21. ročník, úloha III . S ... ***bloudění námořníka, pí-obvod a epidemie v Praze*** *(7 bodů; průměr 4,43; řešilo 7 studentů)*

a) *Integrujte metodou Monte Carlo funkci* e^{-x^2} *na intervalu* $[-100, 100]$*. Zkuste také numericky určit hodnotu tohoto integrálu od* $-\infty$ *do* $+\infty$*.*
Návod: Funkce je symetrická vůči počátku, čili ji stačí integrovat na intervalu $[0, +\infty)$*. Proveďte substituci* $x = 1/t - 1$*, čímž změníte meze integrálu od 0 do 1.*

b) *Opilý námořník vstoupil na molo dlouhé 50 kroků a široké 20 kroků. Jde směrem k pevnině. Při každém kroku dopředu však zavrávorá zároveň o krok nalevo nebo napravo. Zjistěte, s jakou pravděpodobností námořník dojde až na břeh a s jakou pravděpodobností spadne do moře a utopí se.*

Námořník měl štěstí a neutopil se. Druhou noc se však opět vydává opilý z lodi na pevninu. Tentokrát však vane stálý vítr o rychlosti $3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*, který způsobí to, že na jednu stranu udělá krok s pravděpodobností 0,8 a na druhou stranu s pravděpodobností 0,2. Zjistěte, s jakou pravděpodobností námořník dojde až na břeh a s jakou pravděpodobností spadne do moře a utopí se.*

Třetí noc se námořník opět vydává opilý na pevninu. Tentokrát však vane proměnlivý vítr. Vane podle normálního rozdělení se střední hodnotou $0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ *a disperzí* $2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*. Zjistěte, s jakou pravděpodobností tentokrát námořník dojde až na břeh a s jakou pravděpodobností spadne do moře a utopí se. Můžete uvažovat, že námořník jde pomalu a setrvačnost větru lze zanedbat. Komu by to vadilo, nechť vymyslí, jak by vítr v po sobě jdoucích krocích koreloval.*

c) *Máme k dispozici 50 rezistorů o odporech 50 Ω a chceme z nich sestavit obvod, jehož celkový odpor v ohmech bude co nejblíže číslu* π*. Pokuste se metodou simulovaného žíhání najít obvod, který by tomuto požadavku vyhovoval co nejlépe.*

Pro určování celkového odporu obvodu si můžete přizpůsobit program, který najdete na našich webových stránkách.

Pokud se na tento úkol necítíte, můžete zkusit zahrnout do problému obchodního cestujícího zakřivení zemského povrchu a pokusit se jej vyřešit pro nějakou konkrétní množinu měst na Zemi (například všechna hlavní města v Evropě, USA atd.).

d) *Zkoumejte vývoj epidemie v Praze, uvažujte 1 milión obyvatel. Intenzita nákazy* β *je* $0{,}4/1\,000\,000$ *za den, uzdravení* γ *je (čtyři dny)*$^{-1}$*. Na počátku je nakaženo 100 lidí. Porovnejte průběh epidemie při očkování předem dvaceti procent lidí s průběhem epidemie při očkování až během epidemie s rychlostí půl procenta denně. A také s průběhem bez očkování. Konec epidemie vyhlásíme, bude-li méně jak 20 lidí nemocných.*

Je spousta údajů, které můžete z počítačové simulace získat. Krom středovaného průběhu epidemie uveďte pro zajímavost též graf, kde ukážete prvních pět náhodných simulací. Dále můžete sledovat fluktuace. Můžete též výsledky porovnat s deterministickým modelem, když neuvažujete náhodnost nakažení. Těžištěm hodnocení bude, kolik různých zajímavých dat dokážete hezky zpracovat.

Zadali autoři seriálu, Lukáš Stříteský a Marek Pechal.

Integrál e^{-x^2}

Úkolem je numericky zintegrovat funkci e^{-x^2} na intervalu $[-100, 100]$. Jelikož x^2 je symetrická funkce vůči počátku, platí

$$\int_{-100}^{100} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{100} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x\,.$$

Čili stačí funkci integrovat na intervalu $[0, 100]$.

Rozmysleme se nyní, na kolik desetinných míst budeme chtít integrál vypočítat. Dejme tomu, že se zblázníme a chceme jej na deset. Podívejme se proto jen pro zajímavost, co vyplivne počítač, zeptáme-li se

```
WriteLn(exp(-100 * 100));
```

Odpověď zní $1{,}1354838653147362 \cdot 10^{-4343}$.

