## *Milí řešitelé!*

Konečně dostáváte do rukou autorská řešení první série FYKOSu společně se svými opravenými úlohami. Ve vzorových řešeních se dozvíte nejen, jak mělo vypadat řešení správné, ale i jaké jste dělali nejčastěji chyby apod. S jakýmikoliv dotazy či nesrovnalostmi se můžete obrátit na opravovatele úloh, jejichž e-maily jsou uvedeny pod příslušným vzorovým řešením.

Na konci brožury najdete výsledkovou listinu po jednotlivých ročnících. U Studenta Pilného je napsán plný počet bodů za příslušné úlohy. Pokud jste dostali bodů více než on, znamená to, že se vaše řešení opravovateli líbilo natolik, že vám udělil prémii. Ve sloupci označeném „**I**“ je uveden součet bodů za aktuální sérii, ve sloupci „**%**“ procentový zisk z úloh, které jste letos poslali. A ve sloupci posledním je uveden celkový počet bodů získaný za aktuální ročník.

Dále bychom chtěli požádat ty, kteří nám letos ještě **neposlali řešení žádné úlohy, a přesto chtějí dále dostávat nová zadání a vzorová řešení**, aby nám napsali dopis či mail. Pokud tak neučiní, další poštu již od nás letos dostávat nebudou. Až příští rok jim z propagačního oddělení přijde zadání první série příštího ročníku.

***vaši organizátoři***

## *Soutěž*

**O co se hraje?** Na prvních deset hledačů chyb čekají trička FYKOSu a na několik nejlepších navíc hodnotné knihy.

**Kdo vyhrává?** Ten, kdo v zadáních a komentářích, výsledkových listinách atd. tohoto ročníku najde a oznámí (mailem či poštou) nejvíce pravopisných či věcných chyb.

**Jak máte chyby psát?** Uveďte, kde přesně chyba je a v čem spočívá. U věcných, fyzikálních či závažných stylistických chyb zdůvodněte. Příklad (fiktivní): Číslo 1 (najdete v pravém horním roku stránky), strana 3, 3. odstavec: Chybí čárka ve větě: "Ze speciální teorie relativity víme, že … "

**Jak se bude vyhodnocovat?** Za chyby nalezené v každém z čísel 3 až 7 (první dvě se počítají spolu se třetím) dostanete podle počtu a závažnosti vámi nalezených chyb 0 až 10 bodů. Chyby objevené více řešiteli se započítávají všem. Na konci vyhrávají řešitelé s nejvyšším součtem. Body za chyby a za úlohy spolu samozřejmě nijak nesouvisí. V průběhu ročníku vám budeme posílat průběžné pořadí.

**Proč tato soutěž?** Ulehčíte nám práci na korekturách při přípravě ročenky. Zamyslíte se nad tím, zda vám nepodsouváme nesmysly.

# Zadání III. série

*Termín odeslání: 2. února 2004*

## Úloha III . 1 ... *na oběžné dráze*

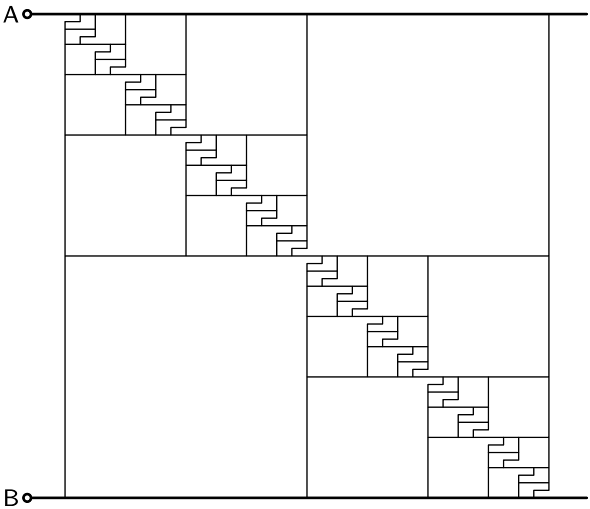
Tři stejné družice obíhají po kružnici kolem malé planetky rychlostí $v$ tak, že jsou neustále ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Určete jejich hmotnost, která není zanedbatelná vůči hmotnosti planetky.

## Úloha III . 2 ... *cvrnkání kuliček*

Organizátoři FYKOSu hráli kuličky. Po chvíli si všimli, že když se trefí do prázdné kulové jamky, kulička na dně kmitá kolem rovnovážné polohy. Určete frekvenci těchto malých kmitů. Jamka má poloměr $R$, poloměr kuličky je $r$ a její hmotnost je $m$. Smykové tření mezi kuličkou a povrchem jamky je dostatečně veliké, aby při kutálení nedocházelo k prokluzování. Nápověda: je-li $\varphi$ malé, můžete použít rovnost $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \varphi$ a použít analogii s pohybem závažíčka na pružince.

## Úloha III . 3 ... *odporová síť*

Jaký je odpor mezi body A a B odporové sítě na obrázku 1? Svislé úsečky mají odpor $R$ a vodorovné odpor nemají. Síť je nekonečná, na obrázku je z technických důvodů jen konečná iterace.




Obr. 1. Nekonečná odporová síť

**Úloha III . 4 ... *kapitán Kork zasahuje***

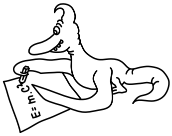
Vesmírná loď Escapeprise se vrací z prostoročasové bitvy s Odborgy. Během letu ale zjišťují, že nešťastnou náhodou směřují přímo do černé díry FAK-U0. Rozhodnou se pro úhybný manévr a kolmo na směr své rychlosti vypustí v jednom okamžiku všechno palivo. Vypočtěte vzdálenost, ve které Escapeprise kolem černé díry proletí. Jakou největší hmotnost může černá díra mít, nemá-li do ní Escapeprise spadnout? Jako bonus se zamyslete nad tím, zda kapitán Kork mohl úhybný manévr vymyslet chytřeji? Hmotnost samotné lodě je $M$, paliva $m$. Rychlost lodě ve velké vzdálenosti od černé díry je $V$ a směřuje do středu černé díry. Rychlost vypuštěného paliva je $v$ a úhybný manévr proběhl též velmi daleko od černé díry.

**Úloha III . P ... *jede, jede autíčko***

Představte si autíčko, jehož motor má konstantní tažnou sílu $F$, pohybující se rychlostí $v$. Jeho výkon tedy je $P = Fv$. Avšak cyklista jedoucí konstantní rychlostí $u$ pozoruje výkon $P = F(v - u)$. Spotřeba benzínu, která odpovídá výkonu, je však stejná z pohledu cyklisty i stojícího chodce. Vysvětlete tento „paradox“. Odpor vzduchu neuvažujte.

**Úloha III . E ... *Země je kulatá***

Určete, na které rovnoběžce se nachází vaše bydliště. Navrhněte co nejvíce metod a alespoň dvě realizujte.



# *Řešení I. série*

**Úloha I . 1 ... *plovající špunt*** *(3 body; průměr 2,09; řešilo 90 studentů)*

*Máme vědro s vodou a v něm na dně rukou držíme korkový plovák. Takto pustíme vědro ze střechy budovy a zároveň pustíme plovák. Kde se bude plovák nacházet těsně předtím, než vědro narazí na zem? Budova je vysoká 30 m.*

*Úlohu zadal Michael Komm.*

Motto: Kde nic není, ani smrt nebere. (Matouš Ringel)

Na padající vědro se budeme dívat ze soustavy s ním spojené. Tato soustava je neinerciální, vůči inerciální soustavě spojené se zemí se pohybuje se zrychlením $g$, a proto v ní působí setrvačná síla. Hmotnost vody ve vědru označme $M$ a hmotnost špuntu $m$.

K vyřešení tohoto příkladu si stačilo uvědomit, že na vodu působí síla tíhová a síla setrvačná, ale na špunt navíc působí síla vztlaková. Síla tíhová má velikosti $F_\mathrm{G} = Mg$ a síla setrvačná $F_\mathrm{s} = -Mg$. Výslednice sil působících na vodu je tedy nulová. Taktéž výslednice síly tíhové $F_\mathrm{G} = mg$ a setrvačné $F_\mathrm{s} = -mg$ působící na špunt je nulová. Definice síly vztlakové ale říká, že na těleso ponořené do vody působí síla, která je velikostí rovna tíze vytlačené vody. V naší soustavě ale voda žádnou tíhu nemá, proto síla vztlaková, která je jejím důsledkem, má nulovou velikost. Celková síla působící na špunt je tedy nulová, špunt se v naší soustavě spojené s vědrem nemá důvod pohnout z místa a zůstane na dně.

