**17. ročník, úloha III . E ... *Země je kulatá*** *(8 bodů; průměr 4,71; řešilo 31 studentů)*

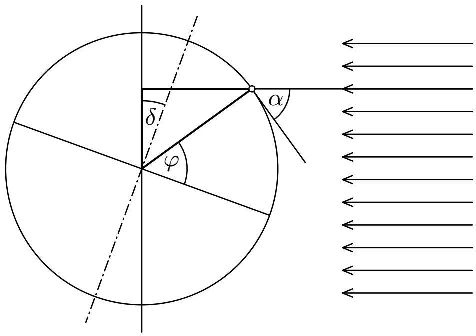
*Určete, na které rovnoběžce se nachází vaše bydliště. Navrhněte co nejvíce metod a alespoň dvě realizujte.* *Úlohu vymyslel Honza Prachař.*

K určení zeměpisné šířky (rovnoběžky) lze dobře využít faktu, že se Země točí kolem své osy. Tento jev se projevuje na chování mechanických soustav, protože se nacházíme v neinerciální soustavě, a také v tom, co pozorujeme na obloze. Dalším projevem rotace Země je její magnetické pole, jehož intenzitu můžeme měřit. K určení zeměpisné šířky lze případně využít sklonu osy rotace vůči ekliptice (rovina v níž obíhá Země kolem Slunce) a kulatosti Země. To způsobuje různé vzdálenosti od Slunce během roku a projevem je například různá teplota na povrchu Země.

## Teorie

Zmíníme zde podrobněji několik metod, které budeme realizovat. Ve všech budeme předpokládat, že Země je dokonalá koule, a zeměpisnou šířkou $\varphi$ bodu X na povrchu Země označíme úhel, který svírá spojnice střed Země – bod X s rovníkovou rovinou.

Začneme nejjednodušší metodou, kterou jste využili téměř všichni řešitelé. Pokud budeme za jasné noci pozorovat oblohu, zjistíme, že se celá otáčí kolem jednoho bodu (příčinnou je již zmíněná rotace Země). Tento nehybný bod se nachází velice blízko Polárky. Uvědomíme-li si, že vzdálenost Polárky od Země je ohromná vzhledem k velikosti Země, je zřejmé, že výška Polárky nad obzorem je rovna zeměpisné šířce, neboť osa zemské rotace míří k ní. Nesmíme ovšem ve výsledku zapomenout na chybu, zbůsobenou nenulovou vzdáleností Polárky od nehybného bodu noční oblohy (tato vzdálenost se během roku mění, vinnou precese zemské osy, nepřesahuje 1°).




Obr. 1

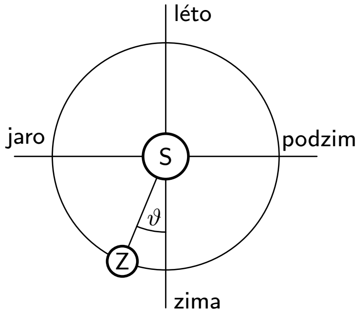
Další možností, jak určit zeměpisnou šířku, je využít pohybu Slunce po obloze. Budeme měřit úhel Slunce nad obzorem $\alpha$ v pravé sluneční poledne. Udělejme řez Zemí, aby v něm ležela zemská osa a spojnice Země–Slunce, jak znázorňuje obr. 1. Pro zeměpisnou šířku potom dostáváme

