

15. ročník, úloha IV. 4 ... zavlažování (4 body; průměr ?; řešilo 37 studentů)

Zahradkář chce udělat zavlažovací zařízení na svůj záhonek a to následujícím způsobem. Vedle řady rostlinek bude hadice s otvory, kterou položí tak, že u každé rostlinky bude dírka.

Poradte zahradkáři, jak velké mají být dírky, aby ke každé rostlince teklo stejné množství vody.

Řešení této úlohy si zjednodušíme několika předpoklady:

- 1) Vodu považujeme za ideální kapalinu bez viskozity, její hustotu označme ϱ ,
- 2) hadici uvažujeme jako vodorovnou, na druhém konci uzavřenou, s konstantním průřezem po celé své délce,
- 3) kruhové otvory v hadici nechtě jsou umístěny na boku hadice a jejich vzájemná vzdálenost ať je velká ve srovnání s průměrem každého otvoru,
- 4) průřez hadice nechtě je dost malý na to, abychom mohli zanedbat hydrostatický tlak způsobený sloupcem vody nad otvorem.

Po zjednodušení je zřejmé, že musí platit následující rovnost

$$Q_{k-1} = Q + Q_k,$$

kde Q je objemový průtok vody v k -tém otvoru v hadici, Q_{k-1} je průtok před a Q_k za tímto otvorem. Označíme-li v_{k-1} (respektive v_k) rychlost vody v hadici před k -tým otvorem (respektive za ním), a S konstantní průřez hadice, můžeme výše uvedený vzorec přepsat na tvar

$$Sv_{k-1} = Q + Sv_k.$$

Má-li být každá květina zalévána stejným množstvím vody, musí být Q stejné pro všechny otvory. Z toho plyne

$$\text{konst} = Q = Sv_{k-1} - Sv_k = S(v_{k-1} - v_k) = Sc,$$

kde rozdíl rychlostí v_{k-1} a v_k je konstantní a označili jsme jej c . Jeho hodnotu určíme z celkového průtoku $Q_c = Sv_0 = Qn = Scn$, odkud plyne

$$c = \frac{v_0}{n}.$$

Označíme S_k^* průřez k -tého otvoru a napíšeme pro tento otvor Bernoulliho rovnici

$$\frac{1}{2}\varrho \left(\frac{Q}{S_k^*} \right)^2 = p_0 + \frac{1}{2}\varrho v_0^2,$$

odtud vyjádříme S_k^* ,

$$S_k^* = \frac{Q}{\sqrt{v_0^2 + 2p_0/\varrho}} = \frac{Sv_0}{n} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + 2p_0/\varrho}}.$$

Vidíme, že všechny otvory musí mít stejnou velikost, která je určena pouze průřezem S hadice, vstupními parametry vody – její hustotou ϱ , počáteční rychlostí v_0 a přetlakem p_0 , a dále počtem otvorů v hadici. Zmenšování rychlosti vody v hadici v místech otvorů (mezi dvěma vedle sebe se nacházejícími otvory zůstává rychlost stejná jako tlak konstantní) je kompenzováno zvyšováním tlaku, což jsme mohli v důsledku platnosti Bernoulliho rovnice předpokládat.

Ilustračním příkladem mohou být různá otočná zavlažovací zařízení tvořená dvěma řadami trysek, která lze spatřit zejména v létě na travnatých plochách, v parcích, fotbalových hřištích, popřípadě v Brně na strojírenském veletrhu.