Jednotky na planetě Balónků

Každá fyzikální soustava, chce-li dosáhnout nějakého fyzikálního uplatnění (výsledku), musí ze vstupních dat vyprodukovat číslo krát tzv. rozměr tohoto čísla. Všechna odvození v následujících řešeních uděláme v soustavě SI.

Když vyjadřujeme délku, hustotu, tlak apod. pomocí čísel, vždy musíme za napsanými ciframi uvést také jednotky, ve kterých jsme měřili. Naměřili jsme délku 12 centimetrů nebo 12 stop? Či např. osvětlení: je to 1 lux nebo Hefnerova svíčka na čtverečný yard? Jednotka je nedílnou součástí výsledku.

V našem případě máme dvě soustavy jednotek. První je soustava SI (tvořena metrem, sekundou, kilogramem, mol . . .), druhá je balonkovská soustava ŠTLM (špurgl, temp, luftík, muška, . . .). Každou fyzikální veličinu umíme převést z jedné soustavy jednotek do druhé.

Z nápovědy v první úloze (*Každý Balónek má maximálně jeden provázek.*) jste měli usoudit, že Balónci počítají ve dvojkové soustavě. Všechny číselné hodnoty byly proto zadané ve dvojkové soustavě a tak s nimi bylo potřeba nakládat. Řešení úloh uvádějí výsledky jak ve dvojkové tak v desítkové soustavě.

Zuzka Safernová & Honza Prachař

19. ročník, úloha IV . 1 ... *turnaj Balónků* *(4 body; průměr 2,72; řešilo 43 studentů)*

Kdesi v dalekém vesmíru za 1001 hvězdami a jednou černou dírou byla nebyla planeta Balónků. Tyto inteligentní duté bytosti každý rok pořádají soutěž „Čím výš, tím líp“.

Každý z balónků si přiváže provázek, aby bylo možné určit jeho výšku. Aby se mohli Balónci účastnit soutěže, musí mít všichni stejné parametry. Kupodivu nikdo zatím nikdy nevyhrál. Délková hustota provázku je 11 luftíků na špurgl, hustota atmosféry je 110101 luftíků na krychlový špurgl, poloměr každého z balónků je 10 špurglů, hmotnost Balónka je 10 luftíků. Při pádu tělesa v tíhovém poli na planetě Balónků se za každý temp jeho rychlost zvýší o 111 špurglů za temp. Určete, jakou maximální výšku Balónka hlavní rozhodčí soutěže naměří a jak se bude Balónek pohybovat po dosažení této výšky. Nezvednutá část provázku každého Balónka leží volně na zemi. Závody Balónků probíhají v malých výškách, kde je hustota atmosféry přibližně konstantní.

Nápověda: Každý Balónek má maximálně jeden provázek.

Úlohu zná Petr Sýkora od doc. Šímy.

Představme si, že držíme kulatý balónek objemu V a hmotnosti M, k němuž je přivázaný provázek délkové hustoty τ, jehož konec volně leží na zemi. Atmosféra má hustotu ϱ, velikost tíhového zrychlení označíme g. Teď balónek pustíme – jaké síly na něj působí? Vztlaková síla velikosti $V\varrho g$ jej bude tahat nahoru, tíhová velikosti Mg dolů, když balónek trochu vystoupí, provázek ho začne tahat nějakou silou velikosti F_p směrem dolů, a pokud se hýbe, působí na něj také odporová síla velikosti F_o, a to vždy směrem proti okamžité rychlosti.

Najděme rovnovážnou výšku h_0 balónku, ve které se síly působící na balónek přesně ruší. Vztlakovou sílu působící na provázek zanedbáme; předpokládáme, že hustota provázku je mnohem větší než hustota vzduchu. (Stejně by to znamenalo pouze menší efektivní τ.) Výsledná síla působící na balónek má velikost

$$0 = F = V\varrho g - Mg - \tau h g$$

a rovnovážná výška je

$$h_0 = \frac{V\varrho - M}{\tau} = 1\,001\,001\,111_{[2]}\ \text{špurglů} = 591_{[10]}\ \text{špurglů}\,.$$

Jak bude vypadat pohyb balónku? Jak si všimli *Lukáš Stříteský* a *Jakub Michálek*, jsou v podstatě tři možnosti, jak bude pohyb vypadat, závisející na velikosti odporu proti pohybu:

- velký odpor – balónek se pomalu doplazí k rovnovážné poloze,
- mezní odpor – balónek projde rovnovážnou polohou, překmitne a shora se doplazí do rovnovážné polohy,
- malý odpor – balónek projde rovnovážnou polohou vícekrát, kmitá, přičemž perioda jeho pohybu závisí na tlumení, tlumenými kmity se postupně přibližuje k rovnovážné poloze.

Někteří z vás nebyli s tímhle řešením spokojeni a chtěli zjistit přesněji, co se bude s balónkem dít. Abychom to udělali, vrátíme se k analýze sil a sestavíme pohybovou rovnici. Je třeba ale zdůraznit, že následující úvahy budou také nepřesné. To, co získáme, nebude přesná předpověď pohybu balónku, ale hrubý, i když zajímavý pohled na jeho chování.

Pohybová rovnice balónku je

$$M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}} + \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{o}}\,,$$

kde síly jsou po pořádku vztlaková, tíhová, od provázku a odporová. Všechny síly působí ve svislém směru, takže v dalším budeme psát jenom jednu rovnici pro svislé složky sil.

