

16. ročník, úloha IV. 2 ... galaktický paradox (3 body; průměr 1,77; řešilo 43 studentů)

Ve Sluneční soustavě se planety, které jsou ke Slunci blíže, pohybují rychleji než planety vzdálenější. V Galaxii se hvězdy blíže středu pohybují pomaleji než hvězdy vzdálenější. Zdůvodněte tento zdánlivý rozpor.

Nejprve se podívejme na to, jak vypadá závislost oběžné rychlosti na vzdálenosti ve Sluneční soustavě (dále jen SS).

Zanedbejme gravitační působení ostatních planet na naši testovací planetu a předpokládejme, že jedinou silou působící na planety SS je gravitační síla Slunce. Pro zjednodušení též předpokládejme, že planety se pohybují okolo Slunce po kružnicích. V rotující soustavě na planetu působí odstředivá a gravitační síla. Z jejich rovnosti vyjádříme oběžnou rychlost (M_{\odot} značí hmotnost Slunce)

$$G \frac{M_{\odot} m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r}}. \quad (1)$$

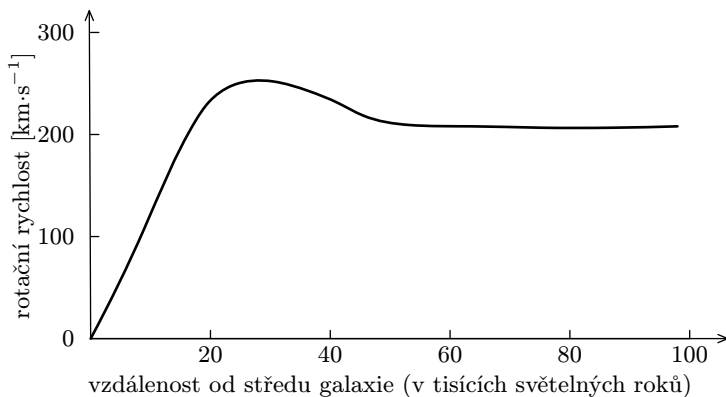
Galaxie je na rozdíl od SS vyplněná hvězdami. Hvězdy se okolo středu pohybují jakoby v „polévce“ tvořené ostatními hvězdami. A toto je klíč k řešení našeho paradoxu.

Zaveďme hustotu H jako hustotu hmoty v okolí středu galaxie. Dá se dokázat, že vevnitř kulové vrstvy působí na těleso nulová výsledná síla, všechny příspěvky od částí kulové vrstvy se navzájem vyruší. Proto dále můžeme uvažovat pouze hmotu, která je blíže ke středu galaxie než naše testovací hvězda. Opět bez důkazu použijme ještě jedno tvrzení; kulové homogenní těleso přitahuje naši planetu stejnou silou, jako by celá jeho hmota byla umístěna v jeho středu, tedy

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{M_g m}{r^2}, \quad v = \sqrt{\frac{GM_g}{r}}, \quad v = r \sqrt{\frac{4}{3} \pi H G},$$

kde $M_g = \frac{4}{3} \pi H r^3$ je hmotnost koule s poloměrem stejným jako je vzdálenost naší testovací hvězdy od středu Galaxie.

Vidíme, že v okolí středu galaxie se hvězdy opravdu pohybují ve větších vzdálenostech rychleji. Toto však platí jen přibližně, protože v jisté vzdálenosti přestane mít Galaxie tvar koule a změní svůj tvar na „čočkovitý“. Hustota hvězd se vzdáleností od středu též klesá.



Obr. 1

Na obrázku 1 vidíme náčrt oběžné rychlosti hvězd okolo středu pro galaxii M 31. Proč je ve větších vzdálenostech oběžná rychlost konstantní si můžeme někdy ukázat v jiném příkladě.

Pavol Habuda

`bzuc0@fykos.mff.cuni.cz`