

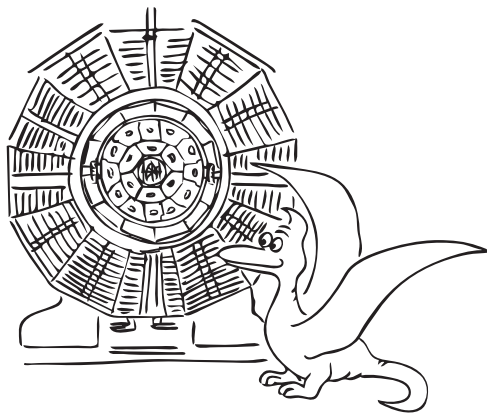
Milí řešitelé!

Dostává se vám do rukou zadání páté série jedenadvacátého ročníku FYKOSu. Ti úspěšnější z vás se mohou těšit také na pozvánku na druhý ročník Týdne s aplikovanou fyzikou (TSAF), který proběhne od 31. března do 4. dubna. V jeho první den pro vás všechny pořádáme tradiční akci – Den s experimentální fyzikou. Podrobnosti najdete níže. Doufáme, že i letos pro vás bude námi připravený program natolik atraktivní, že na obě události budete ještě dlouho v dobrém vzpomínat.

Pomalu se také blíží termín jarního soustředění – proto pilně řešte, abyste se kvalifikovali mezi skupinku třiceti lidí, kteří 4.–11. května stráví báječný týden kdesi na Vysočině. Pokud však chcete považovat svůj boj o postup za předem prohraný, není tomu tak! Na podzimní soustředění pozveme všechny nejlepší řešitele uplynulého ročníku. Proto počítejte příští série, abyste se stali součástí této party.

Závěrem bychom vám rádi popřáli hodně úspěchů při řešení úloh naší speciální Ráma edice. Doufáme, že se vám budou příklady motivované legendární sci-fi líbit a že si s nimi pěkně vyhrajet.

Tomáš Jirotko



Den s experimentální fyzikou

Jako každý rok i letos vás srdečně zveme na tradiční celodenní akci s názvem *Den s experimentální fyzikou* (DSEF), kterou pořádáme přednostně pro řešitele FYKOSu samozřejmě bez ohledu na výsledky v naší soutěži a případně pro jejich přátele a pedagogický doprovod. Dostanete jedinečnou příležitost prohlédnout si nejrůznější zařízení, se kterými fyzikové pracují, seznámit se s aktuální problematikou a nejnovějšími poznatky v experimentální fyzice a také poznat učitele na Matematicko-fyzikální fakultě, kteří jistě rádi zodpoví jakékoliv vaše další dotazy. DSEF se letos uskuteční **v pondělí 31. března 2008** a zároveň bude prvním dnem již téměř tradiční akce TSAF.

Letošní DSEF proběhne dopoledne na MFF UK na Karlově, a to v duchu moderní doby, kterou si již nedokážeme představit bez nukleární magnetické rezonance či Fourierovy transformace. Akce začne úvodní přednáškou dr. Černé, která z loňského Dne připomene jev spinové echo, aby jej následně mohla demonstrovat na aparatuře. Druhý krátký výklad dr. Němce bude pojednávat o Fourierově transformaci a jejím využití pro úžasný optický koherentní procesor, s nímž si pohrajeme při následných exkurzích do optického praktika. Dále se můžete těšit na pikosekundovou laserovou laboratoř aj. Odpoledne zavítáme do Ústavu jaderného výzkumu a

Ústavu jaderné fyziky AV ČR v Řeži u Prahy, kde už pro nás chystají reaktor a nablýskávají nejrůznější urychlovače. Proto sledujte web <http://fykos.mff.cuni.cz/cz/dsef>, kde naleznete podrobnější informace o programu DSEF, o organizaci a způsobu přihlášení se na akci. Dále tam najdete seznam přihlášených účastníků, se kterými si můžete domluvit společnou cestu! Pokud by hrozilo, že byste cestovali sami, můžete v případě volné kapacity přihlásit svého kamaráda se zájmem o fyziku. Rovněž se DSEF bude moci zúčastnit váš pedagogický doprovod.

Přihlášky

K přihlášení prosíme používejte výhradně *webový formulář*, který bude zprovozněn na FYKOSích stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz> pravděpodobně **v termínu 5.–23. března**, a před jeho vyplněním se dobře seznamte s pokyny! Ti, kteří nemají přístup na internet alespoň jednou týdně, mohou poprosit svého kamaráda či učitele, aby vás přihlásil, případně si najít veřejný internet v kavárně, v městské knihovně či na obecním úřadu). Jiné formy přihlášky již neakceptujeme. Všem přihlášeným zašleme v týdnu před akcí podrobné informace a omluvenku do školy, což zároveň poslouží jako potvrzení vaší účasti. Web sledujte průběžně a k řešení jakékoliv situace co nejdříve použijte e-mail dsef@fykos.mff.cuni.cz!

Uzávěrka elektronických přihlášek je **v neděli 23. března 2007**. Neřešitelé FYKOSu – zájemci o fyziku se přihlásí po předchozím souhlasu organizátorů a v případě volných míst. S přihláškami, prosíme, neotálejte, vyjednaná kapacita DSEF, resp. jednotlivých skupin a laboratoří je omezená!

Týden s aplikovanou fyzikou (TSAF)

Vybrané nejlepší řešitele FYKOSu i letos čeká *Týden s aplikovanou fyzikou*, jehož náplní budou poněkud větší exkurze na nejrůznější česká vědecko-výzkumná či průmyslová pracoviště, kde hlavní roli hraje právě fyzika. Po DSEFu, kdy účastníci v Řeži navštíví vybraná zařízení, se také podívají k reaktoru a zejména dostanou jedinečnou příležitost nahlédnout do rozestavěného nového tokamaku Compass-D v Ústavu fyziky plazmatu AV ČR na Slovance (a vzdát hold jeho předchůdci CASTORu). Střeďeční program nás zavede do Turnova na přípravu krystalů (spol. Crytur) a do Vývojových optických dílen i do Muzea Českého ráje. Ve čtvrtek zkontrolujeme zařízení v severočeských elektrárnách a po páteční exkurzi do ŠKODA Plzeň završíme akci návštěvou plzeňského pivovaru!

Pavel Brom

dsef@fykos.mff.cuni.cz



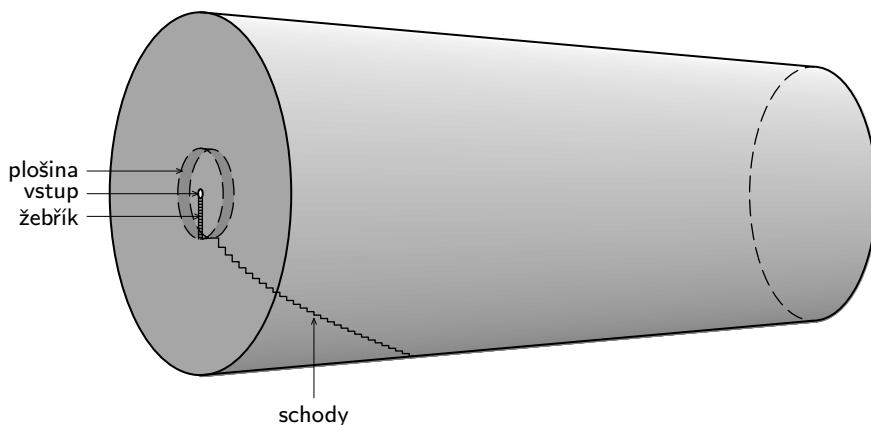
Zadání V. série



Termín odeslání: 14. dubna 2008

V páté sérii opustíme fyziku a vykročíme do světa sci-fi. Vesmír brázdí nemálo kosmických lodí a také Ráma¹. Ráma je obří mezihvězdné plavidlo zkonstruované mimozemskou civilizací, která připlula do sluneční soustavy. Připravíme vás na odvážnou výpravu do jeho nitra a zamyslíme se nad strastmi, které na vás číhají.

Ráma má tvar válce o délce 54 km a vnitřním průměru 16 km. Jeho vnitřek je vyplněn vzduchem. Ráma má dokonce svou vlastní umělou gravitaci, která vzniká tím, že se otáčí kolem své osy jednou za čtyři minuty. Na vnitřním povrchu pláště má vzduch tlak jedné atmosféry.



Obr. 1. Pohled na Rámu

Úloha V.1 ... *pozor, neudus se*

Vstup do Rámy je otvor uprostřed jedné podstavy. Předtím, než vstoupíš a sundáš si skafandr, si však rozmysli, zda je na jeho ose dýchatelný vzduch. Jaká je jeho hustota v porovnání s hustotou na vnitřním povrchu, je-li teplota vzduchu všude stejná?

Úloha V.2 ... *otázka přežití*

Od vchodu vede k vnitřnímu povrchu žebřík. Již jsi po něm sestoupil kilometr, když vtom jsi neopatrně sklouzl a pustil se žebříku. Jakou rychlostí dopadneš na povrch Rámy a za jak dlouho? Máš šanci přežít?

¹⁾ A. C. Clarke: Setkání s Rámou, Návrat Rámy, Zahrady Rámovy, Ráma tajemství zbavený.

Úloha V.3 ... schody z nebe

Žebřík vede jen dva kilometry na plošinu, ze které se dále sestupuje po schodech, jež se mohutným obloukem klenou nad krajinou. Schodiště má zvláštní tvar. Je totiž postavené tak, že se na každý krok vynaloží stejná práce. Odvoď, jak závisí výška schodu na vzdálenosti od osy Rámy, pokud je délka schodů konstantní. Také můžeš určit, jaký tvar má onen oblouk.

Úloha V.4 ... sluneční konzerva

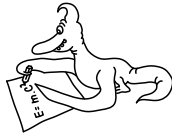
Ráma cestuje mezi hvězdami tak, že polovinu času rovnoměrně zrychluje a polovinu času rovnoměrně zpomaluje. Právě se pohybuje kolem Slunce po parabole s vrcholem na orbitě Země. energii získává ze slunečního záření (žádný reaktor nebo obří baterie jsi na něm neobjevil) a jeho povrch absorbuje 80% dopadající energie. Nasbírání při průletu sluneční soustavou dostatečnou energii, aby se dostal k Siriu, který je vzdálen 12 světelných let, za 24 let?

Úloha V.P ... rámatřesení

Úspěšně ses dostal na povrch Rámy. Z ničeho nic se Ráma několikrát otrásl a zdá se ti, že se změnila rychlost jeho rotace. Tato otázka tě velice tíží. Navrhni proto několik způsobů, jak bys změněnou periodu rotace určil.

Úloha V.E ... životní etapy Ramy

Bude mít Rama jiné fyzikální vlastnosti, poté co ji roztavíte a opět necháte ztuhnout? Doporučujeme měřit hustotu, viskozitu či barvu.



Řešení III. série

Úloha III.1 ... Angličani a Skoti (3 body; průměr 1,62; řešilo 42 studentů)

Předmětem této úlohy je, abyste odhadli, jak by se změnila rychlost rotace Země, kdyby Angličani a Skoti začali jezdit vpravo místo vlevo.

Úlohu zaslechl Aleš Podolník.

Mohlo by se zdát, že to, jestli Angličani a Skoti jezdí vpravo nebo vlevo, rotaci Země vůbec neovlivní. Vždyť pokud předpokládáme, že na každé silnici jezdí auta oběma směry ve stejném počtu, musí se tyto vlivy vypořádat. Podrobnější rozbor však ukazuje opak. Žijeme totiž na velké rotující kouli, nestačí proto sčítat hybnosti aut (celková hybnost je skutečně průměrně nulová, pokud lidé nemigrují), nýbrž momenty hybnosti.

Příčina změny tkví v tom, že mezi protijedoucími auty je jistá vzdálenost, označme ji d . Uvažujme tedy dvě protijedoucí auta o hmotnosti m jedoucí rychlostí o velikosti v v západovýchodním směru. Jejich celkový moment hybnosti ΔL vzhledem k zemské ose je (viz obr. 2)

$$\Delta L = mv(r_1 - r_2) = mvR(\cos(\varphi + \Delta\varphi) - \cos\varphi),$$

kde R je poloměr Země, φ je zeměpisná šířka a pro $\Delta\varphi$ platí d/R . Pro kosinus užijeme součtový vzorec a přibližné vztahy $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, $\cos\Delta\varphi \approx 1$ (platící pro malé $\Delta\varphi$, v našem případě $\Delta\varphi \approx 10^{-6}$)

$$\begin{aligned} \Delta L &= mvR(\cos\varphi \cos\Delta\varphi - \sin\varphi \sin\Delta\varphi - \cos\varphi) \approx mvR(\cos\varphi - \sin\varphi\Delta\varphi - \cos\varphi) = \\ &= -mvR \sin\varphi\Delta\varphi. \end{aligned}$$

Pokud začnou obyvatelé Spojeného království jezdit vpravo (formální záměna $v \rightarrow -v$), změní se moment hybnosti zobrazené dvojice aut o

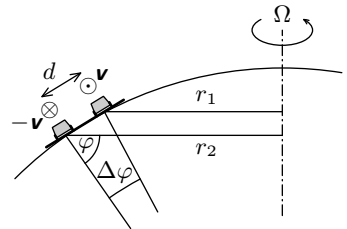
$$-2\Delta L = 2mvR \sin\varphi\Delta\varphi.$$

Změnu momentu hybnosti všech aut pohybujících se v daném okamžiku po silnicích Spojeného království, určíme sečtením odvozeného příspěvku pro všechny dvojice aut. Nechť se v průměru po silnicích pohybuje N aut, v každém směru $N/2$, pak celková změna momentu hybnosti bude

$$\Delta L_{\text{celk}} \sim NmvR \sin\varphi\Delta\varphi.$$

Jistě jste si všimli, že jsme nebrali v úvahu fakt, že ne všechny silnice směřují podél rovnoběžek. Pokud bychom odklon silnice od západovýchodního směru označili α a předpokládali, že silniční síť je dostatečně hustá, a tedy více méně náhodná, museli bychom sčítat přes všechny různé směry α , což by vedlo na nějaký číselný faktor v předchozím vztahu². Ten však zanedbáme, jelikož si ve výsledku neděláme ambice vyšší než na řádový odhad.

²⁾ Konkrétně bychom dostali střední hodnotu $\sin^2 \alpha$ čili 1/2.



