vhodně parametrizujte a následně vyřešte.

Úloha II . 3 ... *brnkačka*

Prodává se váleček, na kterém jsou malé výstupky. Váleček otáčeje se brnká o hranu ocelové destičky, která je nařezaná na proužky rozdílné délky. Ve skladbě na válečku se vyskytují všechny noty v daném neprázdném rozsahu (dejme tomu stupnice C dur). Dokážete zjistit tvar funkce konců nařezaných proužků?

Úloha II . 4 ... *Márovy pružiny*

Kutil Mára si doma sestavil takovouto hračku: Na dřevěný kruh do jedné přímky procházející středem disku přimontoval dvě zarážky (stejně daleko od středu), mezi které na dvou pružinách o tuhosti k napnul závaží o hmotnosti m. Závaží může bez tření klouzat po disku. Mára hračku položil na stůl a roztočil okolo osy disku úhlovou rychlostí ω, přičemž závaží mírně vychýlil z rovnovážné polohy. Kvalitativně popište pohyb závaží, a pokud si věříte, vypočítejte jej (za bonusové body).



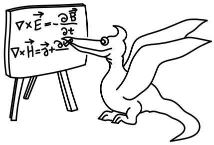
Obr. 1. Pohled shora

Úloha II . P ... *telekineze*

Odkud bere magnet energii na zvedání věcí, když magnetická síla nemůže konat práci? Lorentzův vzorec $\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ říká, že magnetická síla je kolmá na rychlost pohybujícího se náboje, a tedy pouze mění jeho směr hybnosti.

Úloha II . E ... *metronom*

Hrajete-li na hudební nástroj, určitě občas máte problémy udržet rytmus. Navrhněte experiment a změřte, jakou frekvenci (úderů o stůl, stisků klávesy, ...) dokáže člověk nejlépe udržet. Existuje nějaká korelace mezi ní a jinými přirozeně se vyskytujícími jevy?



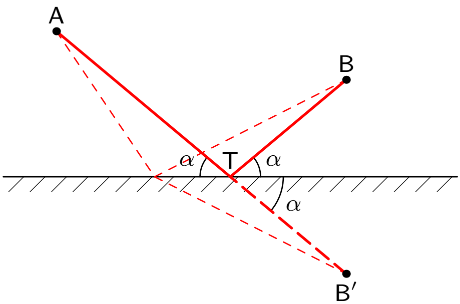
Seriál na pokračování

Kapitola 2: K Fermatovu principu a ještě dál

Fermatův princip

Ve druhém díle našeho seriálu o světle se budeme nadále zabývat především takzvanou *geometrickou optikou*, tedy tou částí nauky o světle, která se zabývá situacemi, kdy je vlnová délka zkoumaného záření mnohem menší než typická velikost měřících přístrojů, a vlnovou povahu světla tak v podstatě můžeme ignorovat. Prakticky to znamená, že na světlo se zde místo jako na pohybující se vlnu díváme jako na úzký paprsek či soustavu paprsků, letících prostorem. V minulém díle jsme hovořili o Huygensově principu, který nám říká, jak zkonstruovat čelo světelné vlny v daném okamžiku, známe-li jeho tvar v libovolném předcházejícím čase. Není však moc jasné, jak tento princip použít pro úzké světelné paprsky a odvodit tak například, jak se bude paprsek pohybovat v prostředí s proměnným indexem lomu. Zkusme tedy najít pravidlo, podle kterého se paprsky světla řídí.

V nejjednodušším případě máme paprsek světla šířící se volným prostorem; v takovém případě odpověď známe: světlo se bude pohybovat po přímce. Co když mu dáme do cesty zrcadlo? Přesněji řečeno, máme-li dva body, A a B libovolně umístěné na jedné straně zrcadla (viz obrázek), kudy se bude z bodu A pohybovat světlo, aby dorazilo právě do bodu B? Když pomineme možnost přímé cesty, očekáváme, že paprsek poletí rovně k nějakému místu na zrcadle, od toho se odrazí a odtut poputuje přímo do cíle. Zbývá zjistit, od kterého bodu T zrcadla se paprsek odrazí.



