20. ročník, úloha II . S ... částice se spinem 1/2 *(6 bodů; průměr 5,25; řešilo 16 studentů)*

Částice se spinem 1/2 (např. elektron) se může nacházet ve dvou stavech projekce spinu na osu z. Buď spin míří nahoru, pak se nachází ve stavu $|\uparrow\rangle$, či dolů, to je ve stavu $|\downarrow\rangle$. Tyto dva stavy tvoří bázi dvoudimensionálního Hilbertova prostoru popisující právě částici se spinem 1/2.

a) *Napište, jak vypadá operátor identity na tomto prostoru v řeči vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$.*
b) *Najděte vlastní vektory a vlastní čísla matic S_1, S_2 a S_3.*
c) *Máte zadány operátory $\widehat{S}_+$ a $\widehat{S}_-$ ve tvaru $\widehat{S}_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$, $\widehat{S}_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$. Najděte jejich vyjádření v bázi vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ a určete, jak působí na obecný vektor $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$. Jak vypadají vlastní vektory těchto operátorů a jaká jsou vlastní čísla?*
d) *Definujme vektory*

$$|\otimes\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \qquad |\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right) .$$

Ukažte, že tyto vektory tvoří bázi na našem Hilbertově prostoru, a najděte vztah mezi koeficienty a, b v rozkladu $|\psi\rangle$ do původní báze a koeficienty c, d v rozkladu $|\psi\rangle = c|\otimes\rangle + d|\odot\rangle$ do nové báze.

e) *Napište tvar operátorů spinu $\widehat{S}_1$, $\widehat{S}_2$ a $\widehat{S}_3$ v bázi vektorů $|\otimes\rangle$ a $|\odot\rangle$. Určete jejich vlastní čísla a vektory.*

Zadal autor seriálu Jarda Trnka.

a) Víme, že vektory $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ tvoří na našem dvoudimenzionálním Hilbertově prostoru bázi, operátor identity bude mít tedy podobu

$$\mathbb{I} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| .$$

V této bázi bude mít tento operátor samozřejmě podobu jednotkové matice.

b) Úkolem je nalezení vlastních vektorů a vlastních čísel spinových matic S_i, tj. řešit rovnice

$$S_i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

Vyřešením těchto algebraických rovnic dostaneme normované vlastní vektory

$$|S_1, \lambda = 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} , \qquad |S_1, \lambda = -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} ,$$
$$|S_2, \lambda = 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad |S_2, \lambda = -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$
$$|S_3, \lambda = 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle , \qquad |S_3, \lambda = -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle .$$

Symbol λ samozřejmě značí příslušné vlastní číslo. Vidíme, že pro všechny matice jsou tato vlastní čísla pouze $\pm 1/2$. To odráží fakt, že při měření spinu v libovolném směru můžeme vždy dostat jako výsledek pouze tyto dvě hodnoty a nic jiného. Zkrátka buď spin míří nahoru, nebo dolů. Častěji značíme vlastní číslo stejně jako operátor, tedy například $|S_3 = 1/2\rangle = |\uparrow\rangle$.

c) Maticové vyjádření operátorů $\widehat{S}_+$ a $\widehat{S}_-$ v bázi vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ najdeme z definice

$$S_+ = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\widehat{S}_+|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\widehat{S}_+|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\widehat{S}_+|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\widehat{S}_+|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_- = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\widehat{S}_-|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\widehat{S}_-|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\widehat{S}_-|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\widehat{S}_-|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na obecný vektor $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ působí takto

$$\widehat{S}_+|\psi\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\psi\rangle = b|\uparrow\rangle\,, \qquad \widehat{S}_-|\psi\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\psi\rangle = a|\downarrow\rangle\,.$$

Vidíme tedy, že operátor $\widehat{S}_+$ člen $a|\uparrow\rangle$ úplně „zahazuje", naopak člen $b|\downarrow\rangle$ jaksi „povýší" na $b|\uparrow\rangle$. Opravdu tento operátor zvyšuje třetí komponentu spinu o jednotku, tj. $|\downarrow\rangle = |S_3 = -1/2\rangle$ zvedne na $|\uparrow\rangle = |S_3 = 1/2\rangle$. Vektor $|\uparrow\rangle$ ale už nemá kam zvedat, takže ho vynuluje.

Operátor $\widehat{S}_-$ se chová přesně opačně, tj. snižuje kvantové číslo příslušející $\widehat{S}_3$ o jednotku – mění $|\uparrow\rangle$ na $|\downarrow\rangle$, vektor $|\downarrow\rangle$ však už nemá na co změnit, tak ho vynuluje. Operátory $\widehat{S}_+$ a $\widehat{S}_-$ proto nazýváme *posunovací* operátory. Tento koncept je obecný a platí pro stav s libovolným spinem[1], např. pro částici se spinem 2 by platilo

$$\widehat{S}_+|S_3 = 1\rangle = |S_3 = 2\rangle\,, \qquad \widehat{S}_-|S_3 = 0\rangle = |S_3 = -1\rangle \qquad \text{apod.}$$

Vektory odpovídající maximální, resp. minimální hodnotě kvantového čísla $\widehat{S}_3$ se samozřejmě působením $\widehat{S}_+$, resp. $\widehat{S}_-$ nulují, tj. $\widehat{S}_+|S_3 = 2\rangle = \widehat{S}_-|S_3 = -2\rangle = 0$. Vraťme se k našemu příkladu.