$$\varphi = 90^\circ + \delta - \alpha, \tag{1}$$

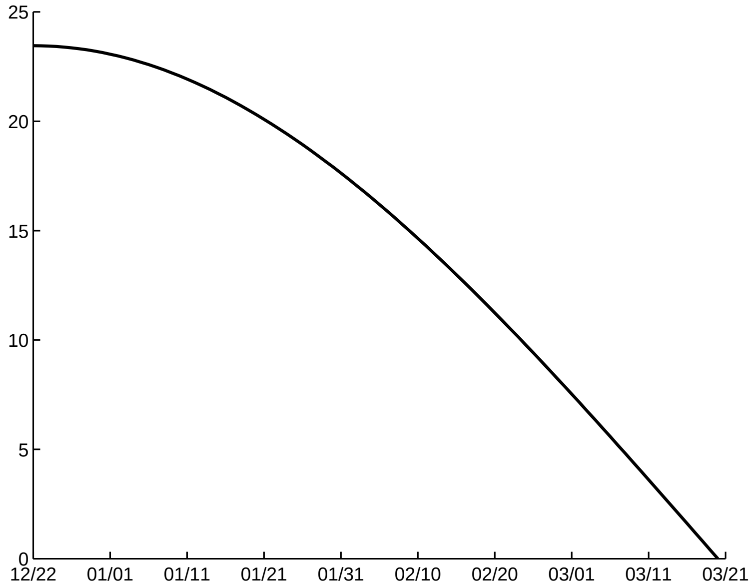
kde $\delta$ značí deklinaci – úhlová vzdálenost Slunce od světového rovníku (v létě je kladná, v zimě záporná, v den rovnodennosti nulová). Zbývá určit deklinaci. Polohu Země na oběžné dráze kolem Země budeme parametrizovat úhlem $\vartheta$ (viz obr. 2), dklon zemské osy vůči ekliptice označíme $\delta_0 = 23^\circ\, 25'$. Po technickém výpočtu, který nebudu uvádět, dostaneme

$$\cos\delta = \sqrt{1 - \sin^2\delta_0 \cos^2\vartheta}. \qquad (2)$$

Předpokládejme, že rychlost oběhu Země kolem Slunce je konstantní, potom bude výpočet úhlu $\vartheta$ z datumu snadný, stačí si uvědomit, že mezi zimou (22. 12. 2003 8:01) a jarem (20. 3. 2004 7:48) opíše průvodič Země na oběžné dráze pravý úhel. Závislost deklinace na datumu je znázorněna v grafu na obr. 3. Ve skutečnosti není rychlost oběhu konstantní, porovnáním skutečných hodnot deklinace z hvězdářské ročenky s hodnotami vypočtenými podle (2) ale zjistíme, že rozdíl činí maximalně 0,15 °, což s ohledem na přesnost našeho měření bude bohatě stačit.




Obr. 2




Obr. 3. Závislost deklinace $\delta$ [°] na datu

Třetí metodu, kterou uvedeme, je meření velikosti tíhového zrychlení. V domácích podmínkách je jednoznačně nejpřesnější měření z doby kmitu matematického kyvadla. Pro velice přesná měření hodnoty tíhového zrychlení se používá gravimetr, který využívá volného pádu. Sestup volně padajícího tělesa ve vakuované nádobě je velmi přesně sledován pomocí laserového interferometru. Interferenční proužky jsou navázány na absolutní standardy délky. Velmi přesné měření času je prováděno pomocí atomových rubidiových hodin. Takto je možné změřit tíhové zrychlení až na sedm platných cifer. O takovéto přesnosti si budeme moci jen zdát.

Neomezíme se pouze na model matematického kyvadla, které má dobu kmitu $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Tím bychom se dopustili chyby v řádu desetin procenta, což si nemůžeme dovolit. Pro periodu malých kmitů fyzického kyvadla platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}\,,$$

kde $l$ je vzdálnost osy otáčení od težiště, $I$ je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení a $m$ hmotnost kyvadla. Tíhové zrychlení potom určíme ze vztahu

$$g = \frac{4\pi^2 I}{T_\mathrm{m}^2 ml}. \tag{3}$$

Kyvadlo jsme realizovali kovovou kuličkou na provázku, jehož moment setrvačnosti je

$$I = \frac{2}{5}Mr^2 + Ml^2 + \frac{1}{3}m(l-r)^2,$$

kde $M$ jsme označili hmotnost kuličky a $m$ hmotnost porvázku. Dosazením do vztahu (3) obdržíme