K došlým řešením bych měl ještě poznámku. Mnoho z vás správně přišlo na to, že pokud nezanedbáme odpor vzduchu, špunt u dna nezůstane. Jak vědro padá, má díky odporu vzduchu zrychlení menší než $g$, proto na vodu nějaká síla v soustavě spojené s vědrem působí. Tato síla potom způsobuje vztlakovou sílu, která špunt zvedne. Nakonec dojde k tomu, že se odporová síla vyrovná se silou tíhovou a vědro začne padat rovnoměrně přímočaře. Pak dokonce na špunt působí vztlaková síla stejná, jako když je vědro v klidu.

***Vítek Šípal***
vitek@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha I . 2 ... *zlatá rybka*** *(4 body; průměr 2,53; řešilo 76 studentů)*

*Představte si dva rybáře sedící naproti sobě na březích řeky široké 30 m. Zlatá rybka plavající ve vodě spolkne v jednu chvíli návnadu obou z nich. Vzdálenost od rybky k prvnímu rybáři je 17 m, ke druhému 20 m. V tu chvíli začnou oba rybáři navíjet, pořád rychleji a rychleji avšak oba zrychlují stejně. A my se ptáme, po jaké křivce (před jejím analytickým vyjádřením preferujeme její název) se rybka dostane na přímku mezi oběma navijáky.*

*Z přípravy na slovenskou olympiádu zná Miro.*

Víme, že zrychlení, se kterým oba rybáři navíjejí, je v každém okamžiku stejné. V každém časovém intervalu $\Delta t$ tedy oba rybáři navinou stejný úsek vlasce. Rozdíl délek vlasců proto zůstává konstantní (3 metry). Křivkou, která má konstantní rozdíl vzdáleností od daných dvou pevných bodů – ohnisek (v našem případě rybářů), je hyperbola. Trajektorií rybky bude jen její část. K analytickém vyjádření hledané křivky zvolme počátek souřadnic do středu úsečky spojující oba rybáře a směr osy $x$ k prvnímu rybáři. Označme délku vlasce prvního rybáře $s_1$, délku vlasce druhého rybáře $s_2$. Pak lze z Pythagorovy věty psát

$$s_2^2 = (x + l)^2 + y^2, \tag{1}$$

$$s_1^2 = (l - x)^2 + y^2. \tag{2}$$

$$s_2 - s_1 = \Delta s. \tag{3}$$

Odečtením rovnic (1) a (2) získáme

$$(s_2 - s_1)(s_2 + s_1) = 4xl.$$

Dosazením z (3)

$$\Delta s(2s_1 + \Delta s) = 4xl,$$

$$s_1 = \frac{2xl}{\Delta s} - \frac{\Delta s}{2}.$$

A konečně dosazením do (2) a úpravou

$$\frac{4l^2x^2}{(\Delta s)^2} - 2xl + \frac{(\Delta s)^2}{4} = (l - x)^2 + y^2.$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\Delta s}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{4l^2 - \Delta s^2}}{2}\right)^2} = 1.$$

Poloosy hledané hyperboly jsou $a = \Delta s/2 = 1{,}5\,\mathrm{m}$, $b = \sqrt{4l^2 - \Delta s^2}/2 = 14{,}9\,\mathrm{m}$, její střed bude středem úsečky spojující oba rybáře.

***Jirka Lipovský***
jirka@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha I . 3 ... vrh šikmý vzhůru** *(4 body; průměr 2,23; řešilo 48 studentů)*

*Fykosák se (po absolvování letošního soustředění) rozhodne cvičit v hodu granátem. Nemá ale k dispozici rovný terén, tak hází ve svahu. Směrem dolů dokáže dohodit 62 m, ale proti svahu jen 53 m (udělal mnoho pokusů, takže v obou případech nalezl optimální úhel). Určete sklon svahu.*

*Při nedostatku rovného terénu vymyslel Honza Houštěk.*

Zjistěme, kam nejdále můžeme dohodit. Pro $y$-ovou a $x$-ovou souřadnici šikmého vrhu platí vztah

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2, \;\; x = v_0 t \cos\alpha.$$

Vyjádřením $t$ z $x$-ové souřadnice, dosazením do $y$-ové dostaneme křivku závislou na $\alpha$, po které poletí granát. Celý výraz pak zjednodušíme dosazením výšky $H = v_0^2/2g$.

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \operatorname{tg}^2\alpha - x \operatorname{tg}\alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2} + y = 0,$$
$$x^2 \operatorname{tg}^2\alpha - 4Hx \operatorname{tg}\alpha + x^2 + 4Hy = 0.$$

Rovnice pro $\operatorname{tg}\alpha$ má smysl pouze tehdy, je-li diskriminant větší nebo roven nule.

$$D = 4x^2 \left(4H^2 - x^2 - 4Hy\right) \quad \Rightarrow \quad x^2 \leq 4H^2 - 4Hy,$$

což nám říká, že všechny body, které můžeme zasáhnout šikmým vrhem při dané rychlosti, se nacházejí uvnitř paraboly $x^2 = 4H^2 - 4Hy$. Tato parabola se nazývá ochranná parabola a určuje, kam nejdále můžeme dohodit. Rychlost, kterou Fykosák vyhazuje, je stále co největší, protože se snaží dohodit co nejdále. Fykosák stojí v bodě $[0, 0]$. Rovnici kopce můžeme vyjádřit rovnicí $y = kx$, kde $k = \operatorname{tg}\varphi$ je směrnice přímky a $\varphi$ je úhel kopce. Stačí spočítat průsečíky ochranné paraboly s kopcem.

Eliminací $y$ dostáváme rovnici

$$x^2 + 4Hkx - 4H^2 = 0.$$

Řešením rovnice dostaneme $x$-ové souřadnice dopadu $x_1, x_2$. Dle Viètových vztahů víme

$$x_1 + x_2 = -4Hk, \tag{4}$$
$$x_1 x_2 = -4H^2. \tag{5}$$

Vztah mezi $x$-ovými souřadnicemi a vzdálenostmi $d_1$ (vrh dolů z kopce), $d_2$ (nahoru do kopce) je

$$d_1^2 = \frac{x_1^2}{\cos^2\varphi} = x_1^2(1 + k^2),$$
$$d_2^2 = \frac{x_2^2}{\cos^2\varphi} = x_2^2(1 + k^2).$$

Odtud dostáváme

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{1 + k^2}, \tag{6}$$
$$x_1 x_2 = -\frac{d_1 d_2}{1 + k^2}. \tag{7}$$

Znaménko mínus je zde, protože součin $x$-ových souřadnic musí být záporný. Umocněním (4) na druhou a podělením (5) dostáváme

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{x_1x_2} = -4k^2.$$

Dosazením (6) a (7) získáme

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d_1 - d_2}{2\sqrt{d_1d_2}}.$$

Číselně pak vychází $\varphi \doteq 4{,}5\,°$.

***Karel Tůma***
kajinek@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha I . 4 ... *autíčko závodník*** *(4 body; průměr 2,26; řešilo 58 studentů)*

*Auto zrychlí z klidu na 100 km·h$^{-1}$ za půl minuty, přičemž ujede kilometr. Určete průběh rychlosti tak, aby se minimalizovala maximální velikost absolutní hodnoty zrychlení, kterého auto během pohybu dosáhne.*

*Lehce přeformulovaný nápad Pavla Habudy.*

Logické by bylo uvažovat pohyb s konstantním zrychlením, protože potom by byla i absolutní hodnota zrychlení konstantní a zřejmě i nejmenší (to bychom již lehko dokázali). Problém je v tom, že takový pohyb nesplňuje okrajové podmínky pro dráhu a rychlost. Lehko se můžeme přesvědčit, že konečná rychlost auta nebude maximální dosažená během pohybu (to si můžete ověřit tím, že vynásobíte konečnou rychlost dobou pohybu – vyjde vám méně než 1 km). Je tedy jasné, že nejdříve zrychlí na nějakou rychlost $v_1$ za čas $t_1$ a poté zpomalí na koncovou rychlost $v_2 = 100\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ v čase $t_2 = 30\,\mathrm{s}$.

Přirozené je vzít konstantní zrychlení o velikosti $a$, kterým bude v prvním úseku zrychlovat a v druhém zpomalovat. Potom je i maximální velikost absolutní hodnoty zrychlení rovna $a$. Je třeba dokázat, že tento pohyb skutečně odpovídá podmínkám zadání. V důkazu použijeme myšlenku *Pavla Kocourka*.

Nechť existuje pohyb s maximální absolutní hodnotou zrychlení $a'$, která je ostře menší než $a$. Potom pro rychlost při zrychlování platí $v' \le a't < at$. Při zpomalování bude analogicky platit $v' \le v_2 + a'(t_2 - t) < a(t_2 - t)$. To znamená, že rychlost bude po celou dobu pohybu menší než v případě s konstantním zrychlením a autíčko ujede méně než 1 km. Stejný důkaz by se dal použít pro pohyby, kdy auto chvíli zrychluje a chvíli zpomaluje.

