Zadání II. série

Termín odeslání: 27. prosince 2002

Milí řešitelé!

Kvůli povodňovým zmatkům dostáváte druhou sérii o měsíc později, než je obvyklé. Zašlete nám řešení tak, aby nám na 2. ledna zaručeně došla, opozdilce tentokrát opravdu nebudeme tolerovat. Zadání 3. série spolu s opravenými řešeními 1. série očekávejte do Vánoc.

Naše nové řešitele bychom rádi upozornili na adresu `http://fykos.mff.cuni.cz`, kde naleznou podrobné informace o semináři, aktuality, výsledky, archívy zadání a řešení, ročenky a mnoho dalšího. Svá řešení můžete posílat e-mailem, pokyny najdete taktéž na našich www stránkách. Pokud jste neřešili první sérii, nevadí! Nic není ztraceno, například místa na soustředění jsou stále ve hře.

Přejeme vám mnoho příjemných chvil při řešení našeho semináře.

vaši organizátoři

Úloha II . 1 ... *ztraceni v temnotě*

Jeníček a Mařenka, zabráni do závažné diskuze nad zajímavým fyzikálním problémem, zbloudili v temném hvozdě. A tak, ve snaze nalézt východisko ze zoufalé situace, rozhodl se Jeníček vylézt na statný smrk, v naději že svým ostřížím zrakem zahlédne spásný záblesk světla. Jak nejdále od této dřeviny by se muselo nacházet nechvalně proslulé obydlí ještě nechvalněji proslulé okultistky a gurmánky Jagy Babové, aby Jeníček získal falešnou naději na záchranu v důsledku osvícení $\cdot 100W \cdot$ žárovkou svítící v obývacím pokoji výše zmíněného domu?

Úloha II . 2 ... *malý velký problém*

Hvězdný koráb se skládá ze dvou kabin o hmotnosti M, mezi nimiž se nalézá spojnice délky $2l$ (koráb tedy vypadá trochu jako činka). Jedna z kabin byla zasažena malým (hmotnost $m \ll M$), ale pekelně rychlým (rychlost u) meteoritem. Po této fatální kolizi se loď začala pohybovat a také rotovat (úhlovou rychlost rotace označme ω). Jak daleko od nezasažené kabiny onen meteorit proletěl? Můžete předpokládat, že rychlost zbytků po meteoritu vzhledem ke kabině je zanedbatelná v porovnání s rychlostí u.

Úloha II . 3 ... *zase jde vo prachy* ...

Mějme dvě prášková dielektrika o permitivitách ε_1 a ε_2. Smísíme je tak, že poměr jejich hmotností bude $m_1 : m_2$, poměr jejich objemů bude $V_1 : V_2$ a poměr jejich látkových množství bude $n_1 : n_2$. Jaká bude výsledná permitivita této směsi?

Úloha II . 4 ... *mokrá hrozba*

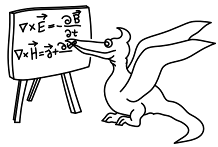
Představte si koryto řeky široké $\cdot 100m \cdot$. Jeho spád označme α. Otázkou je, jak závisí výška hladiny na průtoku vody touto řekou. Váš teoretický výsledek můžete zkusit porovnat s údaji ze srpnových povodní.

Úloha II . P ... *basic instinct*

Sekáček na led – známý vražedný nástroj z tohoto filmu (vy, kdo jste tento výplod kinematografie ještě neshlédli, vězte, že toto náčiní vypadá zruba jako šroubovák s ostrou špičkou) postavila chladnokrevná vražedkyně z dlouhé chvíle na hrot. Pomocí relací neurčitosti odhadněte maximální dobu, po kterou corpus delikti setrvá v této poloze.

Úloha II . E ... *difúze*

Jak je známo, kapka roztoku v čisté vodě začne difundovat a zvolna se rozplývat. Svůj experimentální um můžete prokázat tím, že naměříte závislost koncentrace roztoku v určitém bodě nádoby na čase. Můžete též proměřit, jak se změní charakter této závislosti, změníte-li tvar použité nádoby tak, že se roztok může šířit jen v jednom nebo dvou směrech (tj. nádoba bude buďto úzká a podlouhlá, nebo v ní bude jen tenká vrstva vody).



Seriál na pokračování

Kapitola 2: Limity a derivace

Řešme jednoduchý úkol. Ze čtvercového plechu o délce strany a chceme vyrobit nádobu tak, že odstřihneme z jeho rohů čtvercové díly o délce strany b a zbylý kus ohneme do výsledného tvaru. Otázkou je, jak velké mají být odstřižené části, aby byl objem nádoby co největší.

Snadno zjistíme, že objem nádoby závisí na b jako

$$V(b) = b(a - 2b)^2. \tag{1}$$

Nyní se podívejme, jak se změní výsledný objem nádoby, změníme-li hodnotu b o Δb. Dosazením do (1) a odečtením původní hodnoty V dostáváme

$$V(b + \Delta b) - V(b) = (a - 2b)(a - 6b)\Delta b + 4(3b - a)\Delta b^2 + 4\Delta b^3. \tag{2}$$

Uvažujme změnu o velmi malou hodnotu Δb. Vidíme, že ve vzorci (2) vystupuje Δb v 1., 2. a 3. mocnině. Pokud je však Δb malá (např. $10^{-}6$), bude mít její 2. a 3. mocnina zanedbatelnou velikost oproti 1. mocnině. Vzorec (2) v tomto případě přechází na

$$V(b + \Delta b) - V(b) \approx (a - 2b)(a - 6b)\Delta b \tag{3}$$

Dále uvažujme takto. Pokud má nádoba maximální možný objem, určitě se při jakékoliv změně b nezvětší. Hodnota $V(b + \Delta b) - V(b)$ tedy určitě nebude kladná. Pro malé hodnoty Δb však nemůže být ani záporná, protože pokud by tato situace nastala, byla by hodnota $V(b + \Delta b) - V(b)$ pro $-\Delta b$ kladná (jak vidíme z (3)) a to je ve sporu s předpokladem o maximálnosti objemu. Z toho plyne, že pro jakoukoliv malou změnu Δb se hodnota V nezmění (přesněji řečeno, nezmění při zaokrouhlení na řád této změny). Při pohledu na rovnici (3) vidíme, že toho je možno dosáhnout jen v případě, že hodnota $(a - 2b)(a - 6b)$ je nulová. To je splněno v případě, že $a = 2b$ nebo $a = 6b$. Pro $a = 2b$ je však $V = 0$. Hledaným řešením je tedy $b = a/6$.

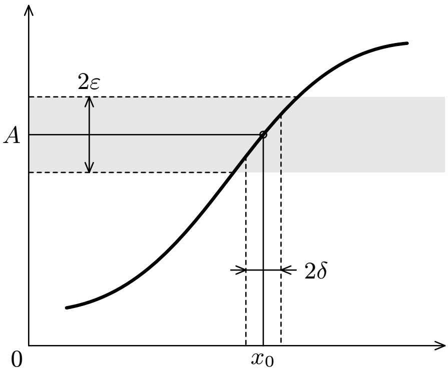
Postup naznačený na tomto příkladě se dá značně zefektivnit a rozsah problémů které se dají řešit obdobným přístupem je obrovský. Základní matematické pojmy potřebné k takovýmto výpočtům si nyní vysvětlíme.

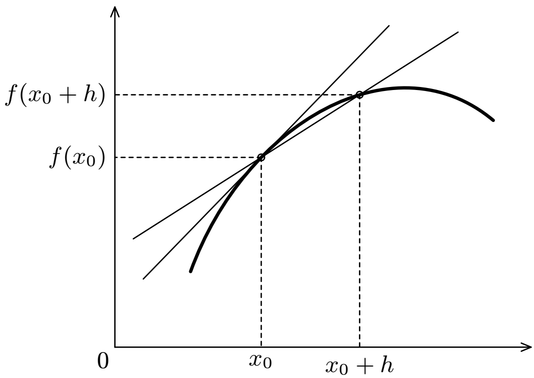
Zaveďme pojem limity funkce. Její význam možná není na první pohled zřejmý, ale vyplyne z následujícího textu, takže se jej pokuste alespoň částečně pochopit. Nejprve odstrašující definice:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{4}$$

Nyní se pokusme vyložit, co vlastně tento vzorec znamená. Limitou funkce $f(x)$ pro x blížící se k x_0 je číslo A (levá strana ekvivalence je standardní označení pro limitu), pokud platí výrok na pravé straně implikace.

Ten pak říká, že pro libovolné zadané kladné ε musíme vždy najít takové kladné δ, aby se funkční hodnota v intervalu šířky 2δ kolem x_0 lišila od A o méně než ε (sledujte levý obrázek). Je dobré si uvědomit, že pokud nalezneme k nějakému ε_1 příslušné δ, můžeme každému $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ přiřadit stejné δ. Stačí tedy splnit podmínku v definici (4) pro libovolně malé ε. Všimněte si také toho, že hodnota limity v bodě x_0 vůbec nezávisí na hodnotě funkce f v tomto bodě. Limita funkce tedy jakýmsi způsobem vystihuje to, kam se blíží hodnoty f, pokud se její argument blíží k hodnotě x_0 (může nastat i případ, kdy se tyto hodnoty nikam neblíží, pak řekneme že limita neexistuje).





Pokud by se vám zdálo, že pojem limity je úplně zbytečný, protože se vždy rovná funkční hodnotě v bodě x_0 (jak by mohl napovídat obrázek), mýlíte se. Toto tvrzení platí jen pro spojité funkce (vlastně je to definice spojité funkce). V mnoha zajímavých případech ale námi zkoumaná funkce ve studovaném bodě spojitá není, a tak se bez limit zkrátka neobejdeme.

Nyní se na chvíli vraťme k našemu motivačnímu příkladu. Jak vidíme, hodila by se nám metoda, které by umožnila kvantitativně popsat a vypočítat rychlost růstu funkce, abychom dokázali řešit podobné příklady (a jak se později ukáže, také obrovskou spoustu zcela jiných) bez nutnosti používání krkolomných operací podobných těm, které jsme použili. A k tomu nám poslouží takzvaná *derivace* funkce. Začněme opět definicí:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Význam asi nejsnáze pochopíte z obrázku vpravo. Jak vidíte, jedná se o limitu podílu velikosti přírůstku funkční hodnoty ku přírůstku velikosti argumentu. V bodě x_0 má tento podíl význam směrnice sečny grafu funkce f, s průsečíky v bodech $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ (směrnicí přímky dané rovnicí $y = px + q$ rozumíme číslo p). Tato sečna se pro zmenšující hodnotu h blíží k tečně ke grafu funkce f. Derivace má tedy význam směrnice tečny ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Pozn.: V definici derivace vystupuje parametr x, takže ačkoliv je derivace definovaná jako limita a to je číslo (viz. definice) je to vlastně funkce (jejím argumentem je x). Derivace je tedy zobrazení, které z funkce udělá opět funkci (a to je zvláštní případ takzvaného operátoru). Pokud původní funkci značíme f, zderivovanou funkci obvykle značíme f' (a tuto znovu zderivovanou f'' atd.). Závisí-li nějaká fyzikální veličina na více parametrech a není zřejmé, jako funkci kterého parametru ji zrovna chápeme, držíme se raději už uvedeného značení $\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}x$. Výjimku představují derivace podle času, které jsou tak časté, že se vyplatí mít pro ně zvláštní značení $\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}t = \dot{f}$.

Stejně jako při výpočtu limit, i při počítání derivací zpravidla nevycházíme z definice. Z didaktických důvodů si však takovýto postup můžeme ukázat. Spočítejme tedy derivaci funkce $f(x) = x^2$ z definice.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x.$$

Mnohem praktičtější je ale zapamatovat si pravidla pro derivování několika základních funkcí, dále součtu, součinu a složení dvou funkcí. Vybaveni těmito znalostmi pak hravě zderivujete téměř cokoliv. Nejdříve tedy jak vypadají derivace elementárních funkcí.

$y = a$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = 1/x$	$y' = -1/x^2$
obecně $y = x^r, r \in \mathbb{R}$	$y' = rx^{r-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1/\cos^2 x$
$y = \mathrm{e}^x$	$y' = \mathrm{e}^x$
$y = \ln x$	$y' = 1/x$
$y = \arcsin x$	$y' = 1/\sqrt{1-x^2}$
$y = \arccos x$	$y' = -1/\sqrt{1-x^2}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = 1/(1+x^2)$
$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$
$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$
$y = \operatorname{tgh} x$	$y' = 1/\cosh^2 x$

Derivace některých funkcí v tabulce jsou pomocí pravidel, která si za chvíli vypíšeme, přímo odvoditelné ze znalosti derivací jiných funkcí, např. funkci $y = \operatorname{tg} x$ lze derivovat jako podíl $y = \sin x/\cos x$. Vrhněme se tedy na slíbená pravidla. f, g jsou funkce, a, b konstanty, f^{-1} je inverzní funkce k f.

$y = af$	$y' = af'$
$y = af \pm bg$	$y = af' \pm bg'$
$y = fg$	$y' = fg' + f'g$
$y = \dfrac{f}{g}$	$y' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
$y(x) = f(ax)$	$y'(x) = af'(ax)$
$y(x) = f(g(x))$	$y'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$y(x) = f^{-1}(x)$	$y'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Pokud jste nepochopili po prvním přečtení všechna pravidla (např. to pro derivování složené a inverzní funkce), nic se neděje, v příštím díle se k nim ještě vrátíme.

Úloha II . S ... *limity a derivace*

a) Dokažte, že těleso, které má v čase t polohu $x = gt^2/2 + v_0 t + x_0$ se pohybuje se zrychlením g.
b) Spočítejte $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+2x-3}$.
c) Nahraďte co nejlépe funkci f v okolí bodu $x = 0$ lineární funkcí, víte-li $f(0) = 3$ a $f'(0) = -2$.
d) Jaký je poměr výšky a průměru podstavy válce, který má při daném povrchu maximální objem?

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: http://fykos.mff.cuni.cz
e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz
e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.