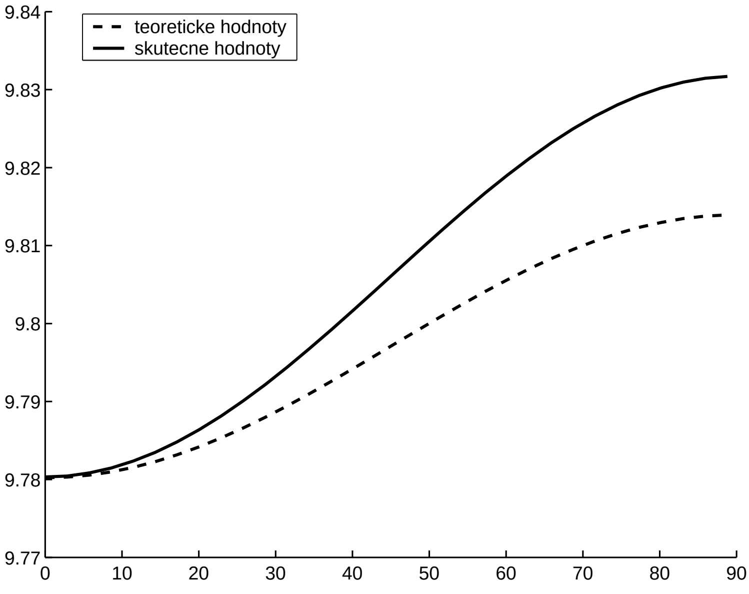
$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_\mathrm{m}^2}\frac{M}{m+M}\cdot\left(1+\frac{2}{5}\left(\frac{r}{l}\right)^2+\frac{1}{3}\frac{m(l-r)^2}{Ml^2}\right). \tag{4}$$

Nyní potřeba přiřadit naměřenému tíhovému zrychlení zeměpisnou šířku. Tíhové zrychlení je vektorový součet odstředivého $a_\mathrm{o}$ a gravitačního $a_\mathrm{g}$ zrychlení. Pokud budeme předpokládat

$$a_\mathrm{o} = \omega^2 R\cos\varphi, \qquad a_\mathrm{g} = \varkappa\frac{M}{R^2},$$

kde $\omega$ je úhlová rychlost rotace Země, $R$ je poloměr Země a $M$ je hmotnost Země, dostaneme

$$g = \sqrt{\varkappa^2\frac{M^2}{R^4}+\omega^2\left(\omega^2R^2-2\varkappa\frac{M}{R^2}\right)\cos^2\varphi}. \tag{5}$$




Obr. 4. Závislost tíhové zrychlení $g$ [m·s$^{-2}$] na zaměpisné šírce $\varphi$ [°]

Experimenty ukazují, že je tento vztah dost nepřesný. Chybu zanáší předpoklad kulatosti Země, o které víme, že je na pólech zploštělá. Vyřešíme to tím, že budeme používat empirický vztah pro závislost tíhového zrychlení na zeměpisné šířce[1]

$$g = 9,7803185 \cdot (1 + 0{,}005278895 \cdot \sin^2 \varphi - 0{,}000023462 \cdot \sin^4 \varphi), \tag{6}$$

který se pro naše potřeby velice dobře shoduje se skutečností. Porovnání vztahů (5) a (6) najdete v grafu na obrázku 4. Závislosti se výrazně rozcházejí pro velké zeměpisné šířky.