Obr. 2. Výpočet momentu hybnosti aut na silnici

Celkový moment hybnosti Země včetně všeho, co se nachází na jejím povrchu, se zachovává (neuvažujeme slapové působení Slunce a Měsíce). Změna momentu hybnosti zeměkoule tedy je $\Delta L_Z = -\Delta L_{\text{celk}}$. Moment hybnosti zeměkoule můžeme vyjádřit pomocí její úhlové rychlosti $L_Z = J\Omega$, kde $J \approx 2MR^2/5$ je moment setrvačnosti, M je hmotnost Země. Tedy $\Delta L_Z = J\Delta\Omega$. Nyní již můžeme vyjádřit změnu úhlové rychlosti rotace Země způsobené novými pravidly silničního provozu

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta L_Z}{J} \sim -\frac{5NmvR \sin\varphi \Delta\varphi}{2MR^2}.$$

Názornější bude znát změnu délky dne $T = 2\pi/\Omega$. Ze vztahu $\Delta T/T = \Delta\Omega/\Omega$ dostáváme

$$\Delta T = \Delta\Omega \frac{T}{\Omega} = \frac{T^2}{2\pi} \Delta\Omega \sim -\frac{5T^2 Nmv \sin\varphi \Delta\varphi}{4\pi MR} \sim -\frac{T^2 Nmv d}{3MR^2}.$$

Zbývá dosadit číselné hodnoty: $T = 1 \text{ den} \sim 9 \cdot 10^4 \text{ s}$, $N \sim 10^7$, $m \sim 10^3 \text{ kg}$, $v \sim 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $R \sim 6 \cdot 10^6 \text{ m}$, $\varphi \sim 50^\circ$, $d \sim 10 \text{ m}$, $M \sim 10^{25} \text{ kg}$ a získáme výsledek

$$\Delta T \sim -10^{-17} \text{ s}.$$

Rychlost rotace Země by se zpomalila řádově o sekundu za jednu miliardu let. Jak se dalo očekávat, směšně malá hodnota, žádným způsobem změřitelná, dá-li se vůbec mluvit o nějaké změně.

Došlá řešení

Malá statistika: mezi řešiteli této úlohy se 16 domnívalo, že se rychlost rotace změní, 21 bylo přesvědčeno, že ne. Jako chybný důvod pro změnu rotace někteří uváděli Coriolisovu sílu, její celkový účinek je však nulový. Jediné *Katka Honzáková* a *Tereza Steinhartová* se pokusily o nějaký odhad a dospěly k hodnotě $\Delta T \sim -10^{-12} \text{ s}$, resp. $\Delta T \sim -10^{-16} \text{ s}$. Ostatní ať už správně či špatně argumentovali, proč ke změně rotace dojde či nedojde.

Lukáš Ledvina napsal, že ke změně rotace dojde, protože by Angličani nebyli na změnu jízdy zvyklí, a tak by se vyskytlo více dopravních nehod a zemřeli by při následném pohřbívání snížili těžiště Velké Británie a tímto by se zrychlila rotace Země. Pokud by však většina Britů byla zpopelněna, potom by se nejspíše celkové těžiště zvýšilo. Nebožtíci by pak způsobili zpomalení rotace.

Lada Peksová správně poznamenala, že jelikož je Velká Británie ostrov, tak nemohou Angličané ani Skoti jezdit jen na západ nebo jen na východ, přesněji řečeno mohou, ale jen krátce, protože jinak by došlo k Cimrmanovu efektu. Nehromadili by se dělníci v dole, ale Skoti na východě a Angličani na západě (vzhledem ke vzájemné nesnášenlivosti by nejspíše byli na opačných stranách).

Ján Bogár byl přesvědčen, že jediný efekt by byl, že by nastal takový chaos, až by veškerá doprava ležela v příkopu. A přiznal, že je ještě jedna možnost. Když by pán Bůh zjistil, že Angličani konečně dostali dost rozumu na to, aby začali jezdit jako normální lidi, možná by nám daroval delší dny.

Ján Bogár nás také potěšil vtípem. Volá Lord na svého sluhu: „Jamesi, co je to za hluk v knihovně?“ „Jsou tam zloději, pane.“ „Ano? A co tam čtou?“

Stejně jako *Zuzana Bogárová*. Víte, proč se Skoti nežení? Protože sukně a dudy mají vlastní.

Hana Šustková glosovala, že kvůli globálnímu oteplení možná nastane změna společenského oděvu. Budeme nosit kilt, po vzoru Skotů.

A Veronika Paštyková se zamýšlela nad tím, co Angličany a Skoty vedlo k tomu, že začali jezdit vpravo.

Bylo parné léto, v celé Anglii bylo sucho jako na Sahaře a Malcolm McDonald konečně úspěšně dokončil první ročník studia na Oxfordu. A protože Londýna měl už plné zuby, sbalil dudy, pár drobků, co ještě měl, stopnul nákladák a vyrazil domů do Skotska.

Hlavní trasa z Oxfordu byla úplně přeplněná automobily, motocykly a dalšími téměř neidentifikovatelnými vozidly, a tak cesta ubíhala pomalu. Drobné praskliny na vozovce k rychlosti cesty nijak nepřispěly, a tak když asi po necelé půlhodině plynulé jízdy uvízli zase v dopravní zácpě a vypadalo to, že zde stráví mládí, Malcolm vystoupil z auta a šel se projít. To však neměl dělat!

Při vystupování z auta se stala naprosto děsivá událost. Malcolmovi vypadl z kapsy čtvrták a zakutálel se do jedné z drobných prasklin ve vozovce. A Malcolm nebyl jediný, kdo si toho všiml. Hordy Skotů se hrnuly k prasklině, aby jmění v ní ukryté bylo jejich.

Tak se stalo, že z malé praskliny vznikly praskliny gigantických rozměrů, i Grand Canyon je proti nim směšná jamka. Ovšem náhoda způsobila, že praskliny vznikly pouze po jedné straně obou šestiproudých silnic, jichž Angličané využívají jako hlavních tahů při letních vedrech, kdy cestují za trochou chladna do Skotska.

A protože v té době většina lidí cestuje stejným směrem jako Malcolm a praskliny byly po celé levé straně vozovky, usnesla se vláda Spojeného království, že se bude jezdit vpravo.

Skotové však pokračovali v hledání čtvrtáku. Nejhluběji se dostali tři skotští kopáči, a jeden opravdu nezměrně toužící po pokladu neskonale hodnoty se zastavil teprve, když se mu krumpáč začal tavit v zemském jádře. A každý si dokáže domyslet, co může takový krumpáč v zemském jádře provést. Rotace Země byla tímto ukvapeným činem narušena a od té doby se Země točí kolem své osy mnohem pomaleji.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III.2 ... výtah až do nebe (4 body; průměr 1,86; řešilo 28 studentů)

Určete, jaké fyzikální vlastnosti musí mít materiál závěsného lana výtahu, který spojuje povrch Země a oběžnou geostacionární dráhu. Je vůbec takový materiál na Zemi dostupný?

Nad efektivním dopravníkem do kosmu se zasníl Aleš Podolník.

Nejdříve se zamyslíme nad hlavní myšlenkou vesmírného výtahu. Pro určitou výšku nad zemským povrchem platí, že těleso v ní obíhající po kruhové dráze bude mít oběžnou dobu rovnou jednomu dni (geosynchronní oběžná dráha). Tedy jeho úhlová rychlost bude stejná jako úhlová rychlost otáčení Země ω . Výšku této dráhy spočteme z rovnosti odstředivé a gravitační síly.

$$m\omega^2 R = G \frac{mM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}, \quad (1)$$

kde G je gravitační konstanta a M hmotnost Země. Číselně je $R = 35\,800$ km nad povrchem Země. Je-li navíc tato oběžná dráha v rovině rovníku, nazývá se geostacionární a obíhající satelit se na ní vůči povrchu Země nepohybuje. Je proto lákavé spojit toto místo s odpovídajícím místem na rovníku. Pravděpodobně prvním, kdo o tom uvažoval, byl Konstantin Ciolkovskij, myšlenku potom zpopularizoval A. C. Clarke v románu Rajské fontány.

Bohužel 35 800 km lana nestačí, takto krátké by spadlo na zem, protože se jeho těžiště nachází pod geostacionární dráhou. Musí se proto uvažovat buď s lanem delším, nebo s vynešením dodatečného závaží na vyšší oběžnou dráhu, které bude lano napínat. My dále budeme uvažovat první možnost.

Další věc je, jak lano bude vypadat. Ve skutečnosti nepůjde o výtah v pravém slova smyslu, protože kabina nebude lanem vytažovaná, nýbrž po něm bude šplhat vzhůru vlastními silami. Z různých dalších důvodů (např. minimalizování pravděpodobnosti srážky s vesmírným smetím) se ukazuje jako nejlepší tvar dlouhá tenká stuha³⁾. Dále se však ukáže, že např. napětí v laně nezávisí na jeho průřezu.

Jaká je podmínka pro to, aby lano vlastními silami vydrželo na geostacionární oběžné dráze? Stejně jako pro bodový satelit musí platit, že výsledná síla v neinerciální soustavě spojené s lanem musí být nulová. Tedy odstředivá síla způsobená otáčením Země musí vyrovnat gravitační sílu. Vypočítejme tedy délku H lana, pro kterou to platí. Na element lana dm působí gravitační a odstředivá síla

$$dF = dF_o - dF_g = dmr\omega^2 - G \frac{dmM}{r^2}. \quad (2)$$

Víme, že $dm = \sigma dr$, kde σ je délková hustota lana. Celkovou působící sílu získáme integrováním vztahu (2) přes celou délku lana (od povrchu Země do hledané výšky H). Jak jsme dříve zmínili, tato síla musí být nulová. V integrálu jsou elementární funkce, takže jej nebude problém vypočítat.

$$\int_{R_Z}^H \left(G \frac{\sigma M}{r^2} - \sigma \omega^2 r \right) dr = 0, \\ G\sigma M \left(-\frac{1}{H} + \frac{1}{R_Z} \right) - \frac{\sigma \omega^2}{2} (H^2 - R_Z^2) = 0. \quad (3)$$

Podělíme-li rovnici členem $\sigma \omega^2/2$, u levé závorky dostaneme $2R^3$ (výšku geostacionární oběžné dráhy, jak jsme vypočítali v (1)). Rozepsáním závorek poté vyjde kubická rovnice

$$H^3 R_Z - H (R_Z^3 + 2R^3) + 2R^3 R_Z = 0, \quad (4)$$

jejíž jeden kořen se dá uhadnout ($H = R_Z$; v laně nulové délky se kupodivu odstředivá a gravitační síla vyrovnají) a zbylé dva dostaneme řešením kvadratické rovnice. Uvažujeme pouze ten s kladnou odmocninou z diskriminantu, protože ten druhý vyjde záporně.

$$H = \frac{1}{2} \left(\sqrt{R_Z^2 + \frac{8R^3}{R_Z}} - R_Z \right). \quad (5)$$

Dosadíme-li již dříve vypočítané veličiny a konstanty, vyjde $H \approx 150 \cdot 10^3$ km, což je skoro polovina vzdálenosti k Měsíci, ale tím se zatěžovat nebudeme.

Teď přejdeme k hlavní části úlohy. Musíme vypočítat průběh normálového napětí v laně v závislosti na výšce (počítané od středu Země). K výsledku se dostaneme podobně jako v předchozím případě. Síla napínající lano bude celková síla působící na spodní část lana.

$$F(h) = \int_{R_Z}^h (dF_o - dF_g).$$

³⁾ Viz například <http://www.spaceelevator.com/>.

Pomocí vztahu uvedeného v (2) zapíšeme konkrétní síly a integrujeme stejně jako při počítání délky lana.

$$F(h) = G\sigma M \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{h} \right) - \frac{\sigma\omega^2}{2}(h^2 - R_Z^2). \quad (6)$$

Musíme najít extrém této funkce, tedy položíme první derivaci podle h rovnou nule,

$$-\frac{GM\sigma}{h^2} + h\sigma\omega^2 = 0.$$

Je to opět kubická rovnice, jejíž jeden kořen uhadneme – derivace $F(h)$ je nulová pro $h = R$. Zbylé dva kořeny jsou imaginární a nezajímají nás. Průběh napínající síly je znázorněn na obrázku 3.

Velikost maximální napínající síly tedy bude (dosazení $h = R$ do $F(h)$)

$$F_{\max} = \sigma GM \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R} \right) - \frac{\sigma\omega^2}{2}(R^2 - R_Z^2).$$

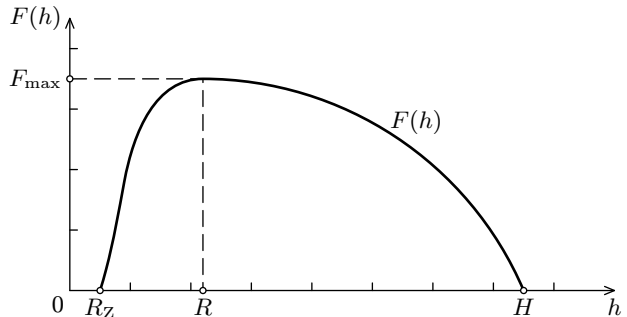
Využijeme-li souvislosti délkové hustoty σ s objemovou hustotou ϱ ($\sigma = \varrho S$, kde S je průřez lana), dostáváme

$$\begin{aligned} \sigma_n = \frac{F_{\max}}{S} &= \frac{\sigma}{S} \left| GM \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R} \right) - \frac{\sigma\omega^2}{2}(R^2 - R_Z^2) \right| = \\ &= \varrho \left| GM \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R} \right) - \frac{\sigma\omega^2}{2}(R^2 - R_Z^2) \right|. \end{aligned}$$

Napětí opravdu nezávisí na průřezu lana a po vyčíslení je $\sigma_n = \varrho \cdot 4,84 \cdot 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

Nyní se dostáváme k jednomu menšímu problému. Zanedbali jsme totiž, že se lano vlastní tíhou natahuje, a tudíž se mění jeho hustota v závislosti na délce. (A to opačně než působící síla. Tam, kde bude $F(h)$ největší, bude hustota nejmenší a naopak.) Ale pokud bude mít materiál dostatečně velký modul pružnosti v tahu, protáhne se jen minimálně a zanedbání bude oprávněné. V integrálech pro výpočet působících sil bychom museli tuto závislost zohlednit a to by nebylo jednoduché. Spokojíme se s tím, že maximální dovolené normálové napětí v laně je přímo úměrné hustotě materiálu a konstanta úměrnosti je asi $5 \cdot 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

Jaké materiály tuto podmínku splňují? Snadno ověříme (a řada řešitelů to i provedla), že žádná běžná látka by neobstála. Jedinou světlou nadějí je lano z uhlíkových nanotrubeček, jehož hustota je asi $1350 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, a tedy $\sigma_n = 65 \text{ GPa}$. Jejich teoretická mez pevnosti je asi dvakrát větší, tudíž nám to dává naději do budoucna (zatím dokážeme vyrábět pouze krátké trubičky, lano z nich stále čeká na vynálezece).