Přistupme teď k výpočtu. Uvážíme-li, že $v_1 = at_1$, dostaneme pro pohyb vztahy

$$s = \frac{1}{2}at_1^2 + at_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2,$$
$$v_2 = at_1 - a(t_2 - t_1) = a(2t_1 - t_2).$$

To je soustava dvou rovnic pro dvě neznámé $t_1$, $a$. Řešením je

$$t_1 = \frac{2v_2t_2 - 2s + \sqrt{4s^2 - 4sv_2t_2 + 2v_2^2t_2^2}}{2v_2},$$
$$a = \frac{v_2}{2t_1 - t_2}.$$

Po dosazení za zadané hodnoty dostaneme $t_1 = 19{,}8\,\mathrm{s}$, $a = 2{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Auto nejdříve zrychluje se zrychlením $a$ po čas $t_1$, poté zpomaluje se zrychlením $-a$ až do času $t_2$.

Elegantní, ale poněkud komplikovanější důkaz sestrojil Matouš Ringel, když využil geometrických vlastností hledané trajektorie. Řešitele bych rozdělil do tří kategorií:

1) Řešitel si nevšiml, že rovnoměrně zrychlený pohyb neodpovídá podmínkám zadání, a tudíž ho uvedl jako ten nejvýhodnější.
2) Řešitel sice vyloučil výše zmíněný pohyb, ale chybně předpokládal, že zrychlení musí být buď lineární, nebo jinou komplikovanější funkcí času.
3) Řešitel vyřešil úlohu správně.

***Jarda Trnka***
jarda@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha I . P ... led a kyselina** *(5 bodů; průměr 0,70; řešilo 37 studentů)*

*Na jeden kilogram ledu o teplotě 0 °C nalijeme 900 g 66% kyseliny sírové, taktéž o teplotě 0 °C. V jakém stavu se systém ustálí, pokud víte, že teplo tání ledu je větší než teplo uvolněné při smísení použité kyseliny a jednoho litru vody?*

*Úloha pochází od doc. Obdržálka.*

Úlohu můžeme vyřešit na základě pozorování z běžného života, bez složitých termodynamických úvah. Nejprve si musíme uvědomit, že led je *pevná látka* jako každá jiná, ačkoliv na něj podvědomě nahlížíme jako na „zmrzlou vodu“, narozdíl od látek jako například kuchyňská sůl, kterou si asi málokdo z nás představuje jako zmrzlou taveninu NaCl.

Všichni víme, že pokud nasypeme do vody sůl (pevnou látku 780 °C pod bodem tání), rozpustí se. Porovnáme-li měrná skupenská tepla tání $519\,\mathrm{J{\cdot}g^{-1}}$ (NaCl) a $334\,\mathrm{J{\cdot}g^{-1}}$ ($H_2O$), zjistíme, že jsou srovnatelná. Sůl se tedy rozpouští ve vodě, přestože tento proces „spotřebuje“ velké množství energie. A protože mezi rozpouštěním NaCl v $H_2O$ a $H_2O$ (s) v $H_2SO_4$ není žádný kvalitativní rozdíl (snad jen s výjimkou toho, že $H_2O$ a $H_2SO_4$ se mísí v libovolné poměru) a dokonce i všechny „materiálové konstanty“ jsou řádově stejné, můžeme usoudit, že tyto systémy se budou chovat stejně. Z těchto úvah vyplývá, že se *všechen led* rozpustí a systém se ustálí při teplotě nižší než 0 °C.

Fundamentální příčinnou tohoto chování je to, že libovolný systém s danou energií (což směs vody a kyseliny je, protože ji můžeme považovat za tepelně izolovanou) se ustálí ve stavu s nejvyšší možnou *entropií*. Entropie se rozpuštěním ledu a smícháních s kyselinou rapidně zvýší (zvětší se neuspořádanost, resp. počet možných realizací stavu). Snížením teploty se sice entropie naopak o něco sníží (menší tepelný pohyb molekul znamená menší neuspořádanost), ale v důsledku bude stav, kdy je led rozpuštěn a směs chladnější, entropicky výhodnější.

Pokud vám přijde divné, že při rozpouštění soli ve vodě nepozorujeme žádné podchlazení, je to tím, že rozpustnost kuchyňské soli ve vodě je poměrně malá. Pokud však do vody nasypeme například $NH_4NO_3$, $CaCl_2 \cdot 6H_2O$, či jinou ve vodě dobře rozpustnou sůl, podchlazení pozorovat budeme, a to velmi výrazné (tento pokus si můžete sami vyzkoušet). Dodejme ještě, že popsaného jevu se využívá například pro chlazení na nízké teploty za laboratorních podmínek (se zadanou směsí lze dosáhnout teplot až několika desítek stupňů pod nulou) či pro úpravu pozemních komunikací (známé solení zasněžených silnic).

***Pavel Augustinský***
pavel@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha I . E ... *absolutní nula*** *(8 bodů; průměr 4,03; řešilo 40 studentů)*

*S experimentálním vybavením dostupným v době Lorda Celsia změřte teplotu absolutní nuly (v Celsiově stupnici). Poradíme vám, že pro měření můžete využít například vlastností ideálního plynu.*

*Vymyslel Pavel Augustinský.*

Ke změření absolutní nuly využijeme vlastností ideálního plynu. Budeme měřit jeho stavové veličiny při nějakém ději. Tato metoda je relativně málo náročná a vystačíme si se stejnými prostředky, které byly dostupné Lordu Celsiovi.

### *Teorie*

Pokusme se pojmout teorii ve stylu Lorda Celsia. V době Lorda Celsia ještě nebyla žádná teorie pro ideální plyn, proto by například měřil, jak se mění objem plynu při stálém tlaku v závislosti na jeho teplotě. Pokud by byl dostatečně pečlivý, a to on jistě byl, vyšla by mu tato závislost lineární, jejímž grafem je přímka. Když by tuto přímku prodloužil, tak by v nějaké teplotě protnula nulu na teplotní ose. Při této teplotě by musel mít plyn nulový objem, což je zjevně nemožné. Obdobně by jistě postupoval i s jinými plyny, a ač by sklon této přímky byl jiný, překvapivě by mu vyšlo totéž, přímka by protínala teplotní osu stále ve stejném bodě. Z toho by usoudil, že onen bod bude *absolutní fyzikální nula.*

Úvaha Lorda Celsia je správná, neboť podle stavové rovnice pro ideální plyn platí

$$pV = nRT.$$

Lord Celsius udržoval konstantní tlak plynu v uzavřené soustavě. Potom můžeme napsat

$$V = \frac{nR}{p} \cdot T, \qquad \text{tedy} \qquad V = C(t - t_0) = Ct - Ct_0, \tag{8}$$

kde $C$ je konstanta, $t$ je teplota v Celsiově stupnici a $t_0$ teplota absolutní nuly v Celsiově stupnici. Graf závislosti $V = f(T)$ protíná osu $x$ v 0 K, proto graf $V = f(t)$ protne osu $x$ právě v hodnotě teploty absolutní nula. Z (8) víme, že závislost $V = f(t)$ je lineární, neboli

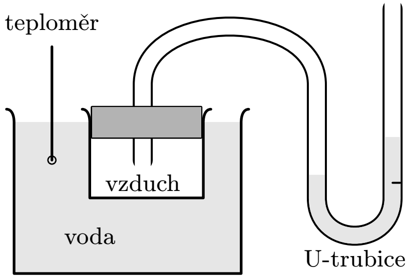
$$V = at + b.$$

Z našich naměřených hodnot určíme koeficienty $a$ a $b$. Porovnáním s (8) dostáváme

$$t_0 = -\frac{b}{a}.$$

### *Postup měření*

Jako plyn použijeme vzduch, který se vlastnostmi blíží ideálnímu plynu. Plyn jsme uzavřeli do skleněné nádoby. Nádobu jsme zajistili korkovou zátkou s otvorem, kterým vychází trubička spojená s U-trubicí (viz nákres na obrázku 2). Pokud není dostupná přímo U-trubice, dá se použít i něco jiného, co funguje stejně. Zátku jsme zakapali voskem pro zlepšení utěsnění. Celá nádoba je ponořená do vodní lázně, kterou zahříváme a jejíž teplotu měříme. Abychom nádobu udrželi pod vodou, bylo nutné ji zatížit, horní strana byla těsně pod hladinou. V U-trubici je voda. Protože chceme v nádobě udržet konstantní tlak, musí být výška vody v obou ramenech U-trubice stejná. Na U-trubici jsme si dále vyznačili rysku, od které jsme měřili výšku hladiny v ramenech.




