16. ročník, úloha III . 4 ... *rychlá smrt* *(4 body; průměr 1,56; řešilo 18 studentů)*

V modulu Apollo letí astronauti na Měsíc, skrz okno jim proletí meteoroid a udělá v něm dírku o poloměru $r = 1$ mm. Jak se bude měnit teplota a tlak v kabině o objemu $V = 60\,\mathrm{m}^3$, pokud původní podmínky jsou $t = 20\,°\mathrm{C}$ a normální tlak. Jako bonus se pokuste odhadnout, za jak dlouho začnou mít astronauti vážné problémy.

Na řešení této úlohy se dá vysvětlit hned několik důležitých poznatků z molekulové fyziky a termodynamiky. Proto se nelekejte, že je poněkud delší než je obvyklé.

Jako v téměř každé fyzikální úloze i zde se nejprve zabývejme zjednodušujícími předpoklady, bez kterých bychom úlohu neuměli vyřešit. Předně budeme plyn v modulu považovat za ideální. Dále předpokládejme, že všechny děje jsou rovnovážné, tj. v každém okamžiku můžeme systém popsat zákony, které platí pro plyn v termodynamické rovnováze (např. stavovou rovnicí). A konečně vakuum vně modulu považujme za dokonalé.

Plyn z modulu uniká proti nulovému tlaku, nekoná tedy žádnou práci. Nedochází ani k tepelným výměnám s okolím, neboť okolím je vakuum. Proto se podle prvního termodynamického zákona nemění ani vnitřní energie plynu jako celku (včetně toho, co unikl). Víme ale, že vnitřní energie ideálního plynu závisí pouze na počtu částic N a termodynamické teplotě T, na obojím lineárně:

$$U = \frac{5}{2}NkT,$$

kde 5/2 je faktor pro dvouatomové molekuly plynu a k je Boltzmanova konstanta. Proto nemění-li se vnitřní energie plynu, nemění se ani jeho teplota.

Někdo by ale mohl začít šťourat a ptát se, odkud víme, že průměrná energie připadající jedné uniknuvší molekule je stejná jako energie připadající na jednu molekulu, která zůstane. Je pravda, že toto jsme ještě pořádně nezdůvodnili. Uděláme to vzápětí po odvození vztahu pro počet molekul, které uniknou z modulu za element času Δt.

Ze samotných principů statistické fyziky, která popisuje chování mnohačásticových systémů, plyne vztah pro rozdělení částic v ideálním plynu podle velikosti rychlosti. Platí, že pravděpodobnost, se kterou se vybraná molekula o hmotnosti m ideálního plynu pohybuje rychlostí o velikosti v intervalu $(v, v + \mathrm{d}v)$, je

$$g(v)\,\mathrm{d}v = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)\mathrm{d}v. \tag{1}$$

Tomuto vztahu se říká *Maxwellovo-Boltzmanovo rozdělení rychlostí.* Po chvilce integrování se dá spočítat, že střední resp. střední kvadratická rychlost molekuly plynu je

$$\bar{v} = \int_0^\infty vg(v)\,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \qquad \overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 g(v)\,\mathrm{d}v = \frac{3kT}{m}.$$

Počítejme nyní, kolik molekul unikne z modulu za čas Δt infinitezimálně malým otvorem o ploše ΔS. Následující odstavec je založen na znalosti poněkud pokročilejší matematiky, pokud mu nerozumíte, spokojte se s výsledným vztahem (3), který je pochopitelný intuitivně až na faktor 1/4. Vezměme Δt mnohem menší než je průměrný čas mezi dvěma srážkami jedné molekuly s jinými. Díky tomu můžeme předpokládat, že v časovém intervalu $(0, \Delta t)$ nedochází k žádným srážkám. Zvolme systém sférických souřadnic tak, že osa z vede kolmo na otvor. Od osy z určujeme úhel ϑ a od libovolného směru v rovině $z = 0$ určujeme úhel φ. Omezme se zatím jen na molekuly pohybující se rychlostí mezi $(v, v + \mathrm{d}v)$. Z bodu A o souřadnicích

(r, ϑ, φ) molekula otvorem unikne, pokud $v\Delta t > r$ a pokud letí do správného prostorového úhlu. Prostorový úhel, pod kterým je ploška ΔS vidět z bodu A, je

$$\Delta\Omega = \frac{\cos\vartheta \Delta S}{r^2}.$$

Jelikož z okolí bodu A letí do každého směru stejně molekul, letí vybraná molekula do směru $\Delta\Omega$ s pravděpodobností $\Delta\Omega/4\pi$. Z geometrických úvah si odvoďte, že objem oblasti, jejíž body mají souřadnice mezi $(r, r + \mathrm{d}r)$, $(\varphi, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$, $(\vartheta, \vartheta + \mathrm{d}\vartheta)$, je $\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r$. Označíme-li ještě ϱ_V objemovou hustotu počtu molekul, můžeme napsat, že za čas Δt unikne ploškou ΔS z modulu $\mathrm{d}N(v)$ molekul, jejichž rychlost má velikost mezi $(v, v + \mathrm{d}v)$.