Obr. 3. Graf závislosti síly na výšce

Další vlastnosti materiálu jako tepelná roztažnost, odolnost vůči povětrnostním vlivům a další se projeví jenom na malém úseku lana (v atmosféře), a tak jejich silové účinky můžeme

zanedbat. Problémem by mohla být pouze skutečnost, že se vzdáleností od Země klesá elektrický potenciál a takovéto lano by bylo jedním velkým hromosvodem. Základna výtahu by tak měla být někde, kde se moc neblýská, a lano ošetřeno, aby mu zásah bleskem moc neuškodil. Nicméně jakákoliv ochrana proti bleskům by byla potřeba jen v nízkých výškách, a tak se hmotnost lana příliš nezvětší.

Jak a jestli vůbec takovouto konstrukci postavit, necháme na rozmyšlení čtenáři a dál pak strýčku Samovi.

Ve vašich řešeních se vyskytly dva problémy. Buď jste neprovedli téměř žádné výpočty a úvahy pak neměli čím podložit, nebo jste zapomněli na to, že lano musí něco napínat, a sílu počítali rovnou na geostacionární dráze.

Aleš Podolník

ales@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III.3 ... hopsání po nakloněné rovině (4 body; průměr 2,17; řešilo 29 studentů)

Malou kuličku hodíme vodorovně na nakloněnou rovinu. Kulička po ní začne poskakovat a po N odrazech dopadne kolmo k povrchu nakloněné roviny (viz obr. 4). Jaký je úhel α nakloněné roviny? Předpokládejte, že se kulička odráží dokonale pružně, rotaci kuličky neuvažujte.

S kuličkami si rád hraje Pavel Motloch.

Pohyb kuličky lze rozložit do dvou směrů – kolmého na rovinu a rovnoběžného s rovinou. Ve shodě s tímto pojmenováním budeme nadále používat indexy k a r . Kulička se odráží dokonale pružně a tedy odraz nijak nezmění hodnotu v_r a v případě v_k pouze změní znaménko. Ve směru kolmém pohyb mezi dvěma odrazy popisuje rovnice

$$v_k = v \sin \alpha - g \cos \alpha t.$$

Nyní spočteme periodu skoku, tedy časový interval mezi dvěma dopady (tj. dvojnásobkem doby, pro které platí $v_k = 0$).

$$t_s = \frac{2v}{g} \operatorname{tg} \alpha.$$

Pohyb ve směru rovnoběžném popisuje rovnice

$$v_r = v \cos \alpha - g \sin \alpha t.$$

Kulička dopadne na rovinu kolmo, pokud bude v okamžiku dopadu rovnoběžná složka rychlosti nulová. To nastane právě v čase

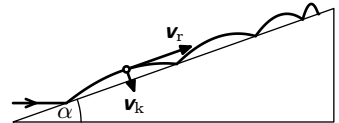
$$t_N = \frac{v}{g} \operatorname{cotg} \alpha.$$

Abyste situace nastala v okamžiku N -tého odrazu, musí platit $t_N = N t_s$, odkud s použitím předchozích rovností získáme

$$\frac{v}{g} \operatorname{cotg} \alpha = \frac{2Nv}{g} \operatorname{tg} \alpha,$$

z čehož pro hledaný sklon roviny máme

$$\alpha = \operatorname{arccotg} \sqrt{2N}.$$



Obr. 4. Příklad trajektorie kuličky pro $N = 4$

To je hledaný sklon nakloněné roviny, při kterém na ni kulička dopadne kolmo, ale až poté, co se od ní předtím $(N - 1)$ -krát odrazí.

Jan Jelínek

jjan@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III.4 ... částice na poli (4 body; průměr 2,31; řešilo 26 studentů)

Mějme elektrostatické pole neměnné v čase. Do toho pole vkládáme na stejné místo nabitou částici s nulovou počáteční rychlostí. Pečlivě sledujeme, jak se částice pohybuje, a zaznamenáváme si její trajektorii. A co nás překvapí – trajektorie částice nezávisí na její hmotnosti. Dokážete to vysvětlit? *Na problém narazil Marek Scholz při programování zápočtáku.*

Uvedeme si dva různé způsoby řešení problému. Zkoumáme pohyb hmotné nabitě částice v elektrostatickém poli. Všechny ostatní síly kromě elektrostatické zanedbáme. Toto pole je v čase neměnné, ale bod od bodu se může měnit, tedy každému bodu uvažovaného prostoru je přiřazen nějaký vektor elektrické intenzity \mathbf{E} , který charakterizuje pole.

Zobecněme zadání a uvažujme, že zkoumané částice mají kromě různé hmotnosti i různý náboj. Síla působící na nabitou částici v elektrostatickém poli je rovna výrazu $q\mathbf{E}$, kde q je velikost náboje částice. Každému bodu prostoru lze rovněž přiřadit elektrostatický potenciál φ . Vektor intenzity \mathbf{E} přímo souvisí s potenciálem vztahem

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi,$$

tedy intenzita míří směrem největšího spádu potenciálu a její velikost závisí na prudkosti tohoto spádu. Potenciální energie⁴ částice v poli pak bude rovna $V = q\varphi$, přičemž V má význam práce potřebné k přenesení částice z „nekonečna“ do konkrétního bodu. Když se částice pohybuje pouze pod vlivem našeho pole, bude přírůstek její kinetické energie přesně roven úbytku potenciální energie. Mějme dvě rozdílné částice s náboji q, q' a hmotnostmi m, m' . Pokud částice startují z klidu ze stejného místa, jsou jejich kinetické energie T, T' v určitém bodě rovny úbytku potenciální energie, tedy

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta\varphi, \quad T' = \frac{1}{2}m'v'^2 = q'\Delta\varphi, \quad (7)$$

kde $\Delta\varphi$ značí úbytek potenciálu mezi startovním a aktuálním bodem. Lze tudíž psát

$$mv^2 = 2q\Delta\varphi, \quad m'v'^2 = 2q'\Delta\varphi, \quad (8)$$

což se nám bude hodit dále.

Trajektorie částice je obecně zakřivená a každou malou část dráhy lze považovat za část kružnice, která má určitý poloměr. Tento poloměr se nazývá poloměr křivosti trajektorie v daném bodě. Směr rychlosti vždy míří ve směru tečny k trajektorii. Předpokládejme nyní, že dvě rozdílné částice nábojů q, q' a hmotností m, m' jsou v určité fázi pohybu na stejném místě a mají stejný směr rychlosti (nikoli velikost). Jejich kinetické energie jsou dány rovnicemi (7).

Pole působící v tomto místě lze rozložit na složku E_{\perp} kolmou k rychlosti a složku rovnoběžnou E_{\parallel} . Poloměr křivosti v tomto bodě označme R . Aby se částice pohybovala po kružnici s poloměrem R , musí na ni působit dostředivé zrychlení $a_d = v^2/R$. Toto dostředivé zrychlení

⁴⁾ Energii nebudeme značit E , ale V , aby se nepletla s elektrickou intenzitou.

způsobuje síla působící ve směru do středu kružnice, tedy ve směru kolmém na pohyb. Pro zmíněnou sílu ale zřejmě platí

$$F_{\perp} = qE_{\perp} = ma_d = \frac{mv^2}{R}. \quad (9)$$

Vyjádríme R a posléze dosadíme z (8) a máme

$$R = \frac{mv^2}{qE_{\perp}} = \frac{2q\Delta\varphi}{qE_{\perp}} = \frac{2\Delta\varphi}{E_{\perp}}.$$

Sláva! Poloměr křivosti dráhy nezávisí na hmotnosti částice ani na jejím náboji a poslední vztah vyjde naprosto stejně i pro jinou částici s hmotností m' a nábojem q' . Pokud tedy naše dvě porovnávané částice mají v určitém místě kinetickou energii danou vztahem (7) a stejný směr rychlosti, pak mají v tomto místě i shodný poloměr křivosti trajektorie.

Ježto ale mají trajektorie stejný poloměr křivosti v jednom bodě, a letí tudíž jakoby po stejné kružnici, blízký bod na této kružnici bude prvkem obou trajektorií a v onom blízkém bodě budou mít obě částice opět stejný směr rychlosti a kinetické energie určené vztahem (7). Předěšlou úvahu mohu opakovat až donekonečna a navíc na počátku, kdy jsou částice v klidu, mají částice opravdu shodný směr rychlosti a shodnou nulovou kinetickou energii. Z toho vyplývá, že trajektorie obou rozdílných částic mají ve všech bodech stejný poloměr křivosti, a jsou proto opravdu shodné. Použili jsme v podstatě metodu matematické indukce, přičemž indukční krok zmenšujeme donekonečna.

Povšimněme si, že v provedené „indukční“ úvaze nemusíme nutně uvažovat, že kinetické energie jsou určeny vztahem (7). Stačí, když jsou v poměru $T/T' = q/q'$. To je obecnější předpoklad. Dospějeme tak k závěru, že trajektorie dvou rozdílných částic se shodují, pokud má jejich počáteční rychlost stejný směr a počáteční kinetické energie jsou v poměru $T/T' = (mv^2)/(m'v'^2) = q/q'$. Vyjádříme-li z této rovnosti rychlost \mathbf{v} , dostáváme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' \sqrt{\frac{m'}{m} \cdot \frac{q}{q'}}. \quad (10)$$

Opět z provedené úvahy plyne, že poměr T/T' bude stejný pro všechny body trajektorie stejně tak jako poměr rychlostí. Shrnuto, částice letí po stejných trajektoriích různými rychlostmi, jejichž poměr je dán rovnicí (10).

Naší „indukční“ úvahy jsme se mohli však ušetřit. Uvažujme takto: jednu částici necháme pohybovat se v poli. Její trajektorie má v každém bodě určitý poloměr křivosti, tedy v každém bodě působila síla zapřičiňující toto zakřivení. Dejme tomu, že by se druhá částice pohybovala po stejné trajektorii. Byly by síly působící na částici opět takové, že by poloměr křivosti v každém bodě odpovídal působící síle? Na základě vztahu (9) odpovíme ano. Myšlené trajektorii tedy jakoby nelze nic vytknout, odpovídá všem působícím silám, a bude to tedy ta skutečně realizovaná.

Někteří z vás argumentovali tím, že částice letí po siločarách. Povězme si, proč tomu tak v obecném případě není. Siločára je křivka, jejíž tečna v každém bodě je rovnoběžná se směrem intenzity \mathbf{E} . Pokud ale částice letí po zakřivené siločáře, musí na ni působit určitá dostředivá síla kolmá na rychlost, a tedy i kolmá na tečnu k siločáře. Taková kolmá síla tu ale není, protože elektrická síla míří ve směru tečny.

Prozkoumejme nyní trochu odlišný, docela elegantní způsob řešení. Částice se samozřejmě bude řídit pohybovou rovnicí

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Zrychlení \mathbf{a} a síla \mathbf{F} jsou zde vektory. Takový vektorový zápis není nic objeveného, uvedená rovnice pouze skrývá tři rovnice – pro každou ze složek x , y , z zrychlení a síly jednu rovnici. Zrychlení \mathbf{a} však můžeme lépe zapsat jako

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad (11)$$

tedy jako druhou derivaci polohového vektoru částice⁵. Pohybová rovnice částice v našem elektrostatickém poli proto je

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Intenzita pole závisí samozřejmě na poloze, tedy zrychlení částice v určitém bodě závisí na intenzitě v tomto konkrétním bodě.

Zamysleme se nyní nad tím, jak se pohybová rovnice změní, pokud budeme čas měřit v jinak dlouhých jednotkách, než jsou vteřiny, nebo jednoduše na hodinkách, které běží třeba pomaleji. Nové časové jednotce budeme říkat třeba pseudovteřina se značkou σ . Dejme tomu, že počet časových jednotek τ zaznamenaný na našich zpomalených hodinkách souvisí s časem t měřeným v sekundách vztahem

$$t = k\tau, \quad \text{tedy} \quad \tau = \frac{t}{k}. \quad (13)$$

Jak se projeví použití těchto nových jednotek při měření zrychlení? Když měříme rychlost pomocí pomaleji běžících hodin, bude číselně větší, konkrétně k -krát větší, protože ke změně polohy stačilo méně časových jednotek. Zrychlení měříme porovnáním rychlostí v blízkých okamžicích a opět při měření času v pseudovteřinách bude ke změně rychlosti třeba méně časových jednotek a zrychlení vyjde číselně k -krát větší. Ale již rychlost vyšla k -krát větší a z této větší rychlosti teprve počítáme zrychlení a dostáváme tak převodní vztah mezi číselnými hodnotami zrychlení při použití různých časových jednotek

$$a[\text{m}\cdot\text{s}^{-2}] = k^2 a[\text{m}\cdot\sigma^{-2}].$$

Tento vztah dobře vyplyne i formálním dosazením z (13) do (11)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{d(k\tau)^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2}. \quad (14)$$

Jedná se zde však o derivace a ne o pouhé zlomky a tak by se nám uvedená úprava měla určitě zdát trochu podezřelá, nicméně v tomto případě je korektní.⁶

Teď pomocí vztahu (14) přepíšeme pohybovou rovnici (12), tedy

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = k^2 \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

⁵) Časová změna polohy je rychlost a časová změna rychlosti je zrychlení.

⁶) Napsal jsem krátkou stať o druhé derivaci složené funkce, koho to zajímá, na požádání zašlu.

Všimněme si ale nyní klíčové myšlenky. Pokud zavedeme zrovna takové pseudovteřiny a budeme mít takové hodinky, že faktor $k = \sqrt{m/q}$, potom lze pohybovou rovnici psát ve tvaru

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (15)$$

a zde se již nevyskytuje náboj ani hmotnost!