Určíme velikost síly od provázku. V některých vašich řešeních se vyskytl předpoklad, že velikost síly F_{p} je stejná jako velikost tíhové síly působící na provaz. Ale síla F_{p} nejenže vyrovnává tíhovou sílu, ale také navíc urychluje ležící část provázku. Takže F_{p} bude větší než $\tau h g$. Abychom si úlohu zjednodušili, budeme předpokládat, že energie se ztrácí pouze v důsledku odporu vzduchu a žádné jiné ztráty nenastávají (např. v provázku). Síla velikosti F_{p} působí na provaz směrem nahoru a při povytáhnutí o kousek $\mathrm{d}h$ vykoná práci $F_{\mathrm{p}}\,\mathrm{d}h$. Ta se rovná přírůstku pohybové a polohové energie provázku.

Podívejme se na okamžik t, kdy je balónek ve výšce h a provázek má rychlost v, hmotnost m, a na okamžik $t+\mathrm{d}t$, kdy jsou veličiny větší o $\mathrm{d}h$, $\mathrm{d}v$ a $\mathrm{d}m$. Přírůstek energie provazu je $F_{\mathrm{p}}\,\mathrm{d}h = \mathrm{d}E_{\mathrm{k}} + \mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$, takže

$$F_{\mathrm{p}}\,\mathrm{d}h = \tfrac{1}{2}v^2\,\mathrm{d}m + mv\,\mathrm{d}v + \tfrac{1}{2}gh\,\mathrm{d}m + \tfrac{1}{2}mg\,\mathrm{d}h \quad\Rightarrow\quad F_{\mathrm{p}} = \tfrac{1}{2}\tau v^2 + \tau h(a+g)\,.$$

Použijeme lineární a kvadratickou závislost velikosti odporové síly na rychlosti $F_{\mathrm{o}} = Av + C\pi R^2\varrho v^2/2$; směr odporové síly je vždy opačný než směr rychlosti. Pohybová rovnice balónku tedy je

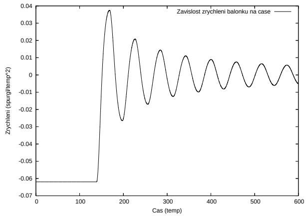
$$(M+\tau h)\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = (V\varrho - M - \tau h)g - A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{2}\left[\tau + C\pi R^2\varrho\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)\right]\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

a hledáme funkci $h(t)$.

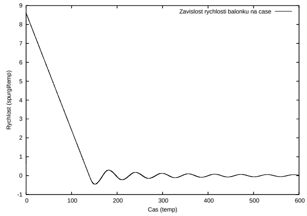
Tvarový součinitel pro kouli je přibližně[1] $C = 1/2$, jak ale odhadnout A? Závisí na viskozitě prostředí, kterou nevíme. Lze očekávat, že vliv lineárního členu na pohyb bude převládající až blízko rovnovážné polohy, když se balónek pohybuje pomalu – velmi velké A způsobí, že balónek nebude kmitat, ale jenom se pomalu doplazí do rovnovážné polohy. Naopak vliv kvadratického členu bude silnější, když se balónek pohybuje velmi rychle. Abychom alespoň něco zjistili, zvolíme $A = 0$.

[1] D. Ilkovič: Fyzika, SVTL 1962, Bratislava

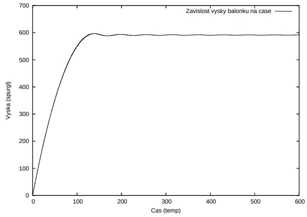
Zrychlení balónku je složitou funkcí h a v, takže kamarád počítač bude mít práci. Řešit takovouhle rovnici můžeme pomocí počítače např. takto. Z rovnice můžeme vypočítat zrychlení a, z něho dokážeme vypočítat novou rychlost po uplynutí času Δt jako $v(t + \Delta t) = v(t) + a\Delta t$, z ní umíme vypočítat, jak se v následujícím okamžiku balónek pohne $y(t+\Delta t) = y+v\Delta t$. Tyto hodnoty dosadíme do pohybové rovnice a vypočítáme nové zrychlení, tak můžeme vypočítat mnoho bodů a pak je vynést do grafu (obrázky 1, 2 a 3).



Obr. 1. $a(t)$



Obr. 2. $v(t)$



Obr. 3. $h(t)$

Podívejme se na výsledek. Balónek si to od počátku šine jednoznačne nahoru a velmi rychle dosáhne maximální rychlosti (tak rychle, že to na grafu není vidět). Poté zrychlení spadne do záporných hodnot a balónek rovnoměrně zpomaluje, dosahuje maximální výšky 597 špurglů a tlumeně kmitá kolem své rovnovážné polohy. Vidíme, že balónek je *silně brzděn* a jeho maximální výška je téměř totožná s rovnovážnou.

Není teď těžké říci, jaké výsledky by dal náš model pro zvětšující se A. Větší A znamená větší odporovou sílu, tj. pomalejší vzestup nahoru, ještě větší pak nekmitavý pohyb – Balónek se bude pomalu přibližovat rovnovážné poloze. V každém případě se Balónek výš než do výšky 597 špurglů nedostane. Samozřejmě, náš model není právě nejdokonalejší, odporovou sílu jsme jenom střelili a podobně to bylo s předpokladem ideálního provázku. Ve skutečnosti se jiné vlivy a hlavně vítr nezanedbatelně projeví a někam našeho Balónka zavanou.

Ján Lalinský
jano@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.