Pro naše numerické počítání tedy můžeme poslední členy zanedbat. Mohli bychom zanedbat ještě i nějaké jiné? Rozhodně již nepotřebujeme členy, které jsou menší než 10^{-12}. Zeptejme se proto jinak

```
For I := 0 to 100 do
If exp(-I * I) < 1E-12 then Break;
WriteLn(I);
```

Výsledek je 6.

Opravdu, již $e^{-6^2} = 2{,}3195228302435694 \cdot 10^{-16}$. Proto nám stačí integrovat pouze na intervalu $[0{,}6]$, abychom mohli počítat na nějakých třináct čtrnáct desetinných míst. Dokonce již e^{-5^2} je číslo, které má napřed deset nul, než začnou nějaké jiné číslice.

Jelikož jste s touto úlohou neměli v principu problémy, vypočteme nyní integrál asi nejjednodušší metodou na počítání určitého integrálu, jaká nás napadne. Určitý integrál funkce na intervalu není nic jiného, než střední hodnota funkce krát délka (obecně míra) intervalu. Takže stačí vypočítat střední hodnotu e^{-x^2} na $[0, 6]$, vynásobit dvanácti a máme výsledek přibližně $\sqrt{\pi}$. Důkaz najdete v textu o statistické fyzice na našich webových stránkách.

Chceme-li počítat střední hodnotu funkce na intervalu metodou Monte-Carlo, můžeme náhodně generovat $x \in [0, 6]$, nasčítávat funkční hodnoty a nakonec sumu vydělit počtem vygenerovaných čísel.

```
For I := 1 to Repetitions do Begin
RandNum := Random * 6;
A := A + exp(-RandNum * RandNum);
End;
A := A * 12 / Repetitions;
```

Chceme-li integrovat funkci e^{-x^2} ještě i mimo interval $[-100, 100]$, tak je jasné, že už téměř nic nenasčítáme. Ovšem pozor, u jiných funkcí to platit nemusí! Dejme tomu, že chceme integrovat funkci $1/x$ na intervalu $[1, \infty]$ a že jsme ji již zintegrovali na intervalu $[1, 10^{10}]$. Víme, že funkční hodnoty se pro velké x blíží nule, a tedy usoudíme, že příspěvek k integrálu na intervalu $[10^{10}, \infty]$ je zanedbatelný. To je však chyba. Onen příspěvek nejen, že není zanedbatelný, ale je dokonce nekonečný, protože

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Proto si musíme při takových zanedbáních být jisti, že funkce ubývá dostatečně rychle. Jak to můžeme ukázat pro námi zkoumanou e^{-x^2}? Jednak

$$e^{-x^2} \le e^{-x}\,,$$

takže

$$\int_{100}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_{100}^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{-100}\,,$$

čímž získáme nějaký horní odhad, který zaručí, že nám funkce neuteče jako ta zlá $1/x$.

Velice krásný způsob, jak funkci e^{-x^2} numericky zintegrovat od nuly do nekonečna je substitucí, která nekonečný integrál převede na konečný. V návodu k úloze jsme nabídli substituci

$$x = \frac{1}{t} - 1\,.$$

Je-li $t = 0$, potom $x = \infty$, a je-li $t = 1$, potom $x = 0$. Navíc

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t^2}\,.$$

Dosadíme-li tuto substituci, dostaneme

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 \mathrm{e}^{-(1/t-1)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-(1/t-1)^2}}{t^2}\right)\mathrm{d}t\,,$$

kde nesmíme zapomenout, že při prohazování mezí integrálu se mění znaménko.

Tímto jsme získali hezkou funkci na krásném (dokonce kompaktním) intervalu $[0, 1]$, kterou můžeme vystavit jakékoli numerické integrační metodě. Když to zkusíme, můžeme se zarazit v jednom místě – blíží-li se $t \to 0$, výraz $1/t^2$ potom diverguje (jeho hodnota se blíží k nekonečnu). Co s tím? Podívejme se, jak nová funkce pod integrálem vlastně pro t jdoucí k nule vypadá. Výraz $1/t^2$ sice diverguje, je však argumentem exponenciály, a celý integrand se tedy blíží k nule.