Vezměme si teď druhou částici s nábojem q' a hmotností m' , jejíž polohu budeme značit polohovým vektorem \mathbf{r}' . Její pohybová rovnice je

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{q'}{m'} \mathbf{E}(\mathbf{r}').$$

I tuto rovnici ale můžeme napsat jinak, když budeme čas měřit namísto v sekundách v jiných jednotkách σ' a vztah mezi časy t a τ' bude dán faktorem $k' = \sqrt{m'/q'}$.⁷ Vztah mezi τ a τ' je potom zřejmě

$$\tau = K\tau', \quad \text{kde} \quad K = \sqrt{\frac{m'}{q'} \cdot \frac{q}{m}}. \quad (16)$$

Pohybová rovnice při užití jiných časových jednotek σ' nabývá tvaru

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{d\tau'^2} = \mathbf{E}(\mathbf{r}')$$

a pohybové rovnice obou částic mají teď úplně stejný tvar! Pohybová rovnice (15), což je diferenciální rovnice druhého řádu, určuje spolu s počáteční polohou a rychlostí závislost polohy \mathbf{r} na čase τ .

Pokud ale $\mathbf{r}(\tau = 0) = \mathbf{r}'(\tau' = 0)$ a rychlosti

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}(\tau = 0) = \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau'}(\tau' = 0),$$

což je při stejné počáteční poloze a nulové počáteční rychlosti splněno, pak pohyb první i druhé částice jsou určeny naprosto stejnými rovnicemi jen s tím rozdílem, že používáme pro čas jiné písmenko, a proto i řešení, tedy funkce $\mathbf{r}(\tau)$, resp. $\mathbf{r}'(\tau')$ budou v obou případech naprosto shodná až na to, že jednou budeme v řešení psát τ a podruhé τ' . Množiny bodů, kterými částice projdou, tedy jejich trajektorie budou v obou případech shodné.

Částice budou pouze dráhu procházet rozdílnou rychlostí. Ve všech bodech trajektorie bude platit

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau'}$$

a díky vztahu (16) platí

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = K \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau'},$$

takže podíl rychlostí (které již měříme ve stejných jednotkách) čárkované a nečárkované částice je K .

⁷⁾ Zde už jsou nové časové jednotky σ' samozřejmě jiné než pseudovteřiny σ v předešlém výkladu.

Všimněme si ještě, že podmínka na shodnost trajektorií

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}(\tau = 0) = \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau'}(\tau' = 0) = K \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau}(\tau = 0)$$

je splněna, pokud jsou rychlosti v poměru K , tedy počáteční rychlost nemusí být nutně nulová. Když mají obě částice stejný náboj, potom podle (16) $K = \sqrt{m'/m}$. Počáteční kinetická energie T (vyjádřená ovšem ne v joulech, ale v pseudojoulech, protože jinak měříme čas) první částice je pak

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2}m' \left(K \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2}m' \left(\frac{d\mathbf{r}'}{d\tau} \right)^2,$$

a kinetické energie obou částic se tedy rovnají po celou dobu pohybu a rovnost počátečních kinetických energií je zřejmě podmínkou pro shodnost trajektorií. Patrně jsme tedy dospěli k naprosto stejným závěrům jako při prvním způsobu řešení.

Možná se vám zdá, že to není pořádný důkaz, když jsme jenom derivovali, a fyzika v podstatě žádná. Je třeba si ale uvědomit, že 2. Newtonův zákon formulovaný v diferenciálním tvaru je zcela fundamentální zákon klasické fyziky a podle vši zkušenosti řešení pohybové rovnice jakožto rovnice diferenciální opravdu odpovídá skutečně realizovanému pohybu. Věříme, že diferenciální rovnice správně popisují náš svět, a proto i zde určitý fyzikální jev vysvětlujeme na základě matematické úpravy diferenciální rovnice.

Některí z vás uvažovali kromě elektrické i gravitační sílu. Trajektorie různých částic v tom případě již shodné nebudou. Oba uvedené důkazy podle očekávání selžou. Rozmyslete si proč.

Mezi vašimi řešeními se vyskytly i jinak pojaté důkazy než uvedené. Například *Michal Maizner* uvažoval, že pole lze rozdělit na velmi malé oblasti, přičemž v rámci oblasti je všude v podstatě stejná intenzita \mathbf{E} , *Tereza Steinhartová* zmínila užitečnost principu nejmenší akce a *Hana Šírová* měla zase moc pěkně zpracovaný druhý z uvedených způsobů řešení.

Marek Scholz

mara@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. P ... příliv a odliv (3 body; průměr 2,77; řešilo 30 studentů)

Příliv a odliv jsou způsobeny slapovými silami, tj. především gravitační silou Měsíce. Příliv se opakuje každých 12 hodin a 25 minut, nicméně na zeměkouli pozorujeme vždy dva přílivy na opačných stranách zeměkoule. Tzn. jeden příliv oběhne Zemí za dvojnásobek doby, tj. asi 25 hodin. Tudíž na rovníku o délce 40 000 km se příliv musí pohybovat přibližně rychlostí $40\,000/25 \text{ km/h} = 1\,600 \text{ km/h}$. To je dokonce více než rychlost zvuku ve vzduchu.

Ze zkušenosti však víme, že voda v moři touto rychlostí neproudí, neboť lodě nám vozí banány z Kostariky atd. Je tedy nějaká chyba ve výpočtu, nebo je potřeba výsledek interpretovat jinak?

Úlohu navrhl Honza Hradil.

Uvedený paradox by nastával, kdyby se kolem Země pohybovala určitá masa vody, zatímco zbytek by zůstával nehybný. Tomu tak však není. Žádná z molekul vody necestuje každý den kolem zeměkoule, ale zůstává přibližně na stejném místě a kmitá hlavně ve svislém směru.

Představme si vodorovný řetězek kuliček, z nichž každá kmitá ve svislé rovině. Vhodnou volbou fázi jejich kmitání můžeme vytvořit iluzi vlny rychle se pohybující ve vodorovném směru, i když kuličky se vůbec nepřemisťují. Řešitelé z Trenčína to přirovnali k mexické vlně na stadionu.

Všímavý čtenář si uvědomí, že analogie popsaná v předchozím odstavci plně neodpovídá našemu případu. Vzhledem k tomu, že vodu můžeme považovat za nestlačitelnou, nemůže pohyb molekul probíhat jen ve vertikálním směru. Vzniklou mezeru můžeme ale zaplnit pomalým pohybem většího množství vody (oproti výšce přílivu řádově v metrech průměrná hloubka oceánu je 3 až 4 kilometry).

Ve skutečnosti je pohyb vody v oceánech ovlivňován mořskými proudy, nestejnou hloubkou a slaností. K problémům popsaným v zadání může docházet například u velké zátoky spojené úzkým průlivem. Při přílivu zde vznikne takový proud, že lodě skutečně nemohou ze zátoky odplout.

Jirka Lipovský

jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. E ... zkoumáme pohyb Slunce (8 bodů; průměr 2,88; řešilo 16 studentů)

Změřte co nejpřesněji výšku Slunce nad obzorem v pravé poledne a dobu od východu středu slunečního disku do jeho západu. Odvážlivci se mohou pokusit vypočítat teoretickou délku dne a hodnoty srovnat a okomentovat případný nesoulad.

Experimentální úlohu navrhl Pavel Brom.

Experimentální úloha se zabývá zdánlivým pohybem Slunce po obloze. Zkusme se nejprve zamyslet, jak by se teoreticky mělo Slunce pohybovat, a pak vypočítat časy jeho východu a západu. Budeme k tomu potřebovat zadefinovat několik základních astronomických pojmů.

Teorie

Ekvatoreální souřadnice jsou polární souřadný systém na nebeské sféře (podobně jako zeměpisná šířka a délka na zemském povrchu) tvořený souřadnicemi rektascenze α a deklinace δ . Množina bodů s nulovou deklinací tvoří tzv. nebeský rovník, což je v podstatě průmět zemského rovníku na nekonečně vzdálenou nebeskou sféru se středem v centru Země. Rektascenzi měříme podél nebeského rovníku proti směru otáčení Země od tzv. jarního bodu. Udáváme ji buď ve stupních, nebo v hodinách a minutách od 0 do 24 hodin. Deklinace je úhlová vzdálenost bodu na nebeské sféře od nebeského rovníku, měřená směrem k severnímu světovému pólu kladně a na jih záporně.

Ekliptika je velká kružnice na nebeské sféře tvořená množinou bodů do kterých se může v průběhu roku zdánlivě promítat Slunce v důsledku oběhu Země kolem Slunce. Jarní bod je jeden z průsečíků ekliptiky a nebeského rovníku. Slunce se promítá do jarního bodu každý rok na pravé poledne světového času v den jarní rovnodennosti. Podobně jako ekvatoreální souřadnice můžeme zavést i *ekliptikální souřadnice*: ekliptikální šířku a délku λ . Sklon roviny světového rovníku k rovině ekliptiky budeme značit ε .

Místní hvězdný čas t_s je v podstatě rektascenze bodu daného průsečíkem průmětu místního poledníku na nebeskou sféru a nebeského rovníku měřená v hodinách a minutách. Můžeme jej vypočítat jako

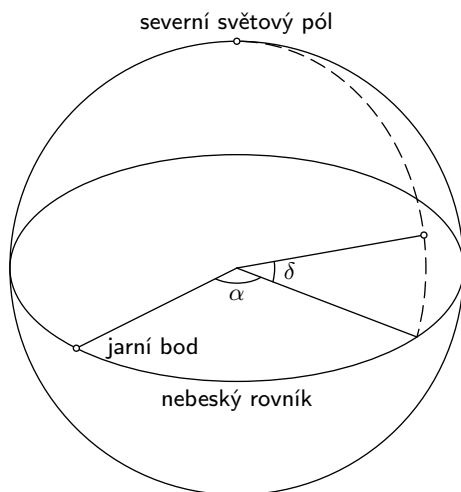
$$t_s = \left(24 \cdot \frac{\text{čas uplynulý od 12:00 UT poslední jarní rovnodennosti}}{\text{doba otočení Země}} + \frac{\text{zeměpisná délka}}{15^\circ} \right) \text{ hodin.}$$

Rozdíl rektascenze nějakého bodu na nebeské sféře a místního hvězdného času

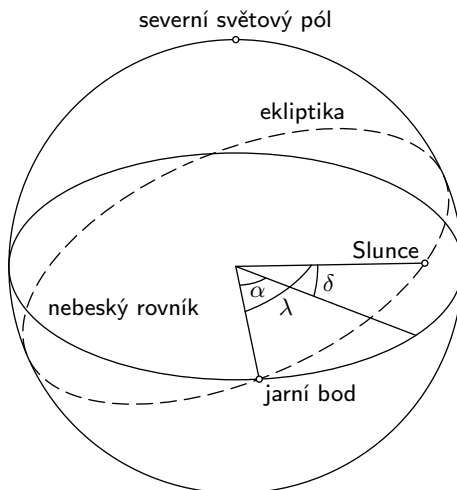
$$\vartheta = t_s - \alpha$$

se nazývá *hodinový úhel* toho bodu.

Nakonec *azimutální souřadnice* jsou také polární souřadnice na nebeské sféře, které jsou však vztaheny na konkrétního pozorovatele, resp. pozorovací stanoviště. Azimut A se určuje podobně jako v zeměpisu, avšak směru s azimutem $A = 0^\circ$ odpovídá směr na jih (oproti zeměpisnému směru na sever). Druhou souřadnicí je pak výška nad místním matematickým horizontem h (horizont je přesně vodorovným směrem).



Obr. 5. Ekvatorální souřadnice



Obr. 6. Ekliptikální souřadnice

Na zdánlivý pohyb Slunce po obloze mají vliv především rotace Země kolem své osy jednou za 23 hodin 56 minut a 4,09 vteřiny a oběh Země kolem Slunce jednou za rok (365,2524 stř. slunečního dne).

Za jedno otočení Země kolem své osy se Země zároveň posune asi o $1/365$ své cesty po oběžné dráze stejným směrem, jako se sama točí, takže na obloze Slunce uteče přibližně o 1° . Země se proto musí mezi dvěma východy Slunce (anebo dvěma přechody místním poledníkem na pravé poledne) otočit asi o 361° a *sluneční den* tak trvá právě 24 hodin.

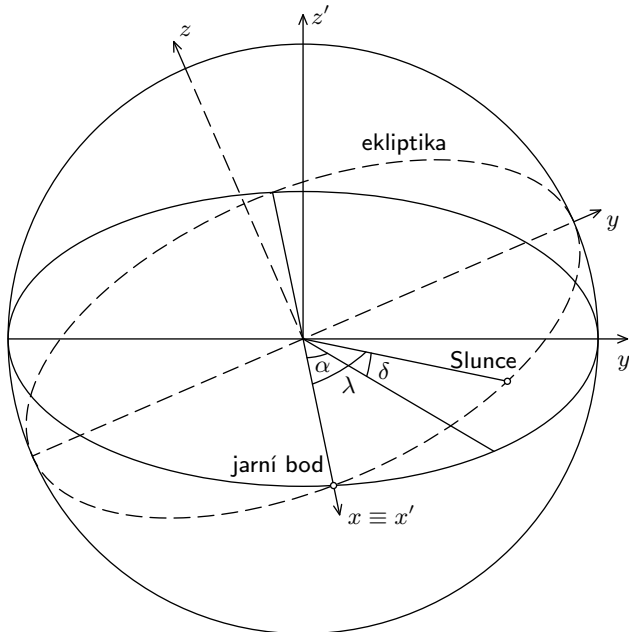
Země obíhá kolem Slunce po elipse s těžištěm soustavy v jejím ohnisku. Rychlost oběhu se v průběhu roku mění – čím blíže ke Slunci, tím rychlejší je oběh. Průměrnou úhlovou rychlost oběhu vypočítáme snadno jako $\omega = 360^\circ/\text{rok}$.

A dále můžeme vypočítat jakýsi přibližný směr ke Slunci, neboli jakousi jeho střední polohu na ekliptice (ekliptikální délku středního Slunce), ze vztahu

$$\lambda_s = \omega T_r + \lambda_0,$$

kde T_r je čas od posledního průchodu Země periheliem a λ_0 jeho ekliptikální délka v tomto čase (Země v periheliu 3. ledna řekněme o půlnoci, $\lambda_0 = 281,92^\circ$). Díky nerovnoměrnému oběhu Země kolem Slunce skutečné Slunce na obloze střední Slunce někdy předbíhá a někdy za ním zaostává.

To má mimo jiné za následek také skutečnost, že pravé poledne nenastává přesně ve 12:00 místního středního slunečního času (pásmový čas s korekcí na zeměpisnou délku oproti poledníku, na kterém je pásmový čas počítaný). Rozdíl pravého slunečního času a středního slunečního času udává tzv. časová rovnice. Maximální časový rozdíl průchodu středního a skutečného Slunce rovinou místního poledníku je kolem 18 minut – to je také maximální chyba vhodně postavených slunečních hodin⁸.



