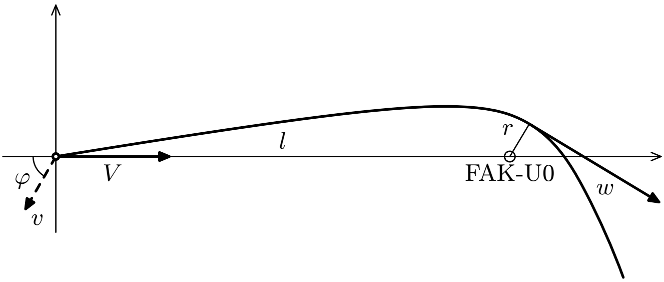
17. ročník, úloha III . 4 ... *kapitán Kork zasahuje* *(5 bodů; průměr 2,00; řešilo 21 studentů)*

Vesmírná loď Escapeprise se vrací z prostoročasové bitvy s Odborgy. Během letu ale posádka zjišťuje, že nešťastnou náhodou směřují přímo do černé díry FAK-U0. Rozhodnou se pro úhybný manévr a kolmo na směr své rychlosti vypustí v jednom okamžiku všechno palivo. Vypočtěte vzdálenost, ve které Escapeprise kolem černé díry proletí. Jakou největší hmotnost může černá díra mít, nemá-li do ní Escapeprise spadnout? Jako bonus se zamyslete nad tím, zda kapitán Kork mohl úhybný manévr vymyslet chytřeji. Hmotnost samotné lodě je M, paliva m. Rychlost lodě ve velké vzdálenosti od černé díry je V a směřuje do středu černé díry. Rychlost vypuštěného paliva je v a úhybný manévr proběhl též velmi daleko od černé díry. *Vymyslel Jarda Trnka při sledování svého oblíbeného seriálu.*

Označme počáteční vzdálenost od černé díry l, nejmenší vzdálenost r, hmotnost černé díry D a rychlost lodi v nejbližším místě od středu černé díry w.



Obr. 1

Prvním úkolem je určení výsledné rychlosti rakety po provedení úhybného manévru. Nechť spojnice rakety a středu černé díry je osa x, osa na ní kolmá bude osa y a poloha počátku bude totožná s polohou rakety těsně po úhybném manévru. Předpokládejme teď, že kapitán Kork palivo vypustí pod nějakým úhlem φ vůči ose x. Ze zákona zachování momentu hybnosti dostaneme

$$v_x = V + \frac{m}{M} v \cos\varphi\,, \tag{1}$$

$$v_y = \frac{m}{M} v \sin\varphi\,. \tag{2}$$

Dále vyjdeme ze dvou zákonů zachování, a to zachování energie a momentu hybnosti. Protože v nejbližším bodě od černé díry je vektor rychlosti kolmý na spojnici lodi a středu černé díry, platí pro zákon zachování hybnosti

$$L = Mlv_y = Mrw. \tag{3}$$

Ze zákona zachování energie dostaneme

$$\frac{1}{2}M(v_x^2 + v_y^2) - \frac{GMD}{l} = \frac{1}{2}Mw^2 - \frac{GMD}{r}. \tag{4}$$

Vyjádříme z (3) rychlost w a dosadíme do (4), přitom uvážíme, že pro $l \gg r$ můžeme potenciální energii v počáteční poloze zanedbat.

$$\frac{1}{2}M(v_x^2 + v_y^2) = \frac{Ml^2 v_y^2}{2r^2} - \frac{GMD}{r}.$$

Dosadíme-li (1) a (2) do (4) a uvážíme-li, že ze zadání je $\varphi = 90^\circ$, vyjde

$$V^2 + \frac{m^2 v^2}{M^2} = \frac{l^2 m^2 v^2}{r^2 M^2} - \frac{2GD}{r}. \tag{5}$$

Z toho úpravou dostaneme kvadratickou rovnici pro r.

$$r^2 \left(V^2 + \frac{m^2 v^2}{M^2} \right) + 2GDr - \frac{l^2 m^2 v^2}{M^2 r^2} = 0. \tag{6}$$

Rovnice (6) má dvě řešení, fyzikální smysl má jen jedno, které se dá upravit na tvar

$$r = \frac{\sqrt{G^2 D^2 M^4 + (V^2 M^2 + m^2 v^2) l^2 m^2 v^2} - GDM^2}{M^2 V^2 + m^2 v^2}.$$

Tím jsme odpověděli na první otázku.

Dále je potřeba zjistit kritickou hmotnost černé díry. V této situaci bude nejbližší vzdálenost lodě od středu černé díry rovna kritickému, tzv. Schwarzschildovu, poloměru, pro který platí

$$r_\mathrm{g} = \frac{2GD}{c^2} \tag{7}$$

Tento vztah se dá odvodit, když si uvědomíme, že úniková rychlost z této vzdálenosti je rovna rychlosti světla. V rovnici (5) dosadíme $r = r_\mathrm{g}$ a vyjádříme hmotnost D.

$$D = \frac{r_\mathrm{g}}{2G} \left(\frac{m^2 v^2}{M^2} \left(\frac{l^2}{r_\mathrm{g}^2} - 1 \right) - V^2 \right).$$

Po dosazení z (7) za r_g vyjde po úpravách

$$D = \frac{mvlc^2}{2GM \sqrt{V^2 + c^2 + \frac{m^2 v^2}{M^2}}}.$$

To je tedy odpověď na druhou otázku. Zbývá vyřešit bonus.

Jde vlastně o analogický výpočet, jen nedosazujeme za φ. Vyjádříme velikost D stejným způsobem, jen nebudeme za v_x a v_y prozatím dosazovat, vyjde

$$D = \frac{r_\mathrm{g}}{2G} \left(\frac{l^2 v_y^2}{r_\mathrm{g}^2} - v_y^2 - v_x^2 \right).$$

Dosadíme teď do tohoto vztahu za v_x a v_y z (1) a (2) a také za r_g. Stejným způsobem vyjádříme velikost D. Po všech dosazeních a úpravách vyjde

$$D = \frac{mlvc^2 \sin\varphi}{2GM \sqrt{V^2 + c^2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 v^2 + \frac{2mvV\cos\varphi}{M}}}.$$

Tento vztah udává závislost $D = D(\varphi)$. Budeme hledat extrém této funkce, tedy úhel, pro který je derivace $\mathrm{d}/\,\mathrm{d}\varphi$ nulová. Pokud tedy tento vztah zderivujeme a derivaci položíme rovnu nule, dostaneme řešení ve tvaru

$$\varphi = \arccos \left(\sqrt{\left(\frac{Mc^2 + mv^2 + MV^2}{2mvV} \right)^2 - 4} - \frac{Mc^2 + mv^2 + MV^2}{2mvV} \right).$$

Příslušné výpočty si můžete vyzkoušet za cvičení.

Pár slov k došlým řešením. Málo z vás si uvědomilo, že k výpočtu je nutné použít zákon zachování momentu hybnosti či 2. Keplerův zákon. Jen ze ZZE se úloha vyřešit nedala, jak si mnozí z vás mysleli. Další chybou byla nesprávná úvaha, že se dá vliv černé díry během letu zanedbat. To by tam ta černá díra vůbec nemusela být a řešili bychom pohyb volné částice.

Jarda Trnka
`jarda@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.