Obr. 2. Použitá aparatura

Objem nádoby a objem trubice až po rysku označme $V_0$, vnitřní průměr trubice je $d$. Je-li voda ve výšce $h$, je objem plynu

$$V = V_0 - \frac{1}{4}\pi d^2 h. \tag{9}$$

Vodní lázeň jsme zahřáli a do U-trubice nalili co nejméně vody (hladina je těsně nad ryskou). Systém jsme nechali ustálit, aby se zahřál i plyn v nádobě. Nyní jsme nechali vodní lázeň a s ní i plyn v nádobě chladnout. Vodu jsme promíchávali, aby v ní nevznikaly rozdíly teplot. Chladnutí probíhalo pomalu, aby se stihla ustavit teplotní rovnováha mezi vzduchem a vodou. V nádobě bylo třeba neustále udržovat konstantní tlak, což jsme realizovali dokapáváním vody do otevřeného konce U-trubice. To mělo výhodu, tlak v nádobě byl stejný jako atmosférický, tudíž žádný plyn neunikal ani žádná voda nevnikala do nádoby případnými netěsnostmi. Jak teplota vzduchu klesala, zaznamenávali jsme pro určité teploty výšku $h$ vodní hladiny v U-trubici.

*Měření*

Objem $V_0$ jsme určili pomocí injekční stříkačky $V_0 = (136 \pm 3)$ ml. Vnitřní průměr trubičky jsme změřili posuvným měřítkem $d = (6{,}0 \pm 0{,}2)$ mm. Naměřili jsme několik hodnot $[t, h]$, z $h$ jsme poté vypočetli $V$. Pro lepší přesnost výsledku by mělo být rozmezí měřených teplot co největší a počet naměřených bodů $[t, h]$ také co největší. Dále budeme určovat chybu $V$, kterou počítáme podle vztahu (9). Na chybu $\Delta V_0$ na chvíli zapomeneme, protože má při všech měření stejnou hodnotu. Relativní chyby $d$ a $h$ jsou

$$\delta d = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0,2}{6} = 0,033 \qquad \text{a} \qquad \delta h = \frac{\Delta h}{h} = \frac{5\,\mathrm{mm}}{h}.$$

Chybu $\Delta h$ jsme se snažili odhadnout tak, aby v ní byla zahrnuta chyba měření teploty i výšky hladiny a chyba systematická. Hodnota $\delta h$ je tedy pro každé měření jiná. S využitím (9) a obecného vztahu pro výpočet chyby veličiny, pokud ji počítáme z jiných veličin měřených s chybou,

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h + \frac{\partial V}{\partial d}\Delta d,$$

dostáváme

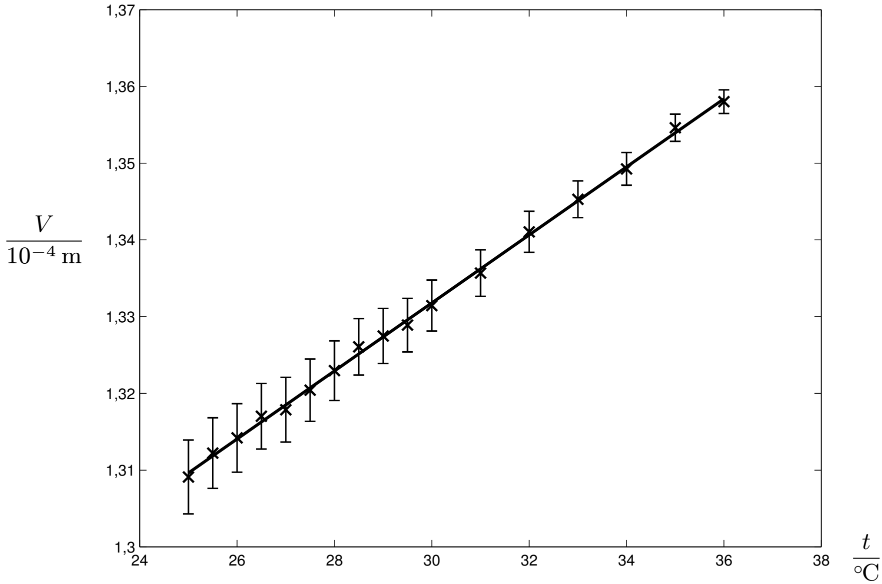
$$\Delta V = \frac{1}{4}\pi d^2 h(2\delta d + \delta h) = \frac{1}{4}\pi d^2 \Delta h + \frac{1}{2}\pi d h \Delta d.$$

Vidíme, že k chybě $\Delta V$ nejvíce přispívá $\Delta d$, zvláště pro větší hodnoty $h$, proto jsme průměr $d$ měřili posuvným měřítkem. Hodnoty $h$, $V$ a $\Delta V$ pro 17 měřených teplot jsou v následující tabulce.

| $t$[°C] | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29,5 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$[mm] | 7 | 19 | 38 | 52 | 67 | 86 | 101 | 110 | 115 |
| $V$[ml] | 135,8 | 135,5 | 134,9 | 134,5 | 134,1 | 133,6 | 133,1 | 132,9 | 132,7 |
| $\Delta V$[ml] | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,4 |

| $t$[°C] | 28,5 | 28 | 27,5 | 27 | 26,5 | 26 | 25,5 | 25 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$[mm] | 120 | 131 | 140 | 149 | 152 | 162 | 169 | 180 | |
| $V$[ml] | 132,6 | 132,3 | 132,0 | 131,8 | 131,7 | 131,4 | 131,2 | 130,9 | |
| $\Delta V$[ml] | 0,4 | 0,4 | 0,4 | 0,4 | 0,4 | 0,4 | 0,5 | 0,5 | |

Hodnoty $[t, V]$ vyneseme do grafu, chyby $\Delta V$ vyznačíme chybovými úsečkami.




Obr. 3

Naměřené hodnoty jsou označeny křížkem. Těmito body proložíme přímku, protože podle teorie předpokládáme závislost $V = at + b$. To můžeme provést od ruky nebo nám křivku může spočítat počítač. V grafu je regresní přímka vyznačena tučně. Dále si vyznačíme, jak může tato přímka vypadat v krajních případech (v grafu jsou čárkovaně), k tomu využijeme chybové úsečky. Z našeho grafu odečteme $a$ a $b$ pro regresní přímku a $a_{1,2}$, $b_{1,2}$ pro mezní případy.

$$a = 0{,}443\,\mathrm{ml{\cdot}K^{-1}}, \quad b = 120\,\mathrm{ml},$$
$$a_1 = 0{,}38\,\mathrm{ml{\cdot}K^{-1}}, \quad b_1 = 122\,\mathrm{ml},$$
$$a_2 = 0{,}48\,\mathrm{ml{\cdot}K^{-1}}, \quad b_2 = 118\,\mathrm{ml}.$$

Odtud máme

$$a = (0{,}44 \pm 0{,}06)\,\mathrm{ml{\cdot}K^{-1}}, \quad b = (120 \pm 2)\,\mathrm{ml}.$$

Nesmíme ale zapomenout na chybu $\Delta V_0$, která ovlivňuje polohu naměřených hodnot v grafu ve svislém směru. Chyba $\Delta V_0$ tedy přispívá k chybě $b$. Celkově dostáváme

$$b = (120 \pm 5)\,\mathrm{ml}.$$

Relativní chyby $a$ a $b$ jsou

$$\delta a = \frac{0{,}06}{0{,}44} = 0{,}14 \qquad \text{a} \qquad \delta b = \frac{5}{120} = 0{,}042.$$

Pro teplotu absolutní teploty v Celsiově stupnici jsme si odvodili $t_0 = -b/a$,

$$t_0 = -272{,}7\,^\circ\mathrm{C}, \quad \delta t_0 = \delta a + \delta b = 0{,}18 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_0 = 48\,^\circ\mathrm{C}.$$

Naše naměřená hodnota absolutní nuly je $t_0 = (-270 \pm 50)\,^\circ\mathrm{C}$.

*Závěr*

Chyba výsledku vyšla dost velká. To je dáno tím, že jsme závislost $V = f(t)$ proměřovali pro teploty hodně vzdálené od absolutní nuly. Jen náhodou jsme se „trefili" tak blízko skutečné hodnoty.

Všechny chyby měření jsme zmínili již dříve, jedná se o chybu měření $h$, $d$, $V_0$ a teploty. K těmto chybám přistupují chyby systematické. Vzduch v trubici mimo nádobu má nižší teplotu než vzduch v nádobě. Měříme teplotu vody, vzduch může mít teplotu jinou, pokud není zcela ustavena rovnováha. Z nádoby může unikat vzduch a do vzduchu v nádobě se může vypařovat voda. Vzduch není ideální plyn.