Obr. 7. Pravá (E) a střední (M) anomálie

Střední a skutečné Slunce se setkávají v den jarní rovnodennosti o 12:00 UT ($\lambda = 0^\circ$). Vztah mezi ekliptikální délkou středního Slunce a skutečnou ekliptikální délkou λ je dán *Keplerovou rovnicí*

$$M = E - e \sin E,$$

kde $M = \lambda_s - \lambda_0 - \pi$ je tzv. střední anomálie, $E = \lambda - \lambda_0 - \pi$ tzv. pravá anomálie a e je excentricita zemské dráhy. Střední a pravá anomálie jsou směry od Slunce k tzv. střední Zemi (pohybující se rychlostí ω po kruhové dráze kolem Slunce) a skutečné Zemi.

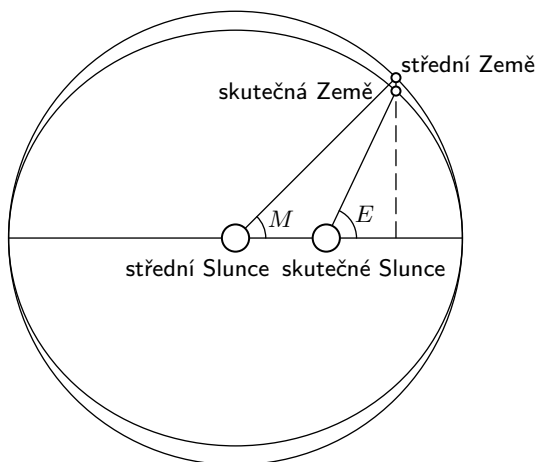
Zajímavou vlastností této rovnice je, že ji nelze vyřešit analyticky. I přesto však existuje mnoho způsobů, jak najít E s dostatečnou přesností. Můžeme použít třeba iterativní metodu

$$E_0 = 0, \quad E_{i+1} = M + e \sin E_i.$$

Pro $i = 10$ už dává táto metoda docela přesné výsledky (i přitom můžeme libovolně zvyšovat, dokud $E_{i-1} - E_i$ není menší než maximální požadovaná chyba).

⁸⁾ Z dob, kdy si mechanické hodiny mohli dovolit pouze bohatí profesori a chudí studenti byli odkázáni na sluneční hodiny na náměstí, pochází také společensky zavedená maximální doba čekání na schůzku známá též jako akademická čtvrtrodinka.

S pomocí výše uvedených vztahů můžeme v každém okamžiku vypočítat souřadnice Slunce na nebeské sféře. Známe ekliptikální délku λ a ekliptikální šířka je vždy nulová. Zbytek výpočtu je už pouze o transformaci souřadnic z jedné souřadné soustavy do druhé. Nejdříve provedeme transformaci z ekliptikálních do ekvatoreálních souřadnic, pak spočítáme místní hvězdný čas a hodinový úhel a nakonec dostaneme vztahy pro azimut a výšku Slunce pro místního pozorovatele. Známe-li, v jaké úhlové výšce h_o se nachází místní fyzický obzor v bodě, ve kterém Slunce vychází, resp. zapadá, můžeme z těchto vztahů zpětně vyjádřit časy východu a západu Slunce. Veličinu h_o už samozřejmě určíme měřením. Tím se vyhneme také všem zbytečným komplikacím se zakřivením Země, nadmořskou výškou atp., které někteří z vás v řešení uvažovali. A můžeme také měřit třeba východ Slunce nad střechu sousedova domu o deváté ráno místo skutečného času.



Obr. 8. Konverze z ekvatoreálních do ekliptických souřadnic přes kartézské

Podrobně předvedeme pouze prvou transformaci souřadnic. Zbylé se provádějí zcela analogicky. Chceme transformovat úhly λ a 0° udávající směr na jiné dva úhly α a δ . Všimneme si, že soustava ekvatoreálních souřadnic je oproti ekliptikálním souřadnicím pouze otočená o úhel ε kolem přímky dané spojnicí jarního a podzimního bodu (druhý průsečík rovníku a ekliptiky).

Ze směrů nejprve uděláme vektory v kartézském souřadném systému. Přidáme třetí souřadnici r a pro jednoduchost ji položíme rovnou 1. Vektor zadaný trojicí r , λ a ekliptikální šířkou v sobě obsahuje směr ke Slunci. Pak polární souřadnice převedeme na pravoúhlé kartézské. Osa z bude směřovat od pozorovatele k severnímu pólu ekliptiky, z -ová složka vektoru tedy bude $r \sin 0 = 0$. Položíme-li osu x od pozorovatele směrem k jarnímu bodu a osu y kolmo na předchozí dvě, bude transformace zbylých souřadnic snadná: $x = \cos \lambda$ a $y = \sin \lambda$. Otočíme teď vektor daný kartézskými souřadnicemi x , y a z v rovině (y, z) o úhel ε

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= y \cos(-\varepsilon) - z \sin(-\varepsilon), \\z' &= y \sin(-\varepsilon) + z \cos(-\varepsilon).\end{aligned}$$

Zbývá už jen převést vektor $[x', y', z']$ zpátky do polárních souřadnic

$$\alpha = \arctg \frac{y'}{x'},$$

$$\delta = \arctg \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

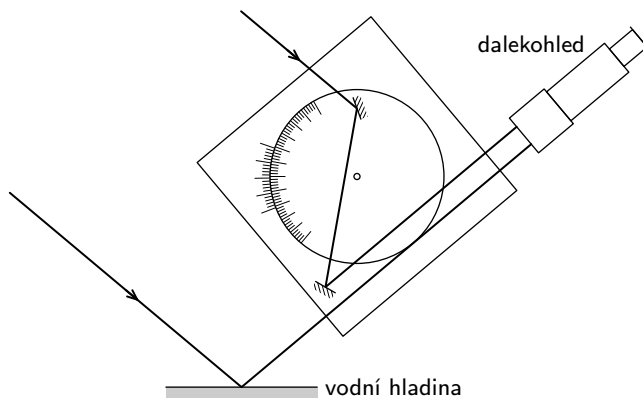
Při konverzi z ekvatoreálních do azimutálních souřadnic budeme potřebovat znát hodinový úhel ϑ a zeměpisnou šířku φ pozorovacího stanoviště. Rovina nebeského rovníku je oproti rovině horizontu skloněná o $90^\circ - \varphi$ (anebo pro pozorovatele na některém zeměpisném pólu splývá rovina rovníku s horizontem). Otáčet budeme tentokrát kolem osy směřující od západního k východnímu bodu o zmíněný úhel. Osa otáčení bude totožná s jednou z kartézských souřadnic. Zbylé dvě budou směřovat nejprve k světovému pólu a směrem s hodinovým úhlem 12 hodin v rovině rovníku a po otočení do zenitu a směrem k jižnímu bodu.

Po provedení výše zmíněných operací dostaneme následující vztah pro výšku Slunce nad obzorem

$$h = \arctg \frac{\cos \vartheta \sin(\varphi - 90^\circ) + \sin \delta \cos(\varphi - 90^\circ)}{\sqrt{\sin^2 \vartheta + (\cos \vartheta \cos(\varphi - 90^\circ) - \sin \delta \sin(\varphi - 90^\circ))^2}}.$$

Postup měření

S tímto teoretickým podkladem můžeme přejít k samotnému měření. Na měření výšky Slunce nad obzorem jsme ze dvou disků CD, jednoho obalu na CD, pár kapek vteřinového lepidla a malého binokuláru zhotovili jednoduchý přístroj známý už několik století všem námořníkům pod jménem *sextant*⁹.



Obr. 9. Měření výšky Slunce pomocí sextantu

Naše verze přístroje byla o něco jednodušší. Ve vektorovém grafickém editoru jsme si nakreslili vlastní stupnici s poněkud realističtějším rozlišením, namísto polopropustného zrcátka jsme použili pouze „zrcátko“ (vystřížená z druhého CD) s poloviční šířkou a obě zrcátka byla přidělaná přímo k otočnému CD se stupnicí, resp. k obalu. Nejtěžší část byla nastavit zrcátka

⁹⁾ Podrobný návod, jak takové zařízení postavit, najdete např. na adrese <http://www.tecepe.com.br/nav/CDSextantProject.htm>.

přesně paralelně tak, aby při výchylce stupnice 0° byl pohled dalekohledem umístěným vedle obalu rozdělený na dvě vzájemně neposunuté půlky (odraz v zrcátku a přímý pohled). Pohled do dalekohledu (s objektivovým slunečním filtrem samozřejmě) při správné výchylce na sextantu vypadal tak, že půlka Slunce byla vidět v zrcátku a druhá neposunutá půlka přímo.

Normální použití sextantu počítá s využitím viditelné mořské hladiny. Moře v Praze bohužel není, takže jsme museli improvizovat. Vyrobili jsme si klidnou vodní hladinu a pak jsme měřili úhlovou vzdálenost Slunce od jeho odrazu na ní. Výška nad obzorem byla polovina tohoto úhlu. Výchylku jsme mohli pak odečíst na stupnici s vernierem, kterou jsme si vytiskli na dobré laserové tiskárně s přesností kolem $3'$. Skutečnou chybu měření odhadujeme asi na třetinu šířky slunečního disku, tj. asi na $10'$. Použití vodní hladiny jako reference vodorovného směru se příliš nehodilo pro měření výšky při východu, resp. západu Slunce. V těchto případech jsme proto měřili výšku Slunce přímo nad rovným horizontem.



Obr. 10. Konstrukce sextantu ze dvou CD

Výsledky měření

Dne 8. 2. 2008 jsme z Kolejí 17. listopadu ($50^\circ 7'$ s.z.š., $14^\circ 26'$ v.z.d.) pozorovali východ Slunce nad místní horizont v 7:32 místního pásmového času a západ Slunce v 16:59. Pozorovaná délka dne tedy byla 9 h 27 m. Časy východu a západu Slunce vypočtené výše uvedeným postupem byly 7:26, resp. 17:07. Rozdíl teoretické a pozorované délky dne byl tudíž asi 14 minut, hlavně díky nerovnému horizontu. V čase, kdy jsme pozorovali východ Slunce, se už mělo nacházet ve výšce $h_o \doteq 0,9^\circ$. To nám dává první odhad na výšku východního horizontu.

Tento odhad pro tak malou výšku je však zkreslený. Chybu má na svědomí jev nazývaný atmosférická refrakce. Vypočtené hodnoty totiž nebraly v úvahu zemskou atmosféru. Světlo nebeských těles při své cestě k pozorovateli prochází vrstvou atmosféry s nenulovým a proměnným indexem lomu. Vrstva atmosféry je pro malé h velice tlustá, proto je i refrakce v této oblasti největší. Refrakci můžeme vypočítat např. pomocí tohoto přibližného empirického vzorce (dává výsledek v úhlových vteřinách)

$$R = \frac{1,02}{\operatorname{tg}\left(h + \frac{10,3}{h+5,11}\right)} \cdot \frac{P}{1010 \text{ hPa}} \cdot \frac{283}{273 + T},$$

kde P je tlak, T teplota a h vypočtená výška nad obzorem. Objekt pak pozorujeme ve výšce o hodnotu R větší než vypočtená. V následující tabulce je orientačně uvedena hodnota refrakce pro různé pozorované h při normálních podmínkách.

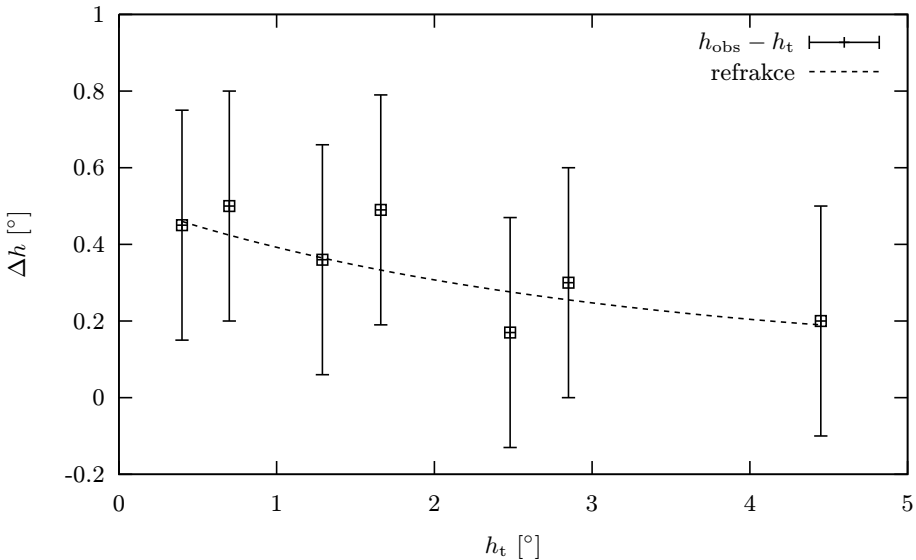
h [°]	0	0,5	1	2	3	5	10	20	30	50
R [']	35	29	24	18	14	10	5	2,5	1,5	0,5

Průměr Slunce je asi 32'. Jelikož velikost refrakce v nulové výšce nad obzorem je větší než tato hodnota, můžeme na velmi rovném horizontu pozorovat východ celého Slunce nad horizont dříve, než je jednoduše předpovězený čas. Sluneční den by takto měl trvat o pár minut déle. Jak je však vidět z pozorování, je tato odchylka prakticky zanedbatelná vůči ostatním vlivům.

Dne 15. 2. jsme ze stejného pozorovacího stanoviště provedli následující sérii měření výšky Slunce nad místním horizontem.

t	7:17	7:20	7:24	7:26	7:32	7:35	7:40	7:46
h [°]	0	0,25	1	1,5	2	2,5	3	3,7

Použijeme-li první odhad výšky horizontu na určení skutečné výšky nad obzorem ($h_{\text{obs}} = h + h_o$) a porovnáme pozorovanou a vypočtenou výšku, najdeme závislost vynesenu v grafu 11.



Obr. 11. Porovnání rozdílu pozorované a vypočtené výšky Slunce s refrakcí

Jelikož pozorované rozdíly jsou příliš malé v porovnání s chybou, nedají se z těchto pozorování vyvodit jednoznačné závěry. Avšak posloupnost hodnot dává tušit pokles rozdílu teoretické a pozorované výšky Slunce, který odpovídá průběhu refrakce.