Opět se tedy zeptejme počítače

```
For I := 0 to 100 do Begin
A := 1 - I/100;
If exp(-(1 / A - 1) * (1 / A - 1)) / (A * A) < 1E-12 then Break;
End;
WriteLn(I);
```

který odpovídá 85.

Opravdu, hodnota funkce v $t = 0{,}15$ je $5{,}036619221322436 \cdot 10^{-13}$. Zanedbáme-li příspěvek na intervalu $[0,\ 0{,}15]$, dopustíme se chyby rozhodně menší než čtrnáctého řádu. Můžeme jásat, převedli jsme nekonečný integrál na konečný a ukázali jsme, že s obrovskou přesností je

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0{,}15}^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{(1/t-1)^2}}{t^2}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Bloudění námořníka

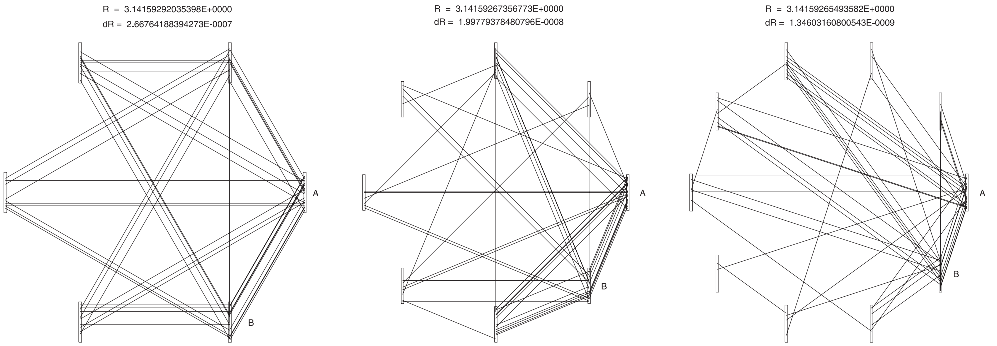
Úloha o opilém námořníkovi se vám jistě líbila. Počítačová simulace bloudění je velice přímočará a jasná. Jediné, co může být obtížné, je zkonstruovat na počítači Gaussovo rozdělení. Jelikož generování náhodných čísel je věc, která se hodně hodí, nebudeme to ukazovat zde, ale pojednáme o tom ve FYKOSím Úvodu do programování, jenž najdete na webu. Chceme se vám také omluvit, že vinou mé časové zaneprázdněnosti neuvádíme kompletní řešení této úlohy.

Lukáš Stříteský
lukas@fykos.mff.cuni.cz

Pí-obvod

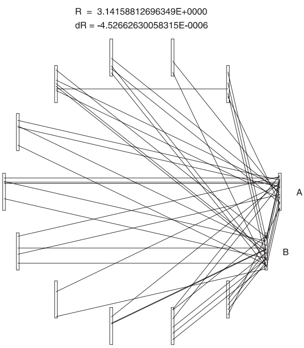
Při řešení této úlohy jsme použili předpřipravenou knihovnu s funkcemi pro výpočet odporu rezistorové sítě, kterou jsme pro vaše pohodlí poskytli ke stažení na webu (čímž jsme možná trochu znevýhodnili ty, kdo nepracují s Pascalem).

Výsledný program `zihani_odporu.pas` si můžete samozřejmě stáhnout také. Celý výpočet začíná náhodným rozmístěním všech padesáti odporů mezi jistý daný počet uzlů. Všimněte si, že se vůbec nestaráme o detaily, jako je například to, zda některé odpory nejsou zapojeny „na volno" (tj. s jedním nebo dokonce oběma konci nepřipojenými k jinému odporu) nebo jestli některý odpor nemá oba vývody zapojeny do stejného uzlu. Takové odpory totiž lze z obvodu s klidem vynechat, což nám zadání nezakazuje. Máme-li k dispozici padesát odporů, neznamená to, že bychom je nutně museli použít všechny. Musíme se však postarat o to, aby použitý obvod měl konečný odpor (tj. aby propojoval oba body, mezi nimiž měříme odpor).