Vztah (6) samozřejmě nevystihuje vliv slapových sil od Slunce a Měsíce, nadmořské výšky, podloží, okolního terénu. My je bez obav zanedbáme, například změna nadmořské výšky o 1 m zmenší tíhové zrychlení o $3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Poslední metoda, kterou zde podrobněji rozebereme, využívá gyroskopu. Gyroskop je těžký setrvačník upevněný ve svém těžišti (tíhová síla tedy nemá na jeho pohyb vliv). Pro gyroskop vázaný na vodorovnou rovinu platí pohybová rovnice

$$\ddot{\vartheta} + \frac{I_z \Omega w \cos\varphi}{I_x}\vartheta = 0,$$

kde $\vartheta$ je výchylka z rovnovážné polohy (severojižní směr), $\Omega$ je úhlová rychlost rotace Země, $w$ je úhlová rychlost rotace setrvačníku, $I_z$ je moment setrvačnosti gyroskopu vzhledem k ose symetrie a $I_x$ je moment setrvačnosti vzhledem k ose na ni kolmé. Setrvačník tedy bude kmitat kolem severojižního směru s úhlovou rychlostí

$$\omega_\mathrm{v} = \sqrt{\frac{I_z \Omega w \cos\varphi}{I_x}}.$$

Podobně pro gyroskop vázaný na svislou rovinu, jehož normála má severojižní směr, platí pohybová rovnice

$$\ddot{\vartheta} + \frac{I_z \Omega w \sin\varphi}{I_x}\vartheta = 0.$$

Setrvačník tedy bude kmitat kolem svislého směru s úhlovou rychlostí

$$\omega_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{I_z \Omega w \sin\varphi}{I_x}}.$$

Pro zeměpisnou šířku tedy dostáváme vztah

$$\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{\omega_\mathrm{s}}{\omega_\mathrm{v}}\right)^2. \tag{7}$$

Při realizaci však můžeme narazit na problém, jak upevnit strvačník v těžišti při kmitech ve svislé rovině. Vychodiskem může být následující postup. Setrvačník zavěsíme na provázek, aby splýval s jeho osou, vytvoříme tak kyvadlo. Pokud setrvačník nerotuje, je úhlová rychlost tohoto kyvadla

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgl}{I_x + ml^2}},$$

[1] Na `http://gretchen.geo.rpi.edu/roecker/AppGeo96/lectures/gravity/gravoutline.html` najdete veškeré podrobnosti týkající se tíhového zrychlení.

kde $m$ je hmotnost setrvačníku a $l$ je vzdálenost závěsu od těžiště. V případě, že rotuje,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mgl}{I_x + ml^2} \pm \frac{I_z \Omega w \sin\varphi}{I_x + ml^2}},$$

znaménko v odmocnině závisí na směru rotace. Z posledních dvou vztahů dostáváme vztah

$$\omega_{\mathrm{s}}^2 = \pm(\omega_2^2 - \omega_1^2)\frac{g}{g - \omega_1^2 l}, \tag{8}$$

který nám umožní určit $\omega_{\mathrm{s}}$ pomocí jiných dvou měření. Nevýhoda této metody je v tom, že frekvence $\omega_1$ a $\omega_2$ jsou relativně blízké, to bude zanášet velkou chybu, neboť obě úhlové frekvence od sebe odečítáme.

Existuje ještě spousta dalších možností, jak určit zeměpisnou šířku. Můžeme odměřit polohu slunce několikrát za den a tím určit rovinu, ve které se pohybuje. Rovněž můžeme pozorovat pohyb libovolné hvězdy po obloze, z jejích kulminací lze pak určit zeměpisnou šířku. Neinerciálnost soustavy spojené se Zemí se projevuje Coriolisovou silou, kterou se můžeme pokusit pozorovat. Jedním z jejich projevů je například stáčení roviny kmitů kyvadla (Foucaltovo kyvadlo), to je ale obtížné v domácích podmínkách naměřit. Dále můžeme zjišťovat směr a velikost intenzity magnetického pole Země za pomoci kmitů tyčového magnetu.

### *Postup měření*

Měření výšky Polárky nad obzorem je nejméně náročný experiment, který dává relativně přesné výsledky. Většina řešitelů se do jeho realizace pustila, z toho důvodu jsme se rozhodli ho neprovádět. Ukážeme zde jiné experimenty, na které si tolik řešitelů netrouflo.