Obr. 2. Odraz a dopad

Odpověď našli už Řekové okolo počátku našeho letopočtu: Postavíme-li světlu do cesty libovolné množství zrcadel, bude se vždy šířit tak, aby celková uražená dráha byla co nejkratší. V našem případě to znamená, že bod T musíme nastavit tak, aby součet $|\mathsf{AT}| + |\mathsf{TB}|$ byl co nejmenší, a zde nám pomůže geometrický trik. Když zakreslíme B' jako zrcadlový obraz bodu B, všimneme si, že $|\mathsf{AT}| + |\mathsf{TB}|$ je to samé jako $|\mathsf{AT}| + |\mathsf{TB}'|$, tedy délka cesty z A do B'

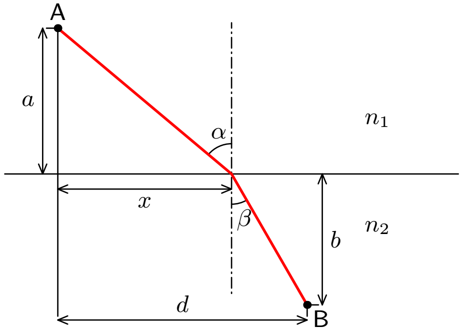
skrz T. Ale ta je nejmenší, když všechny tři body A, T a B′ leží na přímce, z čehož už plyne rovnost úhlů α, vyznačených na obrázku. Dostali jsme tak známé pravidlo odrazu a dopadu.

Platí ale zmíněný „princip nejkratší dráhy“ opravdu vždy? Nám už známý příklad dvou prostředí s rozdílnými indexy lomu ukazuje, že ne, vždyť lomená dráha, kterou předpovídá Snellův zákon, rozhodně není nejkratší cesta z A do B na následujícím obrázku 3.

Pierra de Fermat tedy někdy okolo roku 1657 napadlo místo dráhy, kterou světelný paprsek urazí, uvažovat nad časem, jenž mu daná trajektorie zabere, a vyslovil slavný *princip nejkratšího času*, dnes známý také jako *Fermatův princip*:

> *Máme-li daný počáteční a koncový bod trajektorie, paprsek světla se mezi nimi bude šířit tak, aby mu cesta zabrala nejkratší možnou dobu.*

Při pohledu zpět na obrázek znázorňující lom světla, které přechází z opticky řidšího do opticky hustšího prostředí (tj. $n_1 < n_2$), zjišťujeme, že Fermatův princip kvalitativně správně předpovídá lom „ke kolmici“. Protože se paprsek šíří pomaleji ve druhém prostředí, snaží se v něm jít po kratší dráze, ne však té nejkratší možné (tedy kolmé na rozhraní), neboť ta by zase vedla k příliš dlouhé dráze v prvním prostředí. Výsledkem je tedy jistá kompromisní, mírně lomená dráha. Abychom ukázali, že Fermatův princip předpovídá přesně zákon lomu, musíme konečně trochu počítat.



Obr. 3. Snell a Fermat

Příklad – *Snellův zákon lomu z Fermatova principu*

Ukažte, že pro trajektorii s nejkratším časem platí $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$.

Řešení

Označme a a b vertikální vzdálenosti bodů A a B od rozhraní a d jejich horizontální vzdálenost (viz obrázek). Obecný paprsek dopadne do místa vzdáleném x od paty kolmice spouštěné z bodu A na rozhraní. Celkový čas pro takovou dráhu pak vychází

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2} = \frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{a^2 + x^2} + n_2\sqrt{b^2 + (d - x)^2}\right) .$$

Abychom našli minimum t v závislosti na x, položíme derivaci rovnou nule.