*Poznámky k řešením*

Všichni řešitelé se zabývali ději plynů v uzavřené soustavě a s využitím jejich vlastností určili absolutní nulu. Byli tři možnosti provedení měření: udržovat konstantní tlak (takto jsme postupovali my, $V \sim T$), udržovat konstantní objem (musíme znát hodnotu atmosférického tlaku, $p \sim T$) a nebo měřit, jak se mění tlak a objem plynu při změnách teploty ($pV \sim T$).

Jiný způsob byl měřit rychlost zvuku ve vzduchu, pro který platí $v = \sqrt{K/\varrho}$, kde $K$ je modul objemové pružnosti vzduchu. Ze stavové rovnice pro hustotu máme $\varrho = pM/RT$ ($M$ je molární hmotnost vzduchu). Celkově tedy pro rychlost zvuku platí

$$v = \sqrt{\frac{KR}{pM}T}.$$

Závislost $v = f(T)$ jsme mohli obdobně jako při ději ideálního plynu pro několik teplot proměřit.

Naprostá většina řešitelů naměřila hodnotu absolutní nuly v rozmezí $50\,^\circ\mathrm{C}$ od skutečné hodnoty. Bohužel jen málokdo se pokusil určit chybu svého výsledku a jediná *Jana Matějová* ji měla správně vypočtenou. Ostatní napsali většinou něco jako $t_0 = (-273 \pm 3)\,^\circ\mathrm{C}$ nebo odchylku od skutečné hodnoty.

Na závěr bych chtěl uvést na pravou míru to, v čem udělalo několik řešitelů chybu. Nechť plyn v uzavřené soustavě přejde izobaricky z jednoho stavu do druhého, pro tyto stavy si napišme stavové rovnice

$$pV_0 = nRT_0, \qquad pV = nRT.$$

Označíme $\Delta T = T - T_0$, $nR/p$ je konstanta. Pak po odečtení obou rovnic dostaneme

$$V = V_0 + \frac{nR}{p}\Delta T = V_0\left(1 + \frac{nR}{pV_0}\Delta T\right) = V_0\left(1 + \frac{1}{T_0}\Delta T\right).$$

Pokud bude původní stav plynu při $0\,^\circ\mathrm{C}$, pak $V_0$ bude objem při $0\,^\circ\mathrm{C}$, $\Delta T = t$ a $T_0$ teplota $0\,^\circ\mathrm{C}$ v Kelvinově stupnici, tedy velikost teploty absolutní nuly $t_0$. Označme $\gamma = 1/T_0 = -1/t_0$, pak dostáváme vztah

$$V = V_0(1 + \gamma t) \quad \text{a podobně také} \quad p = p_0(1 + \gamma t).$$

Tyto vztahy řešitelé používali, ale zapomněli, že $V_0$ a $p_0$ je objem a tlak plynu při $0\,^\circ\mathrm{C}$. Nebo používali vztah $V = V_0(1 + \gamma\Delta t)$, v tomto případě ale není $\gamma$ konstanta.

***Honza Prachař***
honzik@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha I . S ... *elektromagnetické pole*** *(5 bodů; průměr 2,74; řešilo 39 studentů)*

*a) V prostoru je homogenní magnetické a elektrické pole (homogenní pole má svou veličinu všude stejnou co do velikosti i směru). Je dána velikost* $\boldsymbol{E}$ *i* $\boldsymbol{B}$ *a tyto vektory jsou na sebe kolmé. Jak se musí pohybovat elektron, aby na něj nepůsobila žádná síla? Jak je to v případě, že* $\boldsymbol{E}$ *a* $\boldsymbol{B}$ *svírají úhel 60°?*

*b) Jak bylo řečeno v seriálu, nezmění při přemístění jednoho z nábojů síla působící na druhý náboj hned. Pokuste se na základě tohoto faktu vysvětlit, proč má elektromagnetické pole hybnost.*

*Úlohy vymyslel autor seriálu Honza Houštěk.*

a) Vyjdeme ze známého Lorentzova vztahu pro sílu působící na elektrický náboj o velikosti $q$ pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ v elektrickém a magnetickém poli. A sice

$$\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,.$$

Zadání požaduje, aby výslednice byla nulová, tedy $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Potom jistě platí

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}.$$

Dle zadání jsou vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ na sebe kolmé. Jelikož je ale výsledek vektorového součinu $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}$ kolmý na oba vektory, musí být nutně vektor $\boldsymbol{v}$ kolmý na $\boldsymbol{E}$, čili ležet v jedné rovině s $\boldsymbol{B}$, jejímž normálovým vektorem je právě $\boldsymbol{E}$. Nechť tedy $\boldsymbol{v}$ svírá s $\boldsymbol{B}$ nenulový úhel $\alpha$, přičemž systém $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$ je pravotočivý. Kdyby nastal případ $\alpha = 0$, byl by vektorový součin $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ roven nule. V tomto případě by výsledná síla působící na náboj byla dána jen elektrickým polem, čili její velikost by nemohla být pro nenulový vektor $\boldsymbol{E}$ nulová. Za tohoto předpokladu bude tedy platit

$$|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{v}|\sin\alpha.$$

Čili řešením je vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$, který leží v rovině kolmé na $\boldsymbol{E}$. Úhel mezi $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ je $\alpha$ (systém $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$ je pravotočivý). Velikost rychlosti $\boldsymbol{v}$ je

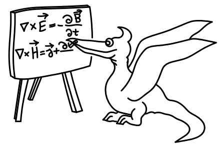
$$|\boldsymbol{v}| = \frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{B}|\sin\alpha}.$$

Nejčastější chyba byla ta, že někteří řešitelé uvažovali, že rychlost musí být kolmá jak na $\boldsymbol{E}$, tak na $\boldsymbol{B}$.

V případě, že $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ svírají úhel $60^\circ$ stačí nahlédnout, že pro libovolný vektor rychlosti bude výsledek vektorového součinu $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ kolmý na vektor $\boldsymbol{B}$. Tedy nebude rovnoběžný s $\boldsymbol{E}$. To ale znamená, že nemůže vliv $\boldsymbol{E}$ vykompenzovat. Výslednice sil působící na náboj bude potom pro nenulový náboj nenulová.

b) Jako modelovou situaci si vezměme pokusný osamocený náboj. Někam ho umístíme a v dostatečně velké vzdálenosti od něj vezmeme na pomoc druhý náboj, s kterým nějakým způsobem zahýbeme a vzápětí ho odstraníme. Jestliže se v tomto okamžiku podíváme na soustavu, zjistíme, že je pokusný náboj v klidu. Tedy celková hybnost soustavy tvořená tímto nábojem je nulová. Po „chvíli" (dané konečnou rychlostí světla) ale budeme pozorovat, že se pokusný náboj začne jistým způsobem pohybovat, tedy se změní jeho hybnost. Jelikož by se nám ale hodilo, aby platil zákon zachování hybnosti i v takovýchto obecných případech, musíme připustit existenci jakéhosi pole a přisoudit mu hybnost.

***Míra Šulc***
mira@fykos.mff.cuni.cz




# Seriál na pokračování

## *Elektrický dipól*

Elektrickým dipólem se obyčejně rozumí soustava dvou bodových nábojů $Q_- < 0$, $Q_+ > 0$ stejné velikosti Q, ale opačného znaménka, umístěných v bodech $\boldsymbol{r}_-$, $\boldsymbol{r}_+$ ve vzájemné vzdálenosti l. Pokud chceme vyšetřit elektrické pole dipólu, označíme k tomu účelu vektor $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-$ a zavedeme *elektrický dipólový moment* vztahem

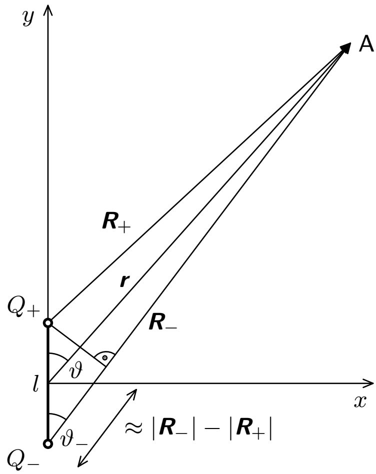
$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{l}.$$

Dipól umístíme v počátku soustavy souřadnic tak, že vektor $\boldsymbol{l}$, který míří od záporného náboje ke kladnému, bude orientován v kladném směru osy $y$ a počátek bude půlit délku $l$. Osa $y$ je pak rotační osou symetrie dipólu. Jeho elektrostatické pole tedy stačí počítat v jedné rovině (vybereme z=0). V libovolném bodu roviny $xz$ bude platit

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{R}_+|} - \frac{1}{|\boldsymbol{R}_-|}\right).$$