Měření výšky Slunce kolem poledne počasí v době psaní tohoto textu příliš neprálo. Čas, kdy výška Slunce dosahuje maxima, teoreticky spočítáme tak, že výšku $h(t)$ derivujeme podle času a položíme rovnou nule. Výšku Slunce nad obzorem ale můžeme jednodušeji určit podle přibližného vzorce

$$h_{\text{max}} = 90^\circ - \varphi + \delta, \quad (17)$$

kde δ je deklinace Slunce v daný den a φ zeměpisná šířka.

Uskutečnili jsme pouze jedno krátké měření dne 9. 2. 2008 ve 12:20. Vypočtený čas kulminace pro dané datum byl $t_{\max} = 12:13$ SEČ. Naměřená výška $h = 25^\circ 20' \pm 10'$ byla ve výborné shodě s vypočtenou $h_t = 25^\circ 23'$. Refrakce ve výškách kolem 30° je už hluboko pod chybou měření a výška Slunce se kolem poledne mění velice pomalu, takže na těch pár minutách také nesešlo.

Poznámky k došlým řešením

Závěrem ještě pár slov k došlým řešením. Co se teoretické části týče, jen málo z vás se zamyslelo nad tím, jak to s pohybem Slunce po obloze vlastně je. Světlou výjimkou byla např. *Zuzana Dočekalová*. *Tereza Jeřábková* a *Veronika Paštyková* se pokusily navrhnout jednodušší metodu na výpočet délky dne. To lze učinit, pokud budeme pokládat deklinaci Slunce v průběhu dne za konstantní a zastavíme Zemi na její dráze v jednom bodě. Odchylka oproti přesnému výpočtu by byla při správném provedení docela malá. Celkem zdařilá řešení došla také od *Karla Koláře* či *Petra Vanyu*.

Mnoho řešitelů spoléhalo na udávané časy východu či západu Slunce z předpovědi počasí. Často však bez toho, aby si uvědomili, jak tento čas opravit na geografickou polohu svého stanoviště. Vzhledem k tomu, že tyto časy jsou v ČR nejčastěji udávané pro polohu Prahy, mohou se místní časy lišit až o téměř 20 minut (na stejné zeměpisné šířce vyjde Slunce o 4 minuty dřív na každý stupeň délky směrem na východ). Už jednoduché použití vzorce (17) pro výpočet maximální úhlové výšky Slunce bylo hodnoceno 2 body. Naopak neuvedení základních údajů, jako jsou poloha pozorovacího stanoviště, či dokonce ani datum pozorování, se odrazilo na bodovém počtu negativně.

V praktické části této úlohy řešitelé také projevili až překvapivě málo fantazie. Téměř výlučně používané metody na měření výšky Slunce byly měření délky stínu anebo ukazovátka přidělané na úhloměru. I při nejlepší vůli není přesnost všech popsanych pokusů lepší než asi jeden až dva stupně¹⁰. To je ovšem na většinu praktických aplikací žalostně málo.

Asi nejjednodušší možné měření by bylo měření částmi ruky. Když člověk natáhne ruku před sebe a roztáhne prsty, tak vzdálenost od konce palce po konec malíčku je $20\text{--}23^\circ$. Šířka sevřené pěsti je asi 10° a šířka palce přibližně 2° . Změřit úhlovou vzdálenost Slunce od obzoru touto metodou by možná bylo v některých případech přesnější (než došlé výsledky).

Peter Greškovič

grepe@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. S ... bloudění námořníka, pí-obvod a epidemie v Praze (7 bodů; průměr 4,43; řešilo 7 studentů)

a) Integrujte metodou Monte Carlo funkci e^{-x^2} na intervalu $[-100, 100]$. Zkuste také numericky určit hodnotu tohoto integrálu od $-\infty$ do $+\infty$.

Návod: Funkce je symetrická vůči počátku, čili ji stačí integrovat na intervalu $[0, +\infty)$.

Provedte substituci $x = 1/t - 1$, čímž změníte meze integrálu od 0 do 1.

b) Opilý námořník vstoupil na molo dlouhé 50 kroků a široké 20 kroků. Jde směrem k pevnině.

Při každém kroku dopředu však zavravorá zároveň o krok nalevo nebo napravo. Zjistěte,

¹⁰⁾ S tím také souvisí jedna často opakovaná nepřesnost – když je chyba 2° , neudáváme výsledek na tři desetinná místa!

s jakou pravděpodobností námořník dojde až na břeh a s jakou pravděpodobností spadne do moře a utopí se.

Námořník měl štěstí a neutopil se. Druhou noc se však opět vydává opilý z lodi na pevninu. Tentokrát však vane stálý vítr o rychlosti $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, který způsobí to, že na jednu stranu udělá krok s pravděpodobností 0,8 a na druhou stranu s pravděpodobností 0,2. Zjistěte, s jakou pravděpodobností námořník dojde až na břeh a s jakou pravděpodobností spadne do moře a utopí se.

Třetí noc se námořník opět vydává opilý na pevninu. Tentokrát však vane proměnlivý vítr. Vane podle normálního rozdělení se střední hodnotou $0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a disperzí $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Zjistěte, s jakou pravděpodobností tentokrát námořník dojde až na břeh a s jakou pravděpodobností spadne do moře a utopí se. Můžete uvažovat, že námořník jde pomalu a setrvačnost větru lze zanedbat. Komu by to vadilo, nechť vymyslí, jak by vítr v po sobě jdoucích krocích koreloval.

- c) Máme k dispozici 50 rezistorů o odporech 50Ω a chceme z nich sestavit obvod, jehož celkový odpor v ohmech bude co nejbližší číslu π . Pokuste se metodou simulovaného žíhání najít obvod, který by tomuto požadavku vyhovoval co nejlépe.

Pro určování celkového odporu obvodu si můžete přizpůsobit program, který najdete na našich webových stránkách.

Pokud se na tento úkol necítíte, můžete zkusit zahrnout do problému obchodního cestujícího zakřivení zemského povrchu a pokusit se jej vyřešit pro nějakou konkrétní množinu měst na Zemi (například všechna hlavní města v Evropě, USA atd.).

- d) Zkoumejte vývoj epidemie v Praze, uvažujte 1 milión obyvatel. Intenzita nákazy β je $0,4/1\,000\,000$ za den, uzdravení γ je (čtyři dny) $^{-1}$. Na počátku je nakaženo 100 lidí. Porovnejte průběh epidemie při očkování předem dvaceti procent lidí s průběhem epidemie při očkování až během epidemie s rychlostí půl procenta denně. A také s průběhem bez očkování. Konec epidemie vyhlásíme, bude-li méně jak 20 lidí nemocných.

Je spousta údajů, které můžete z počítačové simulace získat. Krom středovaného průběhu epidemie uveďte pro zajímavost též graf, kde ukážete prvních pět náhodných simulací. Dále můžete sledovat fluktuace. Můžete též výsledky porovnat s deterministickým modelem, když neuvažujete náhodnost nakažení. Těžištěm hodnocení bude, kolik různých zajímavých dat dokážete hezky zpracovat.

Zadali autoři seriálu, Lukáš Stržiteský a Marek Pechal.

Integrál e^{-x^2}

Úkolem je numericky zintegrovat funkci e^{-x^2} na intervalu $[-100, 100]$. Jelikož x^2 je symetrická funkce vůči počátku, platí

$$\int_{-100}^{100} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{100} e^{-x^2} dx.$$

Čili stačí funkci integrovat na intervalu $[0, 100]$.

Rozmysleme se nyní, na kolik desetinných míst budeme chtít integrál vypočítat. Dejme tomu, že se zblázníme a chceme jej na deset. Podívejme se proto jen pro zajímavost, co vyplivne počítač, zeptáme-li se

```
WriteLn(exp(-100 * 100));
```

Odpověď zní $1,1354838653147362 \cdot 10^{-4343}$.

Pro naše numerické počítání tedy můžeme poslední členy zanedbat. Mohli bychom zanedbat ještě i nějaké jiné? Rozhodně již nepotřebujeme členy, které jsou menší než 10^{-12} . Zeptejme se proto jinak

```
For I := 0 to 100 do
If exp(-I * I) < 1E-12 then Break;
WriteLn(I);
Výsledek je 6.
```

Opravdu, již $e^{-6^2} = 2,3195228302435694 \cdot 10^{-16}$. Proto nám stačí integrovat pouze na intervalu $[0,6]$, abychom mohli počítat na nějakých třináct čtrnáct desetinných míst. Dokonce již e^{-5^2} je číslo, které má napřed deset nul, než začnou nějaké jiné číslice.

Jelikož jste s touto úlohou neměli v principu problémy, vypočteme nyní integrál asi nejjednodušší metodou na počítání určitého integrálu, jaká nás napadne. Určitý integrál funkce na intervalu není nic jiného, než střední hodnota funkce krát délka (obecně míra) intervalu. Takže stačí vypočítat střední hodnotu e^{-x^2} na $[0,6]$, vynásobit dvanácti a máme výsledek přibližně $\sqrt{\pi}$. Důkaz najdete v textu o statistické fyzice na našich webových stránkách.

Chceme-li počítat střední hodnotu funkce na intervalu metodou Monte-Carlo, můžeme náhodně generovat $x \in [0,6]$, nasčítávat funkční hodnoty a nakonec sumu vydělit počtem vygenerovaných čísel.

```
For I := 1 to Repetitions do Begin
RandNum := Random * 6;
A := A + exp(-RandNum * RandNum);
End;
A := A * 12 / Repetitions;
```

Chceme-li integrovat funkci e^{-x^2} ještě i mimo interval $[-100, 100]$, tak je jasné, že už téměř nic nenasčítáme. Ovšem pozor, u jiných funkcí to platit nemusí! Dejme tomu, že chceme integrovat funkci $1/x$ na intervalu $[1, \infty)$ a že jsme ji již zintegrovali na intervalu $[1, 10^{10}]$. Víme, že funkční hodnoty se pro velké x blíží nule, a tedy usoudíme, že příspěvek k integrálu na intervalu $[10^{10}, \infty)$ je zanedbatelný. To je však chyba. Onen příspěvek nejen, že není zanedbatelný, ale je dokonce nekonečný, protože

$$\int_a^\infty \frac{1}{x} dx = \infty, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Proto si musíme při takových zanedbáních být jisti, že funkce ubývá dostatečně rychle. Jak to můžeme ukázat pro naši zkoumanou e^{-x^2} ? Jednak

$$e^{-x^2} \leq e^{-x},$$

takže

$$\int_{100}^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_{100}^\infty e^{-x} dx = e^{-100},$$

čímž získáme nějaký horní odhad, který zaručí, že nám funkce neutěče jako ta zlá $1/x$.

Velice krásný způsob, jak funkci e^{-x^2} numericky zintegrovat od nuly do nekonečna je substitucí, která nekonečný integrál převede na konečný. V návodu k úloze jsme nabídli substituci

$$x = \frac{1}{t} - 1.$$

Je-li $t = 0$, potom $x = \infty$, a je-li $t = 1$, potom $x = 0$. Navíc

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}.$$

Dosadíme-li tuto substituci, dostaneme

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_1^0 e^{-(1/t-1)^2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^1 \left(\frac{e^{-(1/t-1)^2}}{t^2}\right) dt,$$

kde nesmíme zapomenout, že při prohazování mezí integrálu se mění znaménko.

Tímto jsme získali hezkou funkci na krásném (dokonce kompaktním) intervalu $[0, 1]$, kterou můžeme vystavit jakékoli numerické integrační metodě. Když to zkusíme, můžeme se zarazit v jednom místě – blíží-li se $t \rightarrow 0$, výraz $1/t^2$ potom diverguje (jeho hodnota se blíží k nekonečnu). Co s tím? Podívejme se, jak nová funkce pod integrálem vlastně pro t jdoucí k nule vypadá. Výraz $1/t^2$ sice diverguje, je však argumentem exponenciály, a celý integrand se tedy blíží k nule.

Opět se tedy zeptejme počítače

```
For I := 0 to 100 do Begin
```

```
A := 1 - I/100;
```

```
If exp(-(1 / A - 1) * (1 / A - 1)) / (A * A) < 1E-12 then Break;
```

```
End;
```

```
WriteLn(I);
```

který odpovídá 85.

Opravdu, hodnota funkce v $t = 0,15$ je $5,036619221322436 \cdot 10^{-13}$. Zanedbáme-li příspěvek na intervalu $[0, 0,15]$, dopustíme se chyby rozhodně menší než čtrnáctého řádu. Můžeme jásat, převedli jsme nekonečný integrál na konečný a ukázali jsme, že s obrovskou přesností je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_{0,15}^1 \left(\frac{e^{(1/t-1)^2}}{t^2}\right) dt.$$

Bloudění námořníka

Úloha o opilém námořníkovi se vám jistě líbila. Počítačová simulace bloudění je velice přímočará a jasná. Jediné, co může být obtížné, je zkonstruovat na počítači Gaussovo rozdělení. Jelikož generování náhodných čísel je věc, která se hodně hodí, nebudeme to ukazovat zde, ale pojednáme o tom ve FYKOSím Úvodu do programování, jenž najdete na webu. Chceme se vám také omluvit, že vinou mé časové zaneprázdněnosti neuvádíme kompletní řešení této úlohy.

Lukáš Strítěský

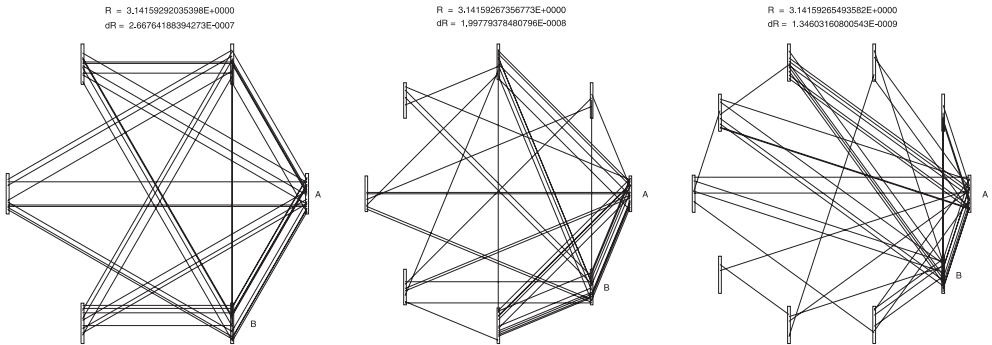
lukas@fykos.mff.cuni.cz

Pí-obvod

Při řešení této úlohy jsme použili předpřipravenou knihovnu s funkcemi pro výpočet odporu rezistorové sítě, kterou jsme pro vaše pohodlí poskytli ke stažení na webu (čímž jsme možná trochu znevýhodnili ty, kdo nepracují s Pascallem).

