20. ročník, úloha I . S ... *Bohrova hypotéza* *(4 body; průměr 2,59; řešilo 37 studentů)*

V této úloze se budeme zabývat atomem vodíku, který je tvořen velice hmotným jádrem s nábojem e a lehkým elektronem o hmotnosti m s nábojem $-e$, který kolem jádra obíhá pro kruhové trajektorii.

a) *Určete, jak na základě klasické fyziky závisí vzdálenost elektronu od jádra atomu na jeho celkové (kinetické a potenciální) energii E.*

b) *Přijměme Bohrovu hypotézu, že moment hybnosti elektronu je kvantován, tzn. může nabývat jen velikosti $L = n\hbar$, kde n je přirozené číslo. V jaké vzdálenosti potom může elektron kolem jádra atomu obíhat?*

c) *Určete frekvenci fotonu, který elektron vyzáří, pokud přejde z n-té do m-té povolené vzdálenosti od jádra.*

Zadal autor seriálu Jarda Trnka.

a) Celková energie elektronu se skládá z potenciální a kinetické části

$$E = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Rychlost elektronu zjistíme z rovnosti elektrostatické a odstředivé síly

$$m\,\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}}\,.$$

Dosadíme za velikost rychlosti v do vztahu pro energii a vyjádříme závislost $r = r(E)$.

$$r = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 E}\,.$$

Záporné znaménko je zde plně v pořádku, protože pro vázané stavy je $E < 0$. Volný elektron má nulovou energii.

b) V úkolu a) jsme viděli, že v klasické mechanice se elektron může nacházet v libovolné vzdálenosti od jádra. Naložme teď na problém Bohrovu kvantovací podmínku $L = nh/2\pi$. Z toho jednoduše zjistíme, jaké rychlosti může elektron nabývat, $v = v(r)$.

$$L = mvr = \frac{nh}{2\pi} \quad\Rightarrow\quad v = \frac{nh}{2\pi m r}\,.$$

Srovnáme-li tento vztah pro rychlost se vztahem z části a) získaný ze silové úvahy, dostaneme

$$\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}} = \frac{nh}{2\pi m r} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{m\pi e^2}\,.$$

Vidíme tedy, že vzdálenost elektronu od jádra nemůže být v Bohrově modelu libovolná, ale může nabývat jen hodnot $r_n = r_0 n^2$, kde n je přirozené číslo, a

$$r_0 = \frac{h^2\varepsilon_0}{m\pi e^2} \doteq 5{,}3\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m} = 0{,}53\ \text{Å}$$

se nazývá *Bohrův poloměr*.

c) Z úkolů a) a b) odvodíme, že elektronu na n-té hladině odpovídá energie

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2} = -1\,\mathrm{Ry} \cdot \frac{1}{n^2} \doteq -13{,}6\,\mathrm{eV} \cdot \frac{1}{n^2}\,.$$

Tento vztah definuje energetickou jednotku atomové fyziky – Rydberg (Ry). Při přeskoku elektronu z n-té do m-té hladiny se vyzáří foton o energii

$$\Delta E_{nm} = E_n - E_m = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Podle Planckovy hypotézy je energie fotonu přímo úměrná frekvenci, tj. $E = hf$

$$f_{nm} = \frac{\Delta E_{nm}}{h} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Jarda Trnka
jarda@fykos.mff.cuni.cz