$$0 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{c}\left(n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - n_2 \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}\right)$$

neboli

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} ,$$

což je ekvivalentní nám již známému zákonu lomu

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta .$$

Přestože vidíme, že vše funguje, jak má, musíme se přiznat, že jsme Fermatův princip uvedli v podobě, která je jen speciálním případem správného a obecně platného zákona. Ve skutečnosti se totiž paprsky vždy nepohybují po dráze s *nejkratším* časem, ale po dráze, na které je čas *stacionární*. To jednoduše řečeno znamená, že pozměníme-li virtuálně správnou trajektorii téměř nepatrným, ale libovolným způsobem, celkový čas, který ji přísluší, se prakticky nezmění. Situace je tedy podobná, jako když hledáme stacionární body funkce $f(x)$: derivace $f'(x)$ je nulová v místech, kde malé posunutí po ose x nezpůsobí téměř žádnou změnu v $f(x)$. V našem případě ale místo stacionárních bodů funkce z reálných čísel do reálných čísel hledáme stacionární trajektorie zobrazení ze všech myslitelných trajektorií do reálných čísel.[1] Správné dráhy paprsků tedy mohou být lokální či globální minima, maxima ale i obdoby „sedlových bodů“. Matematická disciplína, která se zabývá tímto typem problémů, se nazývá *variační počet* (variací δf funkce f rozumíme její obecné diferenciální pozměnění) a je nedílnou součástí matematického aparátu fyziky.

Od šošovky, šošovice ke kvantové mechanice

Pomocí Fermatova principu můžeme elegantně vysvětlit funkci spojné čočky. Posviťme na ni z jedné strany bodovým zdrojem umístěným na její optické ose a sledujme paprsky letící od této osy pod různými úhly. Trik čočky spočívá v tom, že čím více je paprsek odchýlený od osy, tím tenčí kus skla mu stojí v cestě, a ideální čočka má právě takový tvar, aby všechny myšlené paprsky sbíhající se na druhé straně do jednoho bodu odpovídaly přesně stejnému, minimálnímu času, nezávisle na úhlu odklonu od optické osy. Jinými slovy, pro každý paprsek odchýlený od osy se dráha navíc ve vzduchu přesně vyruší s kratší drahou opticky hustým sklem. Světlo se tedy nemůže rozhodnout, kudy se šířit, a nezbývá mu než zkusit všechny cesty skrz čočku, neboť všechny odpovídají minimálnímu času.

Podobná tvrzení dávají vzniknout spoustě otázek: Co to znamená, že se světlo rozhoduje? Jak může předem vědět, které dráhy odpovídají nejkratším časům? Částečná odpověď na tyto otázky je pěkně formulovaná v prvním díle *Feynmanových přednášek z fyziky* v kapitole *Princip nejkratšího času* a jejich analýza nás opět vede k hledání hranice mezi vlnovou a „paprskovou“ povahou světla. Víme totiž, že světlo v daném paprsku je schopné jistým způsobem prozkoumat bezprostředně sousedící dráhy a zjistit, na které je celkový čas pohybu nejkratší. Vzdálenost, na kterou je světlo schopné prozkoumávat okolní dráhy je ale řádově rovná jeho vlnové délce, a nutíme-li ho procházet užšími místy, žádné paprsky řídící se Fermatovým principem nepozorujeme.

To nás přivádí blíže k analogii mezi optikou a mechanikou. Podobně, jako jsme v optice vyslovili princip nejkratšího času pro paprsky, můžeme i v klasické mechanice místo Newtonových zákonů použít takzvaný princip nejmenší akce: definujeme Lagrangián

$$L = \tfrac{1}{2}mv^2 - V$$

jako rozdíl kinetické a potenciální energie. Princip nejmenší akce tvrdí, že hmotný bod se bude pohybovat tak, aby průměrná hodnota Lagrangiánu byla co nejmenší.[2] Zájemce odkazujeme na FYKOSí seriál o teoretické mechanice z ročníku 2004/05.

Analogie však sahá ještě mnohem dál. Podobně, jako je paprsková optika vyjádřená Fermatovým principem jen přibližnou verzí přesnější a mnohem bohatší teorie vlnové optiky (které se začneme věnovat v následujícím díle), tak se na počátku dvacátého století ukázalo, že klasická mechanika je „jen“ aproximací složitější teorie, známé jako *kvantová mechanika*, v níž se

---

[1] Takovému zobrazení se obvykle říká *funkcionál*.

[2] Opět bychom místo nejmenší měli psát stacionární.

částice chovají částečně jako vlny, které splňují rovnici velice podobnou té pro světlo. To už ale opravdu překračujeme rámec tohoto dílu.