Výsledný program `zihani_odporu.pas` si můžete samozřejmě stáhnout také. Celý výpočet začíná náhodným rozmístěním všech padesáti odporů mezi jistý daný počet uzlů. Všimněte

si, že se vůbec nestaráme o detaily, jako je například to, zda některé odpory nejsou zapojeny „na volno“ (tj. s jedním nebo dokonce oběma konci nepřipojenými k jinému odporu) nebo jestli některý odpor nemá oba vývody zapojeny do stejného uzlu. Takové odpory totiž lze z obvodu s klidem vynechat, což nám zadání nezakazuje. Máme-li k dispozici padesát odporů, neznamená to, že bychom je nutně museli použít všechny. Musíme se však postarat o to, aby použitý obvod měl konečný odpor (tj. aby propojoval oba body, mezi nimiž měříme odpor).



Obr. 12. Příklad tří obvodů získaných simulovaným žiháním

Dále už pokračujeme se samotným žiháním, které provádíme v 500 000 krocích (výhody simulovaného žihání se plně projeví, pokud algoritmu dáme dostatek času na ustavení rovnováhy). Jako „energií“ systému použijeme absolutní hodnotu odchylky odporu v ohmech od π . Tepelné fluktuační realizujeme jednoduše vybráním náhodného odporu ze sady a jeho přepojením mezi náhodně vybranými uzly. Zde se opět nestaráme o to, jestli takto příslušný odpor náhodou zcela neodpojíme od obvodu či nezapojíme oběma vývody do téhož uzlu.

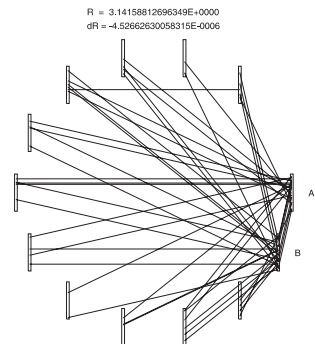
Klíčovým bodem celého algoritmu je výběr vhodného průběhu snižování teploty. Ten jsme zvolili lineární, což je jistý kompromis mezi rychlostí a robustností algoritmu (ten podle jistých teoretických studií dosahuje optimální efektivity při logaritmickém snižování teploty, které by však pro naše účely bylo příliš pomalé).

Rychlost snižování teploty a její počáteční hodnotu jsme volili zkusmo metodou pokusu a omylu.

Několik nalezených obvodů pro různé hodnoty maximálního počtu uzlů jsme znázornili na obrázku 12 spolu s hodnotami jejich celkových odporů R . Obdélníky uspořádané do kruhu zde představují jednotlivé uzly, každá čára pak jeden rezistor. Uzly označené A a B jsou ty, mezi nimiž měříme odpor.

Obvod znázorněný na obrázku zcela vpravo je zároveň nejlepší, který se nám podařilo během asi deseti pokusů nalézt. Číselná hodnota jeho odporu se od π liší až na devátém desetinném místě.

Pro srovnání uvádíme ještě jeden „typický“ obvod (viz obrázek 13) nalezený metodou pouhého snižování „energie“. Vidíme, že odchylka číselné hodnoty odporu od π je o tři řády



Obr. 13. Obvod získaný pouhým snižováním odchylky od π

vyšší než v případě nejlepšího obvodu nalezeného pomocí žihání. Získali jsme tedy poměrně zajímavou ukázkou účinnosti simulovaného žihání ve srovnání s „primitivnějšími“ algoritmy.

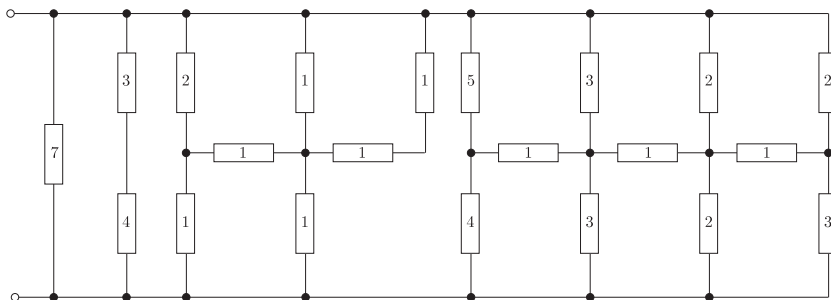
Nejlepší nalezený obvod jsme pro vás znázornili i ve formě klasického schématu na obrázku 14. Čísla uvnitř jednotlivých symbolů rezistorů označují počet paralelně zapojených odporů, které daný symbol reprezentuje (můžete si všimnout, že celkově je použito pouze 49 rezistorů).

Přesná hodnota odporu tohoto obvodu je

$$R = \frac{24615500}{7835357} \Omega \doteq 3,1415926549 \dots \Omega.$$

Jeho absolutní odchylka od π je $\Delta R = 1,3 \cdot 10^{-9} \Omega$ a relativní pak $\delta R = 4,3 \cdot 10^{-10}$.

Na závěr ještě poznamenejme, že tato úloha je spíše akademického rázu. Když někdy potřebujeme rezistor o odporu co nejbližším nějaké dané hodnotě, realizujeme jej spíše pomocí odporové dekády či kombinací odporů z poměrně bohaté sady volně prodejných součástek.



Obr. 14. Schéma nejlepšího nalezeného obvodu

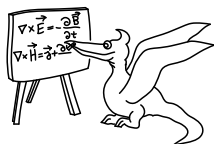
Navíc shoda výsledného odporu se zadanou hodnotou s přesností na miliardtiny je naprosto bezvýznamná, pokud nedokážeme se stejnou přesností zajistit i odpory všech použitých rezistorů, což je v praxi takřka nemožné.

Epidemie v Praze

Počítačovou simulaci epidemie v Praze naprogramoval Martin Formánek a zdrojové kódy naleznete na webové stránce seriálu.

Marek Pechal

marek@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 5: Numerické integrování

Tento díl našeho seriálu věnujeme praktickému využití numerické integrace, řešení rovnic a ODR ve dvou problémech z oblasti statistické fyziky, termodynamiky a astrofyziky.

Popis příslušných numerických metod, které se nám nevešly sem ani nebyly popsány v některém z předchozích dílů seriálu (např. řešení rovnic), můžete najít v našem studijním textu *Úvod do programování* na internetu.

Integrační triky

Úvodem si povězme, jakým způsobem můžeme numericky počítat integrály, jejichž některá z mezí je nevlastní (tj. $\pm\infty$). Evidentně nelze užít žádnou z ekvidistantních formulí (obdélníková, lichoběžníková či Simpsonova metoda).

Velmi jednoduchým řešením tohoto problému je převést integrál vhodnou substitucí na integraci v konečných mezích. Například integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

můžeme substitucí $x = \operatorname{tg} \varphi$ převést na

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{f(\operatorname{tg} \varphi)}{\cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Podmínkou použitelnosti tohoto vztahu je, aby funkce $f(x)$ pro $x \rightarrow \infty$ klesala alespoň tak rychle jako $1/x^2$. Pro první úlohu této série by se vám mohla hodit substituce $t = 1/\sqrt{1+x^2}$, která převede integrál typu

$$\int_0^{+\infty} f(\sqrt{1+x^2}) dx$$

na jednodušeji numericky řešitelný integrál

$$\int_0^1 \frac{f(t^{-1})}{t^2 \sqrt{1-t^2}} dt.$$

Dalším užitečným nástrojem pro numerickou integraci je takzvaná *Rombergova metoda*, která umožňuje získat použitím jednoduchých integračních schémat (např. lichoběžníkové metody) mnohem vyšší přesnost než by mohla poskytnout příslušná metoda samotná. Princip tohoto důmyslného algoritmu spočívá v použití jednodušší metody pro několik různých hodnot integračního kroku h_i a následné extrapolaci získaných výsledků I_i do $h = 0$.

Obzvláště vhodným a zároveň jednoduchým způsobem, jak toto provést, je nalezení polynomu $P(x)$, který pro jednotlivé hodnoty kroku h_i nabývá vypočítaných hodnot integrálu I_i . Při použití lichoběžníkové metody přitom tento polynom může být funkcí h^2 místo h . Požadujeme tedy $P(h_i^2) = I_i$. Jak takový polynom najít? Stačí si všimnout, že polynom

$$(x - h_1^2)(x - h_2^2) \cdot \dots \cdot (x - h_{k-1}^2)(x - h_{k+1}^2) \cdot \dots \cdot (x - h_N^2)$$

je nulový ve všech bodech h_i^2 kromě h_k^2 . Proto polynom

$$I_k \frac{(x - h_1^2)(x - h_2^2) \cdots (x - h_{k-1}^2)(x - h_{k+1}^2) \cdots (x - h_N^2)}{(h_k^2 - h_1^2)(h_k^2 - h_2^2) \cdots (h_k^2 - h_{k-1}^2)(h_k^2 - h_{k+1}^2) \cdots (h_k^2 - h_N^2)}$$

nabývá hodnoty I_k v h_k^2 a je nulový v ostatních h_i^2 . Polynom, který hledáme, je tedy dán součtem výše uvedených dílčích polynomů pro všechna k

$$P(x) = \sum_{k=1}^N I_k \frac{(x - h_1^2)(x - h_2^2) \cdots (x - h_{k-1}^2)(x - h_{k+1}^2) \cdots (x - h_N^2)}{(h_k^2 - h_1^2)(h_k^2 - h_2^2) \cdots (h_k^2 - h_{k-1}^2)(h_k^2 - h_{k+1}^2) \cdots (h_k^2 - h_N^2)}.$$

Extrapolovaná hodnota integrálu pro $h = 0$ je pak rovna $P(0)$. Algoritmus realizující Rombergovu integraci je pro vaši inspiraci k dispozici v demonstračním programu **romberg.pas**.

Statistika nuda je?

Abychom se mohli pustit do úloh, musíme si nejdříve projít nezbytným teoretickým úvodem do statistické fyziky¹¹.

V rámci statistické fyziky lze odvodit takzvané (Gibbsovo) kanonické rozdělení, podle něhož je pravděpodobnost nalezení systému, udržovaného na konstantní teplotě T kontaktem s tepelným rezervoárem, v mikrostavu o energii E úměrná výrazu¹²

$$\exp\left(-\frac{E}{kT}\right).$$

Máme-li tedy systém mnoha neinteragujících částic, z nichž každá se může nacházet v některém ze stavů s energiemi E_1, E_2, \dots , bude střední počet částic v každém z těchto stavů úměrný $\exp(-\beta E_i)$, kde β je zkrácené označení pro $1/kT$. Tento závěr je třeba poněkud poopravit, pokud jsou uvažované částice principiálně nerozlišitelné (což je například případ elementárních částic). Pak je počet částic v mikrostavu s energií E roven

$$N(E) = \frac{1}{\exp(\beta(E - \mu)) \pm 1},$$

kde μ je tzv. Fermiho energie (nebo též chemický potenciál) a znaménko ve jmenovateli závisí na tom, zda jsou uvažované částice bosony (částice s celočíselným spinem) nebo fermiony (částice s poločíselným spinem). V prvním případě je třeba volit znaménko $-$, ve druhém $+$. Celkový počet částic pak je

$$N = \sum_i \frac{1}{\exp(\beta(E_i - \mu)) \pm 1}.$$

Tento výraz lze dále upravit v případě, že rozdíly mezi energiemi kvantovaných energetických hladin jsou mnohem menší než kT , a tedy diskrétní systém energetických stavů lze považovat za

¹¹⁾ Ve skutečnosti je toto označení dosti nadsazené – zájemcům o bližší porozumění doporučujeme náš text o statistické fyzice, který najdete na webu FYKOSu, seriál FYKOSu z roku 2005/6 či knihu J. Kvasnica: *Statistická fyzika*.

¹²⁾ Nepřipomíná vám simulované žihání?

kontinuum (s hustotou $1/h^3$ stavů na jednotkový objem fázového prostoru, kde h je Planckova konstanta). Sumu pak lze nahradit integrálem

$$N = \frac{s}{h^3} \int \int \frac{1}{\exp(\beta(E(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mu)) \pm 1} d^3x d^3p,$$

kde s značí počet možných kvantových stavů příslušných jedné hodnotě energie částice (např. pro částici se spinem $\frac{1}{2}$ je $s = 2$, neboť existují dvě možné projekce spinu). Předpokládáme-li dále, že energie částice nezávisí na poloze, ale jen na velikosti hybnosti, přejde integrace přes prostorovou souřadnici jednoduše na násobení celkovým objemem V , ve kterém jsou částice uzavřeny, a element d^3p můžeme díky sférické symetrii zapsat jako $4\pi p^2 dp$. Dostaneme tak

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi s}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(E(p) - \mu)) \pm 1} dp.$$

Pokud budeme částice považovat za volné, můžeme použít obecně platný speciálně relativistický vztah $E(p) = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}$, kde E_0 je klidová energie částice a c rychlost světla, čímž získáme vztah

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi s}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - \mu)) \pm 1} dp.$$

Podobně jako jsme právě odvodili vztah pro celkový počet částic, můžeme vynásobením počtu částic v každém stavu jeho energií a analogickými úpravami dostat následující vztah pro vnitřní energii

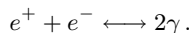
$$\frac{U}{V} = \frac{4\pi s}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - \mu)) \pm 1} dp.$$

Tyto vztahy platné pro tzv. *fermionový*, resp. *bosonový plyn* nám nyní pomohou numericky řešit následující úlohu.

Horká dutina

Mějme prázdnou uzavřenou dutinu o teplotě T . Ta bude v termodynamické rovnováze obsahovat elektromagnetické záření o objemové hustotě energie $4\sigma T^4/c$, kde σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta. Představme si nyní, že dutina je opravdu hodně horká, takže v ní může docházet ke kreaci párů elektron-positron. V rovnováze se vyrovná rychlost, s jakou páry vznikají, a rychlost, s jakou anihilují. Zajímalo by nás, jaká bude rovnovážná koncentrace elektronů a pozitronů při nějaké dané teplotě. Mohlo by se zdát, že pro rozřešení tohoto problému nemáme dostatek bližších informací o procesu kreace a anihilace. Zde se však ukazuje obrovská obecnost termodynamiky a jejích principů.

