

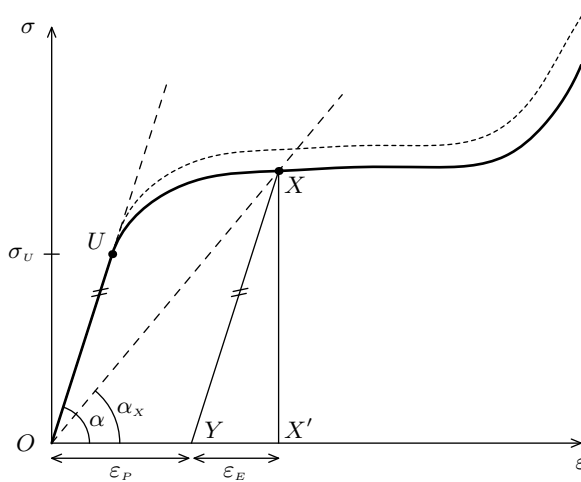
14. ročník, úloha I. E ... natahování špaget (8 bodů; průměr ?; řešilo 67 studentů)

Určete Youngův modul pružnosti v tahu uvařených špaget.

Bláznivý nápad Honzy Houšťka.

Vypracování experimentální úlohy by mělo obsahovat na začátku trochu teorie popisující danou problematiku, následuje stručný, ale srozumitelný popis měření, na škodu není ani výčet pomůcek. Nezbytná je tabulka naměřených hodnot, výpočet odchylky měření (viz Chyby měření) a závěr s diskuzí výsledku, kde srovnáváte jednotlivé metody, výsledky apod.

Tato experimentální úloha, jako první v pořadí, byla spíše na procvičení měření a zpracování získaných výsledků. Většina z vás věděla, co má měřit a i to naměřila. Takže vrhneme se do toho.



Obr. 1

Teorie

Každý z vás už potkal Hookův zákon pro pevná tělesa, který píšeme ve tvaru $\sigma = E\varepsilon$, kde $\varepsilon = \Delta l/l_0$ je poměrné prodloužení, které určíme jako poměr skutečného prodloužení Δl a původní délky l_0 , $\sigma = F/S$ je napětí, které vypočteme jako podíl zatěžující síly F a průřezu $S = \pi(d/2)^2$, a E je Youngův modul pružnosti. Z toho máme

$$E = \frac{F}{S} \cdot \frac{l_0}{l - l_0}. \quad (1)$$

Tento vztah ovšem platí jen do napětí σ_U , tzv. meze úměrnosti, dokud závislost σ na ε je lineární (viz obr. 1).

Na obr. 1 je schématicky znázorněna závislost σ na ε (od σ_U vůbec nezáleží na tom, jaký má přesný průběh), kde plná čára představuje závislost tzv. smluvního napětí, které počítáme jako poměr zatěžující síly a původního průřezu. Přerušovaná čára naopak představuje napětí závislé na aktuálním průřezu. Vidíme, že do napětí σ_U se smluvní napětí téměř rovná skutečnému napětí ve špagetě. Z toho pak vidíme, že dokud nenastává trvalá deformace, a ta nastává jakmile překročíme napětí σ_U , poloměr špagety se významněji nemění.

Jestliže napínané těleso (tyč, drát, špagetu, ...) v libovolném bodě X odlehčíme, odpruží se dle úsečky $XY \parallel OU$. (Pokud by OU neexistovala, pak by XY byla rovnoběžná s tečnou v bodě O .) Úsečka $|X'Y| = E\varepsilon$ představuje pružnou část, úsečka $|OY| = \varepsilon_P$ plastickou část celkové poměrné deformace odpovídající bodu X . Vidíme, že

$$\varepsilon_P + \varepsilon_E = \frac{l_2 - l_0}{l_0} \quad \text{a} \quad \varepsilon_P = \frac{l_{02} - l_0