Optická hybnost

Vraťme se teď od povídání k počítání; u analogie s mechanikou ovšem ještě zůstaneme. Možná jste slyšeli, že symetrie mechanického systému souvisejí se zachováním fyzikálních veličin. Nezávisí-li například potenciální energie na souřadnici x, bude se zachovávat hybnost v tomto směru.[3]

$$m\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \text{konst.}$$

Podobně, je-li silové pole kulově symetrické, jako například v případě gravitačního pole Slunce, bude se zachovávat vektorová veličina známá jako moment hybnosti

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \text{konst.}$$

Pro hlubší pochopení vztahu symetrií a zákonů zachování opět doporučujeme závěrečné díly seriálu o teoretické mechanice z osmnáctého ročníku.

Dokážeme najít podobné „zákony zachování“ i v paprskové optice? Kupodivu ano a i zde se nám budou velice hodit při praktických výpočtech. V geometrické optice chceme nejčastěji zjistit, jak se bude pohybovat paprsek v prostředí se spojitě se měnícím indexem lomu $n(x, y, z)$. My budeme až do konce tohoto dílu pro jednoduchost uvažovat jen úlohy se spojitým indexem lomu $n(x, y)$ na dvourozměrné ploše, a paprskem popsaným funkcí $y(x)$. Jakou veličinu bychom měli nazvat *optickou hybností*? Z analogie s mechanikou bychom si přáli, aby se x-ová složka optické hybnosti zachovávala, pokud index lomu závisí jen na y. V takovém případě můžeme rozsekat naši plochu s indexem lomu na infinitesimální pásky rovnoběžné s osou x, takže n se v rámci jednoho pásku téměř nemění, a na každé rozhraní mezi nimi použít Snellův zákon lomu! Ten nám říká, že veličina $n(y)\sin\alpha$, kde $\alpha(x)$ je úhel, který paprsek svírá v daném místě x s rovnoběžkou na osu y, je stejná pod i nad rozhraním, což můžeme vyjádřit diferenciálně jako

$$n(y)\sin\left(\alpha(x)\right) = n(y + \mathrm{d}y)\sin\left(\alpha(x + \mathrm{d}x)\right)\,.$$

Můžeme tedy projít kolik rozhraní chceme, ale $n(y)\sin\alpha$ se od počátečního do koncového bodu nezmění. Tato veličina je navíc díky faktoru $\sin\alpha$ úměrná x-ové složce rychlosti paprsku, takže ji můžeme směle označit za optickou hybnost, ačkoli fyzikální rozměr hybnosti nemá.

Ze zákona zachování optické hybnosti přímo vyplývá diferenciální rovnice pro $y(x)$. Zbývá vyjádřit $\sin\alpha$. Z výpočtu

$$\sin\left(\alpha(x)\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

obdržíme

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}} = k\,, \tag{1}$$

kde k je konstanta pro celou trajektorii. Získáváme tak diferenciální rovnici, která se dá ve většině jednoduchých případů řešit analyticky.

[3]) Důvod je prostý: nemění-li se potenciální energie v daném směru, nemůže v něm působit žádná síla, a není co by měnilo celkovou hybnost.

Příklad – ***lineární index lomu***

Najděte trajektorie paprsků v materiálu s indexem lomu $n(y) = n_0(y/a)$ pro $y > 0$.

Řešení

V našem případě rovnice (1) nabývá tvar

$$n_0 \, \frac{y}{a} = k\sqrt{1 + (y')^2}\,.$$

Jelikož posunutím jakéhokoli řešení podél osy x dostaneme opět řešení, stačí se omezit na ta, která mají $y'(0) = 0$, a všechna ostatní dostaneme vhodným posunutím.[4] Z počátečních podmínek $y'(0) = 0$ a $y(0) = y_0$ tak můžeme určit konstantu