Výšku Slunce nad obzorem jsme měřili pomocí délky stínu vržené svislou tyčkou. Na to se nám hodila překližka, kterou jsme rozřezali na deset plátků. Každý plátek jsme na straně, která bude nahoře, zašpičatili. Ustavili jsme si vodorovnou plochu a pokryli ji papírem, aby bylo možné zaznaménávat polohy stínu. Potom jsme svisle upevnili připravené plátky z překližky, aby vrhaly stín na naši kreslící plochu. Pak už jen stačilo zaznamenávat délky stínů zhruba od půl dvanácté, dokud nebyly nejkratší (pravý sluneční čas není totožný se středoevropským, vinou nerovnoměrnosti rychlosti oběhu kolem Slunce se jejich rozdíl během roku mění).

Dobu deseti kmitů našeho kyvadla jsme měřili čítačem, který měří dobu uplynutou mezi dvěma určenými průchody kyvadla dolní rovnovážnou polohou. Zde byla osvětlená fotodioda, která byla při průchodu kyvadla dolní rovnovažnou polohou zastíněna, a čítač odstartoval nebo zastavil stopky. Čítač měřil čas na 6 platných cifer, chyba je na jeho poslední cifře. Vzdálenost $r$ jsme měřili posuvným měřítkem, délku $l$ pásovým metrem (dílek 1 mm).

Jako gyroskop jsme použili ruční frézku, která splňuje přepoklady těžkého setrvačníku, neboť její otáčky dosahují až $300\,\mathrm{ot{\cdot}s^{-1}}$. Nejprve jsme ji zavěsili nad těžištěm, aby kmitala ve vodorovné rovině, a měřili dobu dvou jejích kmitů $T_v$. Frézka kmitala kolem severojižního směru. Bylo možné měřit pouze dobu dvou kmitů, neboť kmitání bylo velice pomalé, a když se přitlumilo, bylo málo patrné. Poté jsme frézku zavěsili, aby lanko splývalo s její osou, a měřili dobu sta kmitů tohoto kyvadla při zapnutém ($T_2$) a vypnutém ($T_1$) motoru. Měření $T_1$ a $T_2$ musí být obzvláště pečlivé, protože ve vzorci (8) vystupuje jejich rozdíl a obě periody jsou velice blízké. Proto jsme se rozhodli měřit periody sta kmitů.

*Výsledky měření*

Svinovacím metrem naměřené hodnoty délek tyček $h$ z překližky a délek jejich stínů $d$ uvádíme v následující tabulce spolu s vypočtenými úhly $\alpha$ podle vztahu

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{d}.$$

| $d$ [cm] | 40,00 | 41,60 | 40,30 | 40,55 | 40,60 | 41,40 | 41,05 | 40,85 | 41,55 | 41,70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ [cm] | 29,40 | 29,60 | 29,35 | 29,35 | 29,50 | 29,55 | 29,55 | 29,40 | 29,60 | 29,65 |
| $\alpha$ [°] | 36,32 | 35,43 | 36,07 | 35,90 | 36,00 | 35,52 | 35,75 | 35,74 | 35,47 | 35,41 |

Průměrná hodnota je $\bar{\alpha} = 35{,}76°$. Měření jsem provedl 7. března 2004, tomuto dni odpovídá podle (2) deklinace $\delta = -5{,}2° \pm 0{,}2°$. Pro zeměpisnou šířku podle (1) dostáváme

$$\varphi = 49{,}04°.$$

Zbývá určit chybu. Chybu měření veličiny $h$ vezmeme jako polovinu dílku měřidla $\Delta h = 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Chyba veličiny $d$ je větší, neboť stín, jehož délku jsme měřili, měl neostrý okraj, $\Delta d = 1\,\mathrm{mm}$. Chybu úhlu $\alpha$ potom určíme podle lineárního zákona hromadění chyb

$$\Delta\alpha = \left|\frac{\partial\alpha}{\partial h}\right| \Delta h + \left|\frac{\partial\alpha}{\partial d}\right| \Delta d = \frac{1}{\frac{h}{d} + \frac{d}{h}} \cdot \left(\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta d}{d}\right) = 3{,}9°.$$