Kde $\boldsymbol{R}_-$ resp. $\boldsymbol{R}_+$ je vzdálenost náboje $Q_-$ resp. $Q_+$ od bodu A, ve kterém pole počítáme. Předpokládejme nyní, že vzdálenost bodu A od počátku je mnohem větší než rozměr dipólu, tj. $R_- >> l$, $R_+ >> l$. V tomto přiblížení pro potenciál dostáváme (viz obr. 4)

$$\varphi(\boldsymbol{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ql\cos\vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}.$$




Obr. 4

V limitě, kdy $l \to 0$, $Q \to \infty$ a $\boldsymbol{p}$ zůstává konečný, vznikne bodový útvar, jehož elektrostatické pole je přesně dáno předchozím vztahem. Nazýváme jej *bodovým elektrickým dipólem.*

*Elektrostatické dipólové pole*

Pro intenzitu elektrostatického pole platí obecný vztah (jak již víme z minulého dílu) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r})$. Po dosazení za $\varphi(\boldsymbol{r})$ dostáváme pro intenzitu elektrostatického pole od dipólu

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right].$$

Výpočet x-ové složky:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{p_x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3}{2}\frac{2x(p_x x + p_y y + p_z z)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{p_x}{r^3}.$$

Získaný vztah aplikujeme na náš bodový dipól ve směru osy $y$. Složky intenzity pak jsou

$$E_x = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\sin\vartheta\cos\vartheta}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xy}{r^5}$$
$$E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\cos^2\vartheta - 1}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)$$

Pro body na ose $y$ $(\vartheta = 0)$ bude platit $E_x = 0$, $E_y = p/2\pi\varepsilon_0 r^3$, pro body na ose $x$ $(\vartheta = \pi/2)$ dostaneme $E_x = 0$ a $E_y = -p/2\pi\varepsilon_0 r^3$.

*Dipól ve vnějším elektrostatickém poli*

Zkusme nyní naopak vyšetřit, jak působí elektrostatické pole na elektrický dipól. Díky tomu, že vzdálenost $l$ je neměnná, můžeme na dipól pohlížet jako na tuhou soustavu. Na jednotlivé náboje působí síly $\boldsymbol{F}_+ = Q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_+)$, $\boldsymbol{F}_- = Q\boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r}_-)$. Podle pravidel známých z mechaniky tuhého tělesa můžeme obě tyto síly přenést do jednoho bodu, vektorově je složit a jejich výslednici doplnit dvojicí sil vhodného momentu. Přeneseme-li sílu $\boldsymbol{F}_+$ do bodu $\boldsymbol{r}_-$ dostaneme pro výslednici

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{F}_- = Q[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_+) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_-)] \approx Q\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}l_x + \frac{\partial E_x}{\partial y}l_y + \frac{\partial E_x}{\partial z}l_z, F_y, F_z\right).$$

To lze zapsat vektorově jako

$$\boldsymbol{F} \approx Q(\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_-) = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_-),$$

kde operátor $\boldsymbol{p}\cdot\nabla$ má složky

$$\left(p_x\frac{\partial}{\partial x}, p_y\frac{\partial}{\partial y}, p_z\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Podstatné je si uvědomit, že elektrické pole se musí místo od místa měnit, aby celková síla působící na dipól byla nenulová. Dynamický účinek výslednice $\boldsymbol{F}$ je podle zmíněných pravidel mechaniky ještě nutné doplnit silovou dvojicí momentu

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-)\times\boldsymbol{F}_+ = Q[\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_+)] = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_+).$$

Obdobně můžeme určit i potenciální energii elektrického dipólu ve vnějším elektrostatickém poli

$$W = Q[\varphi(\boldsymbol{r}_+) - \varphi(\boldsymbol{r}_-)] \approx Q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}l_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}l_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}l_z\right) = \boldsymbol{p}\cdot\nabla\varphi = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}.$$

Tento poslední vztah je hodný zapamatování a ve středoškolských učebnicích se často uvádí bez odvození, neboť to, jak vidíte, je náročné na matematický aparát. Jelikož příroda se snaží minimalizovat svoji energii, snaží se elektrostatické pole natočit dipól do svého směru.

### *Elektrostatické pole v dielektrikách*

Zatím jsme se celou dobu zabývali vlivem elektrostatického pole na vodiče, což jsou látky, které mají schopnost převádět elektrický náboj. Dielektrika tuto schopnost nemají a mohou sloužit jako izolanty. To však neznamená, že by se dielektrikum a vnější elektrostatické pole vzájemně nijak neovlivňovaly. O charakteru tohoto vlivu se můžeme přesvědčit, když prostor mezi deskami kondenzátoru naplníme homogenním izotropním dielektrikem. Napětí mezi elektrodami po vložení dielektrika poklesne a při zachování náboje musí stoupnout kapacita kondenzátoru. To je charakterizováno bezrozměrnou veličinou $\varepsilon_r$, která se nazývá relativní permitivita.

### *Polarizace dielektrika*

Dielektrikum si představujeme jako látku plnou malých dipólků realizovaných polárními molekulami nebo atomy, ve kterých se díky vnějšímu poli posune nepatrně obal vůči jádru. V nulovém vnějším poli bývají dipólky natočeny náhodně. V nenulovém poli jsou ale natočeny (kvůli silám uvnitř pevné látky se natočí většinou jen částečně) do směru pole. Sečteme-li pak vektorově dipólový moment v jednotce objemu látky, vyjde nám číslo, kterému říkáme *vektor elektrické polarizace* $\boldsymbol{P}$. Dielektrikum nemusí být polarizováno homogenně, pak má smysl mluvit o vektoru polarizace závislém na poloze $\boldsymbol{r}$.

Po chvíli by se dalo odvodit, že elektrostatické pole vytvořené konečným objemem $V$ spojitě rozložených elektrických dipólů můžeme nahradit elektrostatickým polem nábojů rozložených na povrchu tohoto objemu s plošnou hustotou $\sigma_p$ a uvnitř tohoto objemu s objemovou hustotou $\varrho_p$. Plošná hustota $\sigma_p$ závisí přitom pouze na směru vektoru elektrické polarizace $\boldsymbol{P}$ a normály $\boldsymbol{n}$ na povrchu objemu, objemová hustota $\varrho_p$ je různá od nuly jen v případě nehomogenní polarizace. Mezi těmito veličinami platí vztahy

$$\sigma_p = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}, \qquad \varrho_p = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}.$$

Oba vztahy představují jakousi obdobu Gaussovy věty a ideí z elektrostatiky ve vakuu, jak se za chvíli ukáže.

Náboje v dielektriku můžeme tedy rozdělit na *volné* (např. poletující elektron) a *vázané* (polarizační, ty z předchozích dvou vztahů). Narozdíl od volných nábojů se vázané nemohou ve vodičích přemisťovat. Celková objemová hustota nábojů $\varrho_c$ se potom dá vyjádřit jako součet hustoty volných $\varrho$ a vázaných nábojů $\varrho_p$. Stejně tak můžeme i elektrické pole v dielektriku rozložit na pole od nábojů volných a vázaných. Pro vektor výsledné elektrické intenzity potom platí

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_p.$$

Vektor $\boldsymbol{E}_0$ značí intenzitu pole volných nábojů, $\boldsymbol{E}_p$ vázaných.

*Gaussův zákon pro elektrostatické pole v dielektriku*

První dílčí poznatek říká, že i v přítomnosti vázaných nábojů, zůstává pole elektrostatické, tedy i potenciální (existuje jeho potenciál), a musí nutně platit

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0.$$

V platnosti ale zůstává i Gaussův zákon, jen si musíme uvědomit, že celkový náboj $Q_c$ je dán nejen volnými náboji $Q$, ale i vázanými $Q_p$. Dostáváme tedy

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_c}{\varepsilon_0} = \frac{Q + Q_p}{\varepsilon_0}.$$

Pro náboj $Q_p$ ale platí

$$Q_p = \int \varrho_p \,\mathrm{d}V = -\int \nabla \cdot \boldsymbol{P} \,\mathrm{d}V = -\oint \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\oint (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q.$$

V posledním vztahu zavedeme nový vektor

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

a nazveme ho *vektorem elektrické indukce*. S jeho pomocí můžeme Gaussův zákon psát ve tvaru, který známe pro volné náboje:

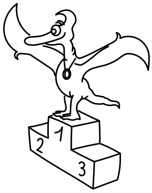
$$\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \varrho.$$

Veličiny $Q$ a $\varrho$ se vztahují na volné náboje, stejně jako v elektrostatice ve vakuu.

## Úloha III . S ... *dipóly*

Spočtěte sílu působící mezi dvěma dalekými elektrickými dipóly o momentech $\boldsymbol{p}_1$ a $\boldsymbol{p}_2$ ve vzdálenosti $r$, pokud

a) leží v jedné přímce a jsou souhlasně orientovány,
b) jsou souhlasně orientovány ve směru kolmém na spojnici,
c) dipól $\boldsymbol{p}_1$ je orientován kolmo ke spojnici, $\boldsymbol{p}_2$ rovnoběžně s ní směrem k prvnímu.