$$k = n_0 \, \frac{y_0}{a}\,,$$

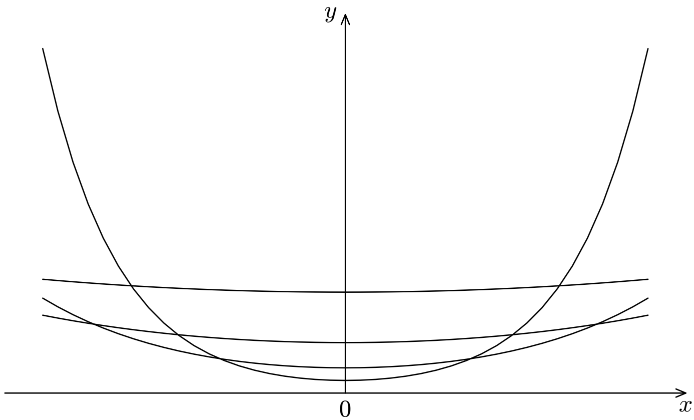
což po dosazení vede k rovnici

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 1}\,,$$

kterou už můžeme řešit separací proměnných s výsledkem

$$y(x) = y_0 \cosh\left(\frac{x}{y_0}\right)\,.$$

Paprsky tedy budou mít stejný tvar jako řetězy uchycené ve dvou bodech a volně visící v homogenním gravitačním poli. Na dalším obrázku jich na ukázku pár nabízíme. Všimněte si především, že žádný z paprsků nikdy neprotne osu $y = 0$, neboť oblasti s nízkým indexem lomu, a tedy vysokou rychlostí světla, je efektivně odpuzují.



Obr. 4. Trajektorie světla pro lineární index lomu

[4] Zkuste si promyslet proč.

Optický moment hybnosti

Jako třešničku na dortu ještě bez odvozování uvedeme, že v případech, kdy index lomu závisí jen na vzdálenosti od počátku $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, existuje zachovávající se veličina analogická momentu hybnosti. Vypočítáme ji jako

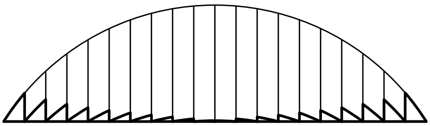
$$L = n(r)\, r \sin\alpha\,,$$

kde α je tentokrát úhel mezi paprskem a průvodičem daného bodu.

Tím jsme završili naše putování geometrickou optikou. Pokud se vám tento díl zdál matematicky až příliš náročný, netruchlete, protože v tom příštím začínáme úplně odznova – poprvé se podíváme do světa vlnové optiky.

Úloha II . S ... *záhada meotaru a rybí oko*

a) Možná jste si všimli, že mezi zdrojem a průhlednou podložkou na fólie je v tradičním meotaru za účelem soustředění světla vložená dost zvláštní čočka, která vypadá spíš jako rýhovaná deska (viz také úloha VI.2 ze XVII. ročníku). Vznikne tak, že standardní ploskovypuklou čočku rozřežáme na soustředné prstence, z každého si necháme jen úplný konec a výsledek opět složíme, takže získáme něco jako „osově symetrické pahorkaté sklo“ (viz obrázek).



Obr. 5. Čočka z meotaru

Takto vzniklá čočka má všude stejný sklon jako původní spojka, a podle Snellova zákona tak očekáváme, že bude stejně dobře soustřeďovat světlo. Naproti tomu, z pohledu Fermatova principu, už každé dráze nepřísluší stejný čas, neboť jsme v různých místech odebrali různě tlusté vrstvy skla – například úplně nejkratší čas teď odpovídá cestě po optické ose. Zdá se tedy, že Fermatův pricnip selhává – podle něj by čočka soustřeďovala jen světlo jdoucí po optické ose a nefungovala tak, jak má. Rozhodněte kdo má pravdu: Snell, Fermat? A proč?

b) Najděte dráhy paprsků ve dvojrozměrné situaci, kdy závislost indexu lomu na vzdálenosti r od počátku je dána funkcí

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + \left(\dfrac{r}{a}\right)^2}\,.$$

c) (Bonus.) Vložíme-li do prostoru s proměnlivým indexem lomu bodový zdroj světla, může se stát, že se velká část paprsků, které z něj vycházejí, sejde v jednom bodě, jako je tomu v případě spojné čočky. Takto vzniklý bod pak nazýváme obrazem bodu původního. Popište geometrické zobrazení $\mathsf{zdroj} \to \mathsf{obraz}$, které tímto způsobem indukuje prostředí s indexem lomu z předchozí úlohy.

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.mff.cuni.cz`
e-mail pro řešení: `fykos-solutions@mff.cuni.cz`
e-mail: `fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.