Statistickou chybu můžeme zřejmě zanedbat. Uvážíme-li i chybu v určení deklinace, dostáváme výsledek

$$\varphi = 49° \pm 4°.$$

Naměřené hodnoty doby deseti kmitů kyvadla zhotoveného z mosazné kuličky zavěšené na provázku uvádíme v následující tabulce.

| č. m. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $10T$ [s] | 20,1002 | 20,1007 | 20,1006 | 20,1001 | 20,0990 | 20,1004 |

| č. m. | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $10T$ [s] | 20,1014 | 20,1010 | 20,1011 | 20,0997 | 20,0999 | 20,0993 |

Průměrná hodnota a směrodatná odchylka jsou

$$\bar{T} = 2{,}01003\,\mathrm{s}, \qquad s_{\mathrm{sm}} = 0{,}00002\,\mathrm{s}.$$

Vzdálenost závěsu kyvadla od těžiště je $l = (1005 \pm 1)\,\mathrm{mm}$, hmotnost kuličky $M = 55{,}60\,\mathrm{g}$, hmotnost provázku $m = 0{,}1376\,\mathrm{g}$, poloměr kuličky $r = (11{,}9 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$ a amplituda výchylky $A \approx 2\,\mathrm{cm}$ (tomu odpovídá úhlová amplituda $\alpha \approx 0,02$). Změřené hodnoty hmotností můžeme vzhledem k ostatním chybám považovat za přesné. Docházelo k malým výchylkám kyvadla, můžeme proto bez obav zanedbat jejich vliv na dobu kmitu. Pro výpočet hodnoty tíhového zrychlení použijeme vztah (4).

$$g = 9{,}805\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Nakonec určíme chybu této veličiny, použijeme lineární zákon hromadění chyb, neboť všechny naše chyby jsou systematické. Pro výpočet vycházíme ze vztahu (4), chybu veličiny v závorce lze zanedbat, neboť je velice blízká jedné. Pro relativní chyby tedy vychází

$$\delta g \approx 2\delta T + \delta l \approx \delta l = 0,001.$$

Výsledná hodnota tíhového zrychlení je

$$g = (9{,}805 \pm 0{,}010)\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Ze vztahu (6) potom určíme rozmezí zeměpisných šířek, které tomuto tíhovému zrychlení odpovídají. Dostáváme

$$\varphi = 44^\circ \pm 12^\circ.$$

Zbývá poslední metoda. Vzdálenost závěsu od těžiště frézky při kmitání ve svislé rovině byla $l = (395 \pm 2)$ mm. Naměřené periody kmitání frézky v různých polohách, jak je popsáno výše, uvádíme v následující tabulce. Jsou zde rovněž vypočtené příslušné úhlové rychlosti podle vztahu $\omega = 2\pi/T$.

Průměrné hodnoty a jejich směrodatné odchylky jsou

$$\bar{\omega}_1 = 4{,}8316\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}, \quad s_{\omega_1} = 0{,}0006\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}},$$
$$\bar{\omega}_2 = 4.8224\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}, \quad s_{\omega_2} = 0{,}0005\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}},$$
$$\bar{\omega}_\mathrm{v} = 0{,}6764\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}, \quad s_{\omega_\mathrm{v}} = 0{,}0133\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}.$$

Pro zeměpisnou šířku ze vztahů (8) a (7) dostáváme

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)g}{\omega_\mathrm{v}^2(g - \omega_1^2 l)} = 72{,}8^\circ. \tag{9}$$