# Pořadí řešitelů po I. sérii

## Kategorie čtvrtých ročníků

| | jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | I | % | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Student Pilný* | MFF UK | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 5 | **33** | *100* | **33** |
| **1.** | *Matouš Ringel* | G Broumov | 3 | 4 | 2 | 4 | 3 | 7 | 4 | **27** | *82* | **27** |
| **2.** | *Peter Zalom* | G D. Tatarku, Poprad | 3 | 4 | 4 | 4 | – | 4 | 5 | **24** | *86* | **24** |
| **3.** | *Tomáš Mánik* | G Lučenec | 3 | 4 | 2 | 4 | 1 | 5 | 4 | **23** | *70* | **23** |
| **4.–5.** | *Jana Matějová* | SPŠ Chrudim | 3 | 4 | 3 | – | – | 9 | 3 | **22** | *92* | **22** |
| | *Róbert Sedlák* | G Prešov | 3 | 4 | 3 | 4 | 0 | 5 | 3 | **22** | *67* | **22** |
| **6.** | *Štěpán Uxa* | GSG Jilemnice | 3 | 4 | 4 | – | 0 | 5 | 3 | **19** | *66* | **19** |
| **7.–8.** | *Pavel Daniel* | G Zborovská, Praha | 3 | 4 | – | 4 | 0 | 2 | 4 | **17** | *59* | **17** |
| | *Jan Moláček* | G J. K. Tyla | 3 | 4 | 4 | 4 | – | – | 2 | **17** | *85* | **17** |
| **9.–10.** | *Jan Fazekaš* | ISŠ Sokolov | 2 | 4 | 4 | – | 0 | – | 3 | **13** | *62* | **13** |
| | *Petra Suková* | G Svitavy | 3 | 4 | – | 2 | – | – | 4 | **13** | *81* | **13** |
| **11.** | *Ilič Ognjen* | | – | 4 | 4 | 4 | – | – | – | **12** | *100* | **12** |
| **12.** | *Zdeněk Tichý* | G Pelhřimov | – | – | 4 | 4 | – | – | 2 | **10** | *77* | **10** |
| **13.** | *Vojtěch Krejčiřík* | G Kroměříž | 3 | 4 | – | – | – | – | 2 | **9** | *75* | **9** |
| **14.–15.** | *Hynek Hanke* | G Budějovická, Praha | 3 | 1 | – | – | – | – | 4 | **8** | *67* | **8** |
| | *Jan Ondruš* | G F. M. Pelcla | 3 | 1 | 2 | 2 | 0 | – | – | **8** | *40* | **8** |
| **16.** | *Jan Křivonožka* | G Bílovec | 0 | 2 | 1 | 4 | – | – | – | **7** | *47* | **7** |
| **17.** | *Ladislav Peška* | G Slaný | 3 | – | – | 3 | – | – | – | **6** | *86* | **6** |
| **18.–22.** | *Petr Dostál* | G Žamberk | 3 | – | – | 2 | – | – | – | **5** | *71* | **5** |
| | *Jana Hrudíková* | G Přerov | – | – | 4 | – | – | – | 1 | **5** | *56* | **5** |
| | *Michal Růžek* | G Arcibiskupské | 3 | – | – | – | – | – | 2 | **5** | *63* | **5** |
| | *Marta Říhová* | SPodŠ Náchod | 1 | 4 | 0 | – | – | – | – | **5** | *45* | **5** |
| | *Lucie Strmisková* | G Kyjov | 3 | 2 | – | – | – | – | – | **5** | *71* | **5** |
| **23.–24.** | *Pavel Hála* | G Český Krumlov | 3 | – | – | – | – | – | 1 | **4** | *50* | **4** |
| | *Milan Kříž* | G Arcibiskupské | – | – | – | 4 | – | – | – | **4** | *100* | **4** |
| **25.–28.** | *Katarína Baxová* | G Ľudovíta Štúra | – | – | – | – | – | 3 | – | **3** | *38* | **3** |
| | *Pavla Grubhofferová* | G Voděradská, Praha | 3 | – | – | – | – | – | – | **3** | *100* | **3** |
| | *Vladimír Sommer* | G Žďár nad Sázavou | – | – | – | – | – | 1 | 2 | **3** | *23* | **3** |
| | *Juraj Zajac* | G Ľudovíta Štúra | – | – | – | – | – | 3 | – | **3** | *38* | **3** |
| **29.** | *Milan Matějka* | SPŠ SaD Děčín | 1 | – | – | – | – | – | – | **1** | *33* | **1** |
| **30.–32.** | *Jana Babováková* | G Most | 0 | – | – | – | – | – | 0 | **0** | *0* | **0** |
| | *Josef Brožek* | SOU Přelouč | 0 | 0 | – | – | – | – | – | **0** | *0* | **0** |
| | *Lukáš Voleský* | COP Hronov | – | – | – | 0 | – | – | – | **0** | *0* | **0** |

## Kategorie třetích ročníků

| | jméno | škola | 1 | 2 | 3 | 4 | P | E | S | I | % | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Student Pilný* | MFF UK | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 5 | **33** | *100* | **33** |
| **1.** | *Anton Repko* | G Sv. Mikuláša, Prešov | 3 | 4 | 4 | 4 | 6 | 5 | 5 | **31** | *94* | **31** |
| **2.** | *Petr Houštěk* | G Pelhřimov | 3 | 4 | 4 | 3 | 5 | – | 4 | **23** | *92* | **23** |
| **3.** | *Stanislav Vosolsobě* | G Jablonec nad Nisou | 3 | 4 | 2 | 3 | 0 | 8 | 2 | **22** | *67* | **22** |
| **4.–5.** | *Michal Humpula* | G Uherský Brod | 3 | 4 | 3 | – | – | 6 | 5 | **21** | *88* | **21** |
| | *Martin Takáč* | G Nové Zámky | 3 | 4 | 4 | 1 | 1 | 4 | 4 | **21** | *64* | **21** |
| **6.** | *Pavel Kocourek* | SPŠ Panská | 3 | 4 | 4 | 4 | – | – | – | **15** | *100* | **15** |
| **7.–9.** | *Pavlína Böhmová* | G Havířov | 3 | 4 | 4 | 3 | 0 | – | – | **14** | *70* | **14** |
| | *Daniel Božík* | G Jura Hronca | 0 | 4 | 2 | 1 | – | 6 | 1 | **14** | *50* | **14** |
| | *Jan Pavelka* | G Kapitána Jaroše, Brno | 3 | 4 | – | 1 | – | 3 | 3 | **14** | *58* | **14** |
| **10.** | *Roman Fiala* | VOŠ a SPŠE Plzeň | 3 | 2 | – | 3 | – | 4 | – | **12** | *63* | **12** |
| **11.–12.** | *Ivan Macháček* | G Uherský Brod | 3 | 4 | 1 | 3 | – | – | – | **11** | *73* | **11** |
| | *Ondřej Zapletal* | G Křenová, Brno | 3 | 2 | 1 | 4 | – | 1 | – | **11** | *48* | **11** |
| **13.** | *Peter Greškovič* | G Svidník | 0 | 3 | 1 | 3 | – | – | 3 | **10** | *50* | **10** |
| **14.** | *Lukáš Gříšek* | G Františka Hajdy, Ostrava | 3 | 4 | 0 | – | 0 | – | 1 | **8** | *38* | **8** |
| **15.** | *Pavel Hron* | GOA Sedlčany | 1 | 2 | – | 3 | – | – | – | **6** | *55* | **6** |
| **16.–17.** | *Zdeněk Kučka* | G Žďár nad Sázavou | 2 | 2 | – | – | 1 | – | – | **5** | *42* | **5** |
| | *Dalibor Máj* | GaSG Vrbno p. Pr. | 0 | 2 | – | 3 | – | – | – | **5** | *45* | **5** |
| **18.–22.** | *Kateřina Divišová* | GOA Sedlčany | 1 | 2 | 0 | 1 | – | – | – | **4** | *27* | **4** |
| | *Richard Gracla* | G Nad Štolou, Praha | 3 | 1 | 0 | – | 0 | – | – | **4** | *25* | **4** |
| | *Markéta Kavalírová* | G Českolipská, Praha | 3 | – | – | – | 1 | – | – | **4** | *50* | **4** |
| | *Mária Šedivá* | G Ľudovíta Štúra | 1 | – | – | – | – | 3 | – | **4** | *36* | **4** |
| | *Markéta Vilimovská* | G Českolipská, Praha | 3 | – | – | – | 1 | – | – | **4** | *50* | **4** |
| **23.–26.** | *Ján Čuvala* | G Ľudovíta Štúra | – | – | – | – | – | 3 | – | **3** | *38* | **3** |
| | *Lenka Doubravová* | G Matyáše Lercha | 1 | – | 2 | – | – | – | – | **3** | *43* | **3** |
| | *Josef Kvasničák* | G Trutnov | 0 | 2 | – | – | 0 | 1 | – | **3** | *15* | **3** |
| | *Hana Suchomelová* | G Ľudovíta Štúra | 0 | – | – | – | – | 3 | – | **3** | *27* | **3** |
| **27.** | *Lenka Rychtrová* | G Louny | 0 | 2 | – | 0 | 0 | – | – | **2** | *13* | **2** |
| **28.–34.** | *Radek Beneš* | COP Hronov | – | 1 | – | 0 | – | – | – | **1** | *13* | **1** |
| | *Jan Komínek* | G Chrudim | 1 | – | – | – | 0 | – | – | **1** | *13* | **1** |
| | *Jiří Kulda* | COP Hronov | – | 1 | – | 0 | – | – | – | **1** | *13* | **1** |
| | *Aleš Razým* | SG Táborská, Plzeň | 1 | – | – | – | – | – | – | **1** | *33* | **1** |
| | *Dominik Schneider* | G dr. Josefa Pekaře | 0 | – | – | – | – | – | 1 | **1** | *13* | **1** |
| | *Vladimír Stejskal* | G Sladkovského nám., Praha | – | 1 | – | – | – | – | – | **1** | *25* | **1** |
| | *Denis Vald* | G Jírovcova, Č. Budějovice | 1 | 0 | – | – | – | – | – | **1** | *14* | **1** |
| **35.** | *Petr Andrla* | G Biskupské, Brno | 0 | – | – | – | – | – | – | **0** | *0* | **0** |