$$\mathrm{d}N(v) = \int_0^{v\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\Delta S\cos\vartheta}{4\pi r^2} g(v)\,\mathrm{d}v \varrho_V r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\Delta S \Delta t \varrho_V g(v) v \,\mathrm{d}v. \tag{2}$$

Integrovali jsme přes element objemu $\mathrm{d}V$, $g(v)$ je hustota pravděpodobnosti ze vztahu (1). Nezávisle na rychlosti tedy unikne

$$\Delta N = \int_0^\infty \mathrm{d}N(v) = \frac{1}{4}\Delta S \Delta t \varrho_V \int_0^\infty g(v) v \,\mathrm{d}v = \frac{1}{4}\Delta S \Delta t \varrho_V \bar{v}.$$

Celou plochou S tedy za malý čas Δt unikne z modulu

$$\Delta N = \frac{1}{4} S \Delta t \varrho_V \bar{v} \tag{3}$$

molekul. Hustota ϱ_V molekul se samozřejmě mění s časem. Střední rychlost molekul v plynu $\bar{v}$ na čase nezávisí, nezávisí-li na čase teplota plynu. To ukažme v následujícím odstavci.

Jak jsme řekli výše, potřebujeme ukázat, že průměrná energie připadající jedné uniknuvší molekule je stejná jako energie připadající na jednu molekulu, která zůstane. Víme, že energie molekuly je úměrná kvadrátu její rychlosti $E \sim v^2$, resp. $\mathrm{d}E \sim v\,\mathrm{d}v$. Proto podle vztahů (2) a (1) můžeme psát, že počet uniknuvších molekul s energií mezi $(E_1, E_1 + \mathrm{d}E)$ je

$$\mathrm{d}N(E_1) = c_1 E_1 \mathrm{e}^{c_2 E_1} \,\mathrm{d}E,$$

c_1, c_2 jsou nedůležité konstanty. Poměr počtu uniknuvších molekul o energiích E_1 a E_2 bude

$$\frac{\mathrm{d}N(E_1)}{\mathrm{d}N(E_2)} = \frac{E_1 \mathrm{e}^{c_2 E_1}}{E_2 \mathrm{e}^{c_2 E_2}},$$

což je přesně poměr počtu molekul o energiích E_1 a E_2 v plynu, tudíž je i stejné rozložení počtu molekul podle energie, resp. rychlosti. A to je přesně to, co jsme potřebovali dokázat, abychom přesvědčili každého, že pokud je v modulu ideální plyn, jeho teplota se bude zachovávat. U reálného plynu nezávisí vnitřní energie pouze na teplotě, tudíž by vše bylo složitější a ukázalo by se, že u reálného plynu by se teplota měnila.

Vraťme se k výpočtu závislosti tlaku na čase. Využijeme stavovou rovnici ideálního plynu $pV = NkT$ a vztah (3), tedy

$$\mathrm{d}p = -\frac{kT}{V}\,\mathrm{d}N = -\frac{kT}{V}\frac{1}{4} S \varrho_V \bar{v}\,\mathrm{d}t = -\frac{S\bar{v}}{4V} p\,\mathrm{d}t.$$

Kromě času a tlaku jsou v této rovnici samé konstanty, tudíž postupem vysvětleným v minulém díle seriálu dostaneme pro tlak a zadané hodnoty

$$p = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{S\bar{v}}{4V}t} = p_0 \mathrm{e}^{6{,}06\cdot 10^{-6}\{t\}}.$$

Pokusme se zodpovědět otázku, kdy začnou mít kosmonauti problémy. Na vysokých horách je asi poloviční atmosférický tlak a i trénovaný člověk většinou potřebuje dýchací přístroj. V modulu tlak na polovinu klesne asi za 31 hodin. Tudíž mají kosmonauti spoustu času na ucpání dírky nebo nasazení dýchacích přístrojů.

A závěrem několik poučných poznámek k vašim řešením. Někteří z vás neodvozovali vztah (3) tak pečlivě jako my a po vzoru odvození tlaku působícího na stěny nádoby v plynu napsali

$$\Delta N = \frac{1}{6} S \Delta t \varrho_V \sqrt{\overline{v^2}}.$$

V tomto případě je ale správně námi získaný vztah. Sami se podívejte do středoškolských učebnic a srovnejte, kde se u odvození tlaku vezme šestina místo čtvrtiny a střední kvadratická rychlost místo střední rychlosti.

Také se objevilo nemálo řešitelů, kteří výtokovou rychlost spočítali z Bernoulliho rovnice jako $v = \sqrt{2p/\varrho} = \sqrt{2kT/m}$, to je vztah formálně opět velmi podobný našemu $v = \bar{v}/4 = \sqrt{kT/2\pi m}$, nicméně není správný, neboť Bernoulliho rovnice platí pouze pro nestlačitelné kontinuum, což ideální plyn rozhodně není.

Lenka Zdeborová
`fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.