Opět se zamyslíme nad chybou této hodnoty. Chyba měření času způsobená nedokonalými reakcemi člověka je asi 0,1 s, což způsobuje relativní chybu $\delta_\mathrm{m}\omega$. Celkové chyby úhlových frekvencí podle

$$\delta\omega = \sqrt{(\delta_\mathrm{m}\omega)^2 + \left(3\frac{s_\omega}{\omega}\right)^2}$$

jsou

$$\delta\omega_1 = 0{,}00086, \quad \delta\omega_2 = 0{,}00083, \quad \delta\omega_\mathrm{v} = 0{,}059.$$

Celkovou chybu určíme tak, že do vztahu (9) dosadíme krajní hodnoty jednotlivých veličin, které jsou určeny jejich chybami. Vychází

$$\varphi_\mathrm{max} = 82{,}7^\circ, \qquad \varphi_\mathrm{min} = 14{,}4^\circ.$$

Hodnota zeměpisné šířky naměřená touto metodou tedy je

$$\varphi = 70^\circ\ {}^{+10^\circ}_{-60^\circ}.$$

### *Diskuse a závěr*

Měření výšky Slunce nad obzorem v pravé sluneční poledne nám dalo nejpřesnější výsledek ze všech metod. Největší chyba je způsobena neostrostí vrženého stínu. Nabízí se to vyřešit tím, že bychom si vzali delší tyč. Stín by sice byl delší, ale zároveň by se zvětšila neostrost, relativní chyba by zůstala stejná. K výraznému zpřesnění bychom museli zvolit jiný zůsob určení výšky Slunce nad obzorem.

Ve druhé metodě jsme měřili velice přesně, přesto jsme lepšího určení zeměpisné šířky nedosáhli. To je zaviněno tím, že tíhové zrychlení se na zemském povrchu mění až na třetí platné cifře. Díky tomu, že jsme měli k dispozici přesný přístroj na měření času, zanáší jedinou významnější chybu měření vzdálenosti těžiště kyvadla od závěsu $l$. Tuto chybu ale u domácky vyrobeného kyvadla těžko zmenšíme.

Třetí metoda nám ve výsledku o zeměpisné šířce příliš neřekla. Byla by přesná, pokud bychom dokázali upevnit gyroskop, aby kmital ve svislé rovině. Tím, že jsme to obešli a měřili vlastně kmity fyzického kyvadla, jsme si experiment znehodnotili. Hodnoty $\omega_1$ a $\omega_2$ jsou velice blízké, protože kmitání gyroskopu je výrazně pomalejší než kmitání fyzického kyvadla. Odečítání těchto úhlových frekvencí ve vzorci (8) způsobilo obrovskou chybu výsledku.

Shrňme výsledky všech metod:

a) $\varphi = 49^\circ \pm 4^\circ$,
b) $\varphi = 44^\circ \pm 12^\circ$,
c) $\varphi = 70^\circ\ {}^{+10^\circ}_{-60^\circ}$.

Skutečná honota zeměpisné šířky místa, kde jsme prováděli měření, je $50^\circ\,6'\,28''$ (tu můžeme najít v mapě, pomocí GPS, nebo například na serveru `http://www.mapy.cz`). Naměřené hodnoty se v rámci chyb s touto hodnotou shodují.

### *Poznámky k řešením*

Jak již bylo zmíněno, drtivá většina řešitelů využívala k určení zeměpisné šířky Polárku. Našlo se i pár jedinců, kteří určovali polohu Slunce nebo se pokoušeli měřit tíhové zrychlení (což vzhledem malé přesnosti nevedlo k žádným výsledkům). Jiné realizované metody se v řešeních bohužel nevyskytly.

Překvapilo mě (a zároveň zklamalo), že všichni řešitelé považovali odečtení zeměpisné šířky z mapy (či nalezení někde na internetu) za fyzikální experiment. Takto zjištěná hodnota může být použita jedině jako kontrolní údaj. To je, jako kdybychom vám zadali určit elementární náboj a vy ho našli v tabulkách a poslali jako řešení experimentální úlohy.

***Honza Prachař***
`honzik@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.