Obr. 1. Příklad tří obvodů získaných simulovaným žíháním

Dále už pokračujeme se samotným žíháním, které provádíme v 500 000 krocích (výhody simulovaného žíhání se plně projeví, pokud algoritmu dáme dostatek času na ustavení rovnováhy). Jako „energii" systému použijeme absolutní hodnotu odchylky odporu v ohmech od π. Tepelné fluktuace realizujeme jednoduše vybráním náhodného odporu ze sady a jeho přepojením mezi náhodně vybrané uzly. Zde se opět nestaráme o to, jestli takto příslušný odpor náhodou zcela neodpojíme od obvodu či nezapojíme oběma vývody do téhož uzlu.



Obr. 2. Obvod získaný pouhým snižováním odchylky od π

Klíčovým bodem celého algoritmu je výběr vhodného průběhu snižování teploty. Ten jsme zvolili lineární, což je jistý kompromis mezi rychlostí a robustností algoritmu (ten podle jistých teoretických studií dosahuje optimální efektivity při logaritmickém snižování teploty, které by však pro naše účely bylo příliš pomalé).

Rychlost snižování teploty a její počáteční hodnotu jsme volili zkusmo metodou pokusu a omylu.

Několik nalezených obvodů pro různé hodnoty maximálního počtu uzlů jsme znázornili na obrázku 1 spolu s hodnotami jejich celkových odporů R. Obdélníky uspořádané do kruhu zde představují jednotlivé uzly, každá čára pak jeden rezistor. Uzly označené A a B jsou ty, mezi nimiž měříme odpor.

Obvod znázorněný na obrázku zcela vpravo je zároveň nejlepší, který se nám podařilo během asi deseti pokusů nalézt. Číselná hodnota jeho odporu se od π liší až na devátém desetinném místě.

Pro srovnání uvádíme ještě jeden „typický“ obvod (viz obrázek 2) nalezený metodou pouhého snižování „energie“. Vidíme, že odchylka číselné hodnoty odporu od π je o tři řády vyšší než v případě nejlepšího obvodu nalezeného pomocí žíhání. Získali jsme tedy poměrně zajímavou ukázku účinnosti simulovaného žíhání ve srovnání s „primitivnějšími“ algoritmy.

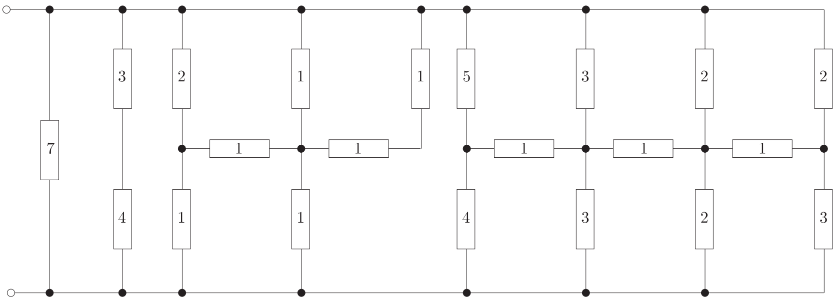
Nejlepší nalezený obvod jsme pro vás znázornili i ve formě klasického schématu na obrázku 3. Čísla uvnitř jednotlivých symbolů rezistorů označují počet paralelně zapojených odporů, které daný symbol reprezentuje (můžete si všimnout, že celkově je použito pouze 49 rezistorů).

Přesná hodnota odporu tohoto obvodu je

$$R = \frac{24615500}{7835357}\,\Omega \doteq 3{,}1415926549\ldots\,\Omega\,.$$

Jeho absolutní odchylka od π je $\Delta R = 1{,}3 \cdot 10^{-9}\,\Omega$ a relativní pak $\delta R = 4{,}3 \cdot 10^{-10}$.

Na závěr ještě poznamenejme, že tato úloha je spíše akademického rázu. Když někdy potřebujeme rezistor o odporu co nejbližším nějaké dané hodnotě, realizujeme jej spíše pomocí odporové dekády či kombinací odporů z poměrně bohaté sady volně prodejných součástek.



Obr. 3. Schéma nejlepšího nalezeného obvodu

Navíc shoda výsledného odporu se zadanou hodnotou s přesností na miliardtiny je naprosto bezvýznamná, pokud nedokážeme se stejnou přesností zajistit i odpory všech použitých rezistorů, což je v praxi takřka nemožné.

Epidemie v Praze

Počítačovou simulaci epidemie v Praze naprogramoval Martin Formánek a zdrojové kódy naleznete na webové stránce seriálu.

Marek Pechal
`marek@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.