Stejný výsledek působení posunovacích operátorů bychom dostali vynásobením nalezených matic a obecného vektoru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Je dobré si uvědomit, že oba postupy (maticový a operátorový) jsou naprosto ekvivalentní.[2]

Nalezení vlastních vektorů a vlastních čísel těchto operátorů (matic) je úloha velmi triviální, nicméně dává pozoruhodné výsledky

$$|S_+, \lambda = 0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle\,, \qquad |S_-, \lambda = 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle\,.$$

Ke každému z operátorů existuje pouze jeden vlastní vektor, ten druhý by byl identicky nulový[3]. Jediný vlastní vektor a nulové vlastní číslo jsou signály toho, že ani jeden z těchto operátorů nepředstavuje pozorovatelnou veličinu.

d) Dva vektory tvoří na Hilbertově prostoru bázi, pokud jsou na sebe kolmé. To pro $|\otimes\rangle$ a $|\odot\rangle$ splněno je.

$$\langle\otimes|\odot\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\langle\uparrow|\uparrow\rangle - \langle\downarrow|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\uparrow\rangle - \langle\uparrow|\downarrow\rangle\right) = 0\,.$$

---

1) Dokonce se netýká pouze spinu, ale libovolné pozorovatelné.

2) Pro matematičtěji založené čtenáře mohu doplnit, že algebra operátorů je homomorfní s grupou regulárních matic GL(n), tj. každý operátor lze vyjádřit jako matici.

3) Tomu by pak odpovídalo libovolné vlastní číslo, ale mluvit o něm u nulového vektoru postrádá smysl.

Ve staré bázi má obecný vektor rozklad $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$. Do něj chytře vložíme identitu ve tvaru $I = |\otimes\rangle\langle\otimes| + |\odot\rangle\langle\odot|$. Potom dostaneme

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= a\left(|\otimes\rangle\langle\otimes| + |\odot\rangle\langle\odot|\right)|\uparrow\rangle + b\left(|\otimes\rangle\langle\otimes| + |\odot\rangle\langle\odot|\right)|\downarrow\rangle \\
&= \left(a\langle\otimes|\uparrow\rangle + b\langle\otimes|\downarrow\rangle\right)|\otimes\rangle + \left(a\langle\odot|\uparrow\rangle + b\langle\odot|\downarrow\rangle\right)|\odot\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Skalární součiny vektorů staré a nové báze mají hodnoty

$$
\langle\otimes|\uparrow\rangle = \langle\otimes|\downarrow\rangle = \langle\odot|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \langle\odot|\downarrow\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.
$$

Po dosazení vyjde

$$
|\psi\rangle = \frac{a+b}{\sqrt{2}}|\otimes\rangle + \frac{a-b}{\sqrt{2}}|\odot\rangle \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}\,, \quad d = \frac{a-b}{\sqrt{2}}\,.
$$

e) Posledním úkolem bylo vyjádřit matice spinu v bázi vektorů $|\otimes\rangle$ a $|\odot\rangle$. Přímočarý postup „brute force“ vychází z definice

$$
S'_i = \begin{pmatrix} \langle\otimes|\widehat{S}_i|\otimes\rangle & \langle\otimes|\widehat{S}_i|\odot\rangle \\ \langle\odot|\widehat{S}_i|\otimes\rangle & \langle\odot|\widehat{S}_i|\odot\rangle \end{pmatrix}.
$$

K operátoru $\widehat{S}_i$ vložíme z obou stran identitu ve tvaru $\mathbb{I} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ a dosadíme za známé hodnoty.

$$
S'_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S'_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S'_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

K takto získaným maticím pak osvědčeným postupem určíme vlastní čísla a vlastní vektory.

$$
\begin{gathered}
|S'_1, \lambda = 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad |S'_1, \lambda = -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \\
|S'_2, \lambda = 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |S'_2, \lambda = -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
|S'_3, \lambda = 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |S'_3, \lambda = -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{gathered}
$$

Pozorný čtenář lehko nahlédne, že matice S_2 a S_3 se prohodily a matice S_1 se komplexně sdružila. Vlastní vektory a vlastní čísla se oproti původnímu případu nezměnily (jen prodělaly stejnou záměnu jako jejich matice). Matice S'_2 je v této bázi diagonální, což značí, že $|\otimes\rangle$, resp. $|\odot\rangle$ jsou její vlastní vektory příslušné vlastním hodnotám $1/2$, resp. $-1/2$.

Pavel Motloch si všiml velmi významného jevu. Libovolný vektor vyjádřený v nové bázi můžeme na základě výsledků úlohy d) vyjádřit pomocí staré báze jako

$$
\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},
$$

kde čárkou explicitně zdůrazňujeme, že se jedná o novou bázi. Výše zmíněnou matici nazýváme *maticí přechodu* mezi starou a novou bází. Libovolnou matici vyjádřenou v nové bázi můžeme potom zapsat pomocí její podoby ve staré bázi jako $A' = UAU^{-1}$, kde U je ona přechodová matice. V našem případě je vyjádření c, d pomocí a, b stejné, jako by tomu bylo naopak (obecně to tak být nemusí), tj.

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = U^{-1}\,.$$

Vyjádření matic S_i' pak dostaneme velmi jednoduše prostým vynásobením tří matic $S_i' = US_iU^{-1}$, což je podstatně méně práce než v tradičním přístupu.

Krátce k došlým řešením. Byl jsem velmi mile překvapen, že většina z vás vyřešila všechny úlohy správně či jen s nepodstatnými chybami. Bonusový bod za pěkné řešení by si tím pádem zasloužilo mnoho z vás, čímž by ale ztrácel svůj význam. Dostal ho tudíž pouze *Pavel Motloch* za chytré vyřešení poslední úlohy.

Jarda Trnka
`jarda@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.