## Kategorie druhých ročníků

| | **jméno** | **škola** | **1** | **2** | **3** | **4** | **P** | **E** | **S** | **I** | **%** | **Σ** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Student Pilný* | MFF UK | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 5 | **33** | *100* | **33** |
| **1.–2.** | *Lukáš Severa* | G Benešov | 3 | 3 | 4 | 1 | 0 | 7 | 3 | **21** | *64* | **21** |
| | *Slavomír Takáč* | G Nové Zámky | 3 | 4 | 4 | 1 | 1 | 4 | 4 | **21** | *64* | **21** |
| **3.** | *Ondřej Bílka* | G Lesní čtvrť, Zlín | 3 | 4 | 3 | 3 | 0 | 1 | 3 | **17** | *52* | **17** |
| **4.–5.** | *Tereza Klimošová* | G Lanškroun | 3 | 4 | 2 | 3 | – | – | 3 | **15** | *75* | **15** |
| | *Marek Scholz* | G Neratovice | 0 | 4 | 2 | 3 | 1 | 5 | – | **15** | *54* | **15** |
| **6.** | *Štěpán Jeřábek* | G Jablonec nad Nisou | 3 | 3 | – | 2 | 0 | 5 | – | **13** | *54* | **13** |
| **7.–8.** | *Monika Josieková* | G Český Těšín | 3 | 1 | 4 | 4 | – | – | – | **12** | *80* | **12** |
| | *Jan Valášek* | G Broumov | 1 | 4 | – | – | – | 7 | – | **12** | *80* | **12** |
| **9.** | *Tomáš Bednárik* | G Vsetín | 1 | – | 4 | – | – | 6 | – | **11** | *73* | **11** |
| **10.–11.** | *Peter Perešíni* | G J. G. Tajovského | 3 | – | – | 2 | – | 5 | – | **10** | *67* | **10** |
| | *Aleš Podolník* | G Kapitána Jaroše, Brno | 3 | 3 | – | – | – | 4 | – | **10** | *67* | **10** |
| **12.** | *Martin Konečný* | G Boskov | 1 | 1 | 4 | 1 | 0 | – | 2 | **9** | *36* | **9** |
| **13.** | *Jiří Šperka* | GOA Blansko | 3 | 0 | – | – | – | 5 | – | **8** | *53* | **8** |
| **14.** | *Jakub Nohejl* | G Vlašim | 3 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | – | **7** | *25* | **7** |
| **15.–18.** | *Josef Rubáš* | G Klatovy | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | – | 1 | **6** | *24* | **6** |
| | *Michal Sivák* | G Ľudovíta Štúra | 1 | 2 | – | – | – | 3 | – | **6** | *40* | **6** |
| | *Vladimír Sivák* | G Ľudovíta Štúra | 1 | 2 | – | 0 | – | 3 | – | **6** | *32* | **6** |
| | *Martin Slezák* | G Vlašim | 3 | 1 | 0 | 2 | 0 | – | – | **6** | *30* | **6** |
| **19.–22.** | *Jiří Hloska* | G Terezy Novákové, Brno | 3 | 2 | – | – | – | – | – | **5** | *71* | **5** |
| | *Jan Korbel* | G Říčany | – | 3 | 2 | – | – | – | – | **5** | *63* | **5** |
| | *Petr Smital* | G Kapitána Jaroše, Brno | 3 | 2 | – | – | – | – | – | **5** | *71* | **5** |
| | *Jana Vrábelová* | G Ľudovíta Štúra | – | 2 | – | – | – | 3 | – | **5** | *42* | **5** |
| **23.–25.** | *Lucie Hympánová* | G Kladno | 1 | 1 | – | 2 | 0 | – | – | **4** | *25* | **4** |
| | *Tomáš Jirotka* | G Klatovy | – | – | – | 4 | – | – | – | **4** | *100* | **4** |
| | *Ondřej Kudláček* | SPgŠ Liberec | 3 | 1 | 0 | – | – | – | – | **4** | *36* | **4** |
| **26.–30.** | *Jan Bednář* | COP Hronov | – | 1 | – | – | – | – | 2 | **3** | *33* | **3** |
| | *Štěpán Kříž* | G Zborovská, Praha | – | – | – | 1 | – | 2 | – | **3** | *25* | **3** |
| | *Petra Malá* | G Moravský Krumlov | 1 | – | – | – | 0 | – | 2 | **3** | *23* | **3** |
| | *Adam Přenosil* | G Sladkovského nám., Praha | 3 | – | – | 0 | – | – | – | **3** | *43* | **3** |
| | *Hana Vítová* | G Bystřice n. Pern. | 2 | – | 1 | – | – | – | – | **3** | *43* | **3** |
| **31.–33.** | *Vendula Exnerová* | G Nad Štolou, Praha | – | 1 | – | – | – | – | – | **1** | *25* | **1** |
| | *Petr Hanek* | G Nad Kavalírkou, Praha | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | – | – | **1** | *5* | **1** |
| | *Hanka Kronusová* | G Vlašim | – | 1 | 0 | – | – | – | – | **1** | *13* | **1** |
| **34.** | *Štěpán Kozák* | G Jeseník | 0 | – | – | – | 0 | – | – | **0** | *0* | **0** |

## Kategorie prvních ročníků

| | **jméno** | **škola** | **1** | **2** | **3** | **4** | **P** | **E** | **S** | **I** | **%** | **Σ** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Student Pilný* | MFF UK | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 | 5 | **33** | *100* | **33** |
| **1.** | *Pavel Motloch* | G Petra Bezruče | 3 | 4 | 2 | 4 | – | 4 | 5 | **22** | *79* | **22** |
| **2.** | *Miroslav Kaděra* | G Frýdek-Místek | 3 | 4 | – | – | – | 4 | – | **11** | *73* | **11** |
| **3.** | *Jakub Benda* | G Jana Nerudy | 3 | – | – | 4 | – | – | 3 | **10** | *83* | **10** |
| **4.–5.** | *Radim Pechal* | SPŠE Rožnov p. R. | 3 | 4 | – | 0 | 1 | – | – | **8** | *50* | **8** |
| | *Přemysl Šrámek* | G Dašická, Pardubice | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | – | 1 | **8** | *32* | **8** |
| **6.** | *Jana Przeczková* | G Havířov | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | – | – | **5** | *25* | **5** |
| **7.** | *Kryštof Touška* | G Klatovy | 3 | – | – | – | – | – | – | **3** | *100* | **3** |
| **8.** | *Ondrej Bogár* | G Ľudovíta Štúra | 1 | – | – | 0 | – | 1 | – | **2** | *13* | **2** |
| **9.** | *Libor Skala* | G Blovice | – | 1 | – | – | – | – | – | **1** | *25* | **1** |
| **10.** | *Michael Dvořáček* | G Letovice | – | 0 | – | 0 | 0 | – | – | **0** | *0* | **0** |

***FYKOS***
***UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta***
***Ústav teoretické fyziky***
***V Holešovičkách 2***
***180 00 Praha 8***

www: http://fykos.mff.cuni.cz
e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz
e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.