Ty nám říkají, že při libovolné (nejen) chemické reakci je v rovnováze součet chemických potenciálů μ jednotlivých zúčastněných složek vážených příslušnými stechiometrickými koeficienty (s patřičným znaménkem podle toho, zda jde o reaktant či produkt) nulový. Tedy v našem případě



Vzhledem k charakteristické vlastnosti fotonů, kterou je nulovost jejich chemického potenciálu (za každých podmínek), pak dostáváme podmínku rovnováhy

$$\mu_+ + \mu_- = 0.$$

Označíme-li si počet elektronů, resp. pozitronů na jednotkový objem jako n_- , resp. n_+ , pak získáme použitím výše odvozeného vztahu pro fermionový plyn (v němž položíme $s = 2$ a dosadíme vzájemně opačné hodnoty μ)

$$n_-(\mu) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - \mu)) \pm 1} dp,$$

$$n_+(\mu) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} + \mu)) \pm 1} dp.$$

Tyto integrály nelze počítat analyticky, ale numerické metody nám ochotně přispěchají na pomoc.

Hodnotu μ můžeme určit, je-li dán např. celkový náboj Q všech částic v dutině. Ten je evidentně roven $Q = e(n_+(\mu) - n_-(\mu))$. Tak dostáváme rovnici pro μ , kterou numericky vyřešíme, a dopočítáme koncentrace elektronů a pozitronů. Zvlášť můžeme řešit jednodušší případ $Q = 0$, kdy je zřejmě $\mu = \mu_+ = \mu_- = 0$.

Bílý trpaslík

V další úloze zůstaneme u fermionového (konkrétně elektronového) plynu, tentokrát v přiblížení nízkých teplot, kdy je elektronový plyn takzvaně degenerovaný. Závislost jeho tlaku na objemové koncentraci částic je dána stavovou rovnicí¹³

$$P = \frac{3}{8} E_0 n_0 \left[\frac{1}{3} \nu^{1/3} \sqrt{\nu^{2/3} + 1} (2\nu^{2/3} - 3) + \ln \left(\sqrt{\nu^{2/3} + 1} + \nu^{1/3} \right) \right],$$

kde ν je bezrozměrná koncentrace částic definovaná jako $\nu = n/n_0$, přičemž

$$n_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{E_0}{hc} \right)^3.$$

Se znalostí této závislosti můžeme vytvořit jednoduchý model bílého trpaslíka – pozdního stádia vývoje méně hmotných hvězd (mimořádně i našeho Slunce). V rovnováze musí tlak uvnitř hvězdy splňovat hydrostatickou rovnici $\nabla P = \varrho \mathbf{K}$, kde ϱ je hustota plynu a \mathbf{K} intenzita gravitačního pole. V případě sféricky symetrické hvězdy je velikost \mathbf{K} rovna $GM(r)/r^2$, kde $M(r)$ je hmotnost hvězdné hmoty uvnitř koule o poloměru r . Funkce $M(r)$ je s hustotou $\varrho(r)$ svázána vztahem $M'(r) = 4\pi\varrho(r)r^2$ (tento vztah lze odvodit jednoduchou úvahou o hmotnosti kulové slupky o poloměru r a tloušťce dr). Hvězda je tedy popsána soustavou následujících diferenciálních rovnic

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \frac{M(r)\varrho(r)}{r^2}, \quad (18)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varrho(r) \quad (19)$$

pro neznámé funkce $\varrho(r)$, $P(r)$ a $M(r)$. Přitom jsou $\varrho(r)$ a $P(r)$ svázány právě výše uvedenou stavovou rovnicí $P = f(n)$. Pokud na jeden elektron připadá hmotnost¹⁴ m , pak platí $\varrho(r) = mn(r)$, tedy $P(r) = f(\varrho(r)/m)$. První diferenciální rovnici tak ještě můžeme přepsat do

¹³⁾ Můžete si všimnout zajímavé věci – tlak degenerovaného elektronového plynu nezávisí na teplotě (při nízkých teplotách).

¹⁴⁾ Pozor! Nejde jednoduše o hmotnost elektronu. Při určitém rozložení elektronů ve hvězdě se v důsledku působení elektrických sil stejným způsobem rozloží i atomová jádra. Můžeme si tedy představit,

tvaru

$$\frac{1}{m} f' \left(\frac{\varrho(r)}{m} \right) \frac{d\varrho(r)}{dr} = -G \frac{M(r)\varrho(r)}{r^2}.$$

Přitom vezme, že derivace $f'(n)$ poměrně děsivého výrazu pro tlak degenerovaného elektronového plynu se po všech úpravách zjednoduší na docela sympatický tvar

$$f'(n) = E_0 \frac{\nu^{2/3}}{3\sqrt{\nu^{2/3} + 1}},$$

kteřý dosadíme do naší diferenciální rovnice (kde $\nu = n/n_0 = \varrho(r)/mn_0$).

Zbývají tedy jen dvě neznámé funkce $M(r)$ a $\varrho(r)$, pro něž máme dvě ODR. Přitom zřejmě musí být $M(0) = 0$ a $\varrho(0)$ si můžeme libovolně zvolit. Nic nám proto nebrání začít řešit numericky (po případném vhodném zavedení bezrozměrných veličin).

Na závěr snad ještě uspokojíme zvědavost některých z vás, které napadla otázka, jak můžeme model degenerovaného plynu pro nízké teploty aplikovat na hvězdu. Nízké teploty, pro které platí model degenerovaného plynu, jsou nízké vzhledem k μ , tj. $kT \ll \mu$. Tato nerovnost je však pro elektrony a jejich typickou hustotu uvnitř bílého trpaslíka dobře splněna i při teplotách, které bychom normálně za nízké rozhodně nepovažovali.

Úloha V. S ... posloupnosti, horká dutina a bílý trpaslík

a) Odvoďte Taylorův rozvoj exponenciály a pro $x = 1$ graficky znázorníte posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k!$ spolu s posloupností $\{(1 - 1/n)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Stejným způsobem porovnejte posloupnost $\{(1 - 1/n)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k!$, čili posloupnost $\{\sum_{k=1}^n x^k/k!\}_{n \in \mathbb{N}}$, tentokrát však pro $x = -1$.

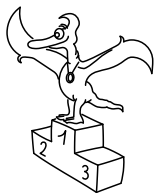
b) Druhý úkol bude určit závislost koncentrace elektronů a pozitronů na teplotě při celkovém náboji $Q = 0$ v prázdné uzavřené horké dutině. (Bude-li se vám chtít, i při jiných vámi zvolených hodnotách Q). Dále určete závislost poměru vnitřní energie U_e elektronů a pozitronů ku celkové vnitřní energii systému U (tj. součtu energie elektromagnetického záření a částic) na teplotě a určit hodnoty teploty odpovídající některým význačným hodnotám tohoto poměru (např. $3/4, 1/2, 1/4, \dots$; může tento poměr nabývat všech těchto hodnot?).

Pokuste se své výsledky pěkně graficky zpracovat ve formě grafů (můžete zkusit i trojrozměrné).

Při vašem snažení vám může hodně pomoci, pokud si zavedete vhodné bezrozměrné jednotky (např. βE_0 místo β apod.).

c) Řešte soustavu diferenciálních rovnic (18), (19) pro $M(r)$ a $\varrho(r)$ v modelu bílého trpaslíka pro několik vhodně zvolených hodnot $\varrho(0)$ a pro každou z nich sledujte hodnotu, ke které se blíží $M(r)$ při $r \rightarrow \infty$. Ta je zřejmě rovna hmotnosti celé hvězdy. Pokuste se prozkoumat závislost této celkové hmotnosti na $\varrho(0)$ a odhadnout její horní mez. Srovnajte váš výsledek s horní mezí hmotnosti bílého trpaslíka, kterou najdete v literatuře nebo na internetu. Uvažujte, že je hvězda tvořena héliem.

že každý elektron v průměru doprovází část atomového jádra. Je-li tedy například hvězda tvořena héliem, je m rovno polovině hmotnosti atomu hélia. I když musíme do našich úvah zahrnout hmotnost jader, jejich příspěvek k celkovému tlaku můžeme zanedbat, neboť například héliová jádra tvoří bosonový plyn, jehož tlak při nízkých teplotách (na rozdíl od tlaku plynu fermionového) klesá k nule.



Pořadí řešitelů po III. sérii



Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	3	8	7	33	<i>100</i>	99
1. Stanislav Fořt	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	45	27
2. Zuzana Bogárová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	-	-	3	3	-	-	7	63	20
3. Tomáš Volf	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	65	13
4.-5. Ondřej Maslíkiewicz	SPŠ Hronov	1	0	0	-	-	-	-	1	35	12
<i>Ji-Hong Min</i>	Ist Internat. School, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	0	44	12
6.-7. Tomáš Bartoněk	G O. Havlové, Ostrava - Poruba	1	0	-	-	3	-	-	4	22	11
<i>Barbora Drozdová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	0	1	1	-	3	-	-	5	44	11
8. Barbora Veselková	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	44	7
9. Michal Gallovič	G Ludovíta Štúra, Trenčín	0	-	-	-	-	1	-	1	17	5
10. Michal Pokorný	G Děčín	-	-	-	-	-	-	-	0	67	4
11. Ondřej Palla	SPŠ Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	17	3

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	3	8	7	33	<i>100</i>	99
1. Zuzana Dočekalová	G Ostrava - Hrabůvka	1	1	2	2	2	6	6	20	67	62
2. Petr Ryšavý	G J. Heyrovského Praha	3	4	-	2	3	1	4	17	65	58
3.-4. Petr Cagaš	G Lesní čtvrť, Zlín	3	1	-	2	3	-	4	13	64	53
<i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	4	2	3	4	4	3	-	20	77	53
5. Ján Bogár	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	2	4	4	4	2	-	17	63	44
6. Tereza Jeřábková	SPŠ a SOU Letohrad	3	2	0	-	3	4	-	12	69	38
7. Kateřina Honzáková	G Jana Keplera, Praha	4	2	-	3	-	-	-	9	83	30
8. Veronika Paštyková	G J. Orteny, Kutná Hora	3	1	1	1	2	2	-	10	37	27
9. Jana Bazová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	0	1	4	2	3	1	-	11	44	24
10.-11. Petra Kňázková	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	1	1	2	3	-	-	8	50	19
<i>Michal Müller</i>	G Jevíčko	1	3	0	-	2	-	-	6	59	19
12. Martin Chudjak	SPŠ Martin	1	0	-	1	2	-	-	4	35	17
13. Jakub Klemsa	G J. Vrchlického, Klatovy	2	-	2	-	3	-	-	7	76	16
14. Lada Peksová	G Ch. Dopplera, Praha	1	0	-	-	-	-	-	1	54	14
15. František Steinhauer	G Dačice	-	-	-	-	-	-	-	0	50	10
16. Lukáš Kripner	G T. G. Masaryka, Litvínov	-	-	-	-	-	-	-	0	82	9
17. Adam Mohammad	Ist Internat. School, Ostrava	0	0	-	-	-	-	-	0	21	7
18.-19. Michal Španko	G Havlíčkův Brod	-	-	-	-	-	-	-	0	38	5
<i>Anna Vacířová</i>	VOŠ a SPŠ G Evropská Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	25	5
20. Irena Pavličková	G a SOŠ Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	100	3
21.-23. Michal Bajcar	G F. Živného, Bohumín	-	-	-	-	-	-	-	0	67	2
<i>Veronika Drgoňová</i>	G Hlohovec	1	-	-	1	-	-	-	2	29	2
<i>Simona Laňková</i>	G Havlíčkův Brod	-	-	-	-	-	-	-	0	17	2
24. Martina Bartoňová	G Hlohovec	1	-	-	-	-	-	-	1	33	1

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	3	8	7	33	100	99
1. <i>Pavel Malý</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	4	0	2	2	–	6	17	80	61
2. <i>Hana Šustková</i>	G Trutnov	1	2	1	1	3	2	1	11	55	54
3. <i>Karel Kolář</i>	G Špitálská, Praha	1	–	1	2	3	4	–	11	67	49
4. <i>Peter Vanya</i>	G Jura Hronca	1	4	1	–	–	3	–	9	61	42
5. <i>Michal Maizner</i>	G Žilina - Vlčince	1	–	2	4	–	–	–	7	70	39
6.–7. <i>Michal Koutný</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	2	–	–	–	–	–	–	2	77	33
<i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	–	–	3	4	3	–	–	10	89	33
8. <i>Michael Hahl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	84	31
9. <i>Zuzana Chlebounová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	2	–	–	–	1	7	–	10	75	30
10. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠ strojnická Vsetín	1	–	–	–	–	–	–	1	55	28
11. <i>Alžběta Kadlecová</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	2	–	4	3	–	9	60	27
12. <i>Jakub Töpfer</i>	G Jana Keplera, Praha	–	4	0	–	3	2	–	9	52	25
13. <i>Jana Figulová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	–	4	4	3	–	–	12	79	23
14. <i>Miroslav Klímoš</i>	G M. Koperníka, Bílovec	2	1	4	1	2	3	4	17	56	22
15. <i>Katarína Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	1	–	3	–	–	–	5	51	19
16. <i>Martin Zahradník</i>	G Třeboň	–	–	–	–	–	–	–	0	65	15
17.–18. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	0	52	12
<i>Dana Suchomelová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	–	–	–	–	–	–	1	67	12
19. <i>Josef Tkadlec</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	69	11
20. <i>Václav Obrázek</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	67	10
21.–22. <i>Eva Hašková</i>	G a SOŠ Úpice	–	–	–	–	–	–	–	0	29	8
<i>Vojtěch Tuma</i>	G Roudnice nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	0	67	8
23.–24. <i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	–	–	–	–	–	–	–	0	50	6
<i>Ondřej Růžička</i>	G a SOŠ Hořice	–	–	–	–	–	–	–	0	38	6
25. <i>Matej Dzuro</i>	G Hlohovec	0	0	–	1	2	–	–	3	21	3
26. <i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	20	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	3	8	7	33	100	99
1. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	3	3	4	4	3	–	6	23	92	61
2. <i>Airidas Korolkovas</i>		4	5	4	–	–	–	–	13	94	59
3. <i>Jakub Michálek</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	88	49
4. <i>Lukáš Ledvína</i>	PČG Karlovy Vary	3	–	4	3	–	–	–	10	85	44
5. <i>Peter Ondáč</i>	G Humenné	1	–	4	1	2	–	–	8	57	28
6.–7. <i>Juraj Hartman</i>	Jiráskovo G Náchod	2	–	2	1	–	–	–	5	61	22
<i>Prabhat Rao Pinnaka</i>		1	3	1	1	2	2	–	10	34	22
8. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	4	4	4	–	–	–	–	12	73	16
9. <i>Hana Šírová</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	–	–	4	4	4	–	–	12	109	12
10.–11. <i>Lukáš Drápal</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	88	7
<i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	140	7



FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>
e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz
e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.