15. ročník, úloha V . 4 ... *balón* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 18 studentů)*

Spočtěte frekvenci malých radiálních kmitů gumového balónu. V balónu je n molů plynu s Poissonovou konstantou $\varkappa = 5/2$ o teplotě T. V případě, že rozdíl tlaků uvnitř a vně balónu, je nulový je poloměr balónu r_0. Plošná hustota gumy je v tomto případě ϱ_0. Potenciální energie gumy je lineárně úměrná rozdílu jejího povrchu a povrchu klidového s konstantou úměrnosti σ. Tlak vně balónu je p_0. Hmotnost plynu je vůči hmotnosti balónu zanedbatelná.

Úlohu si vymyslel Pavel Augustinský

Nejprve spočítejme poloměr balónu v rovnovážné poloze (jeho velikost není shodná se zadaným r_0). V rovnováze bude výslednice všech sil působících na stěnu balónu nulová. Těmito silami jsou tlak plynu uvnitř balónu, tlak okolního vzduchu a elastická síla v gumě. Tlak okolního vzduchu má stále stejnou hodnotu. Tlak plynu uvnitř balónu můžeme spočítat ze stavové rovnice jako

$$p_1 = \frac{nRT}{V} = \frac{3nRT}{4\pi r_1^3}, \tag{1}$$

kde r_1 je rovnovážný poloměr. Tlak způsobený pnutím v gumě můžeme spočítat z analogie s kapilárním tlakem pod zakřivenou hladinou kapaliny jako

$$p_2 = \frac{2\sigma}{r_1}. \tag{2}$$

Zde je důležité si uvědomit že tento vzorec platí pouze pro $r_1 > r_0$, protože v opačném případě balón nezaujme kulový tvar, „zkrabatí se“. Po uvážení orientace těchto sil dostáváme podmínku rovnováhy

$$\frac{3nRT}{4\pi r_1^3} - p_0 - \frac{2\sigma}{r_1} = 0,$$

což je kubická rovnice, jejíž řešení je poměrně složité, takže jej zde neuvádíme. Rovnovážný tlak plynu pak ze známé hodnoty r_1 dopočítáme z (1).

Nyní můžeme vypočítat frekvenci malých radiálních kmitů. Vyjdeme z předpokladu, že bude dostatečně vysoká, takže nebude docházet k tepelné výměně mezi balónem a okolím, tj. děj s plynem uvnitř balónu bude adiabatický.

Spočítejme sílu, která bude na balón působit při změně poloměru o Δ. Tlak plynu uvnitř balónu p můžeme spočítat z rovnice adiabaty

$$\begin{aligned} pV^{\varkappa} &= \text{konst},\\ p_1 r_1^{3\varkappa} &= p(r_1+\Delta)^{3\varkappa},\\ p &= \frac{p_1 r_1^{3\varkappa}}{(r_1+\Delta)^{3\varkappa}}. \end{aligned}$$

Vidíme, že p není na hodnotě Δ závislý lineárně, ale pro malé hodnoty Δ bude velmi dobře platit vztah

$$p(r_1+\Delta) = p(r_1) + \frac{\mathrm{d}p(r_1)}{\mathrm{d}\Delta}\Delta$$

tedy rozvoj do Taylorova polynomu 1. stupně. Po zjednodušení tedy dostáváme

$$p(r_1+\Delta) = p_1 + \frac{-3\varkappa p_1 r_1^{3\varkappa}}{r_1^{3\varkappa+1}}\Delta.$$

Pro zjednodušení zápisu označme

$$K = \frac{-3\varkappa p_1 r_1^{3\varkappa}}{r_1^{3\varkappa+1}} = -\frac{3\varkappa p_1}{r_1}.$$

Pro tlak gumy bude stále platit (2), který můžeme zjednodušit stejně jako v předchozím případě. Pro malé Δ tedy bude platit

$$p_2(r_1 + \Delta) = \frac{2\sigma}{r_1}\left(1 - \frac{\Delta}{r_1}\right).$$

Tlak okolního vzduchu se nezmění. Síla, která bude působit na stěnu balónu při výchylce Δ z rovnovážné polohy, tedy bude (pokud uvážíme, že $p_1 - p_0 - p_2 = 0$)

$$F = 4\pi r_1^2\left(K + \frac{2\sigma}{r_1^2}\right)\Delta.$$

Pro úhlovou frekvenci malých radiálních kmitů dostaneme

$$\omega^2 = \frac{r_1^2}{\varrho_0 r_0^2}\left(\frac{3\varkappa p_1}{r_1} - \frac{2\sigma}{r_1^2}\right) = \frac{3\varkappa p_1 r_1 - 2\sigma}{\varrho_0 r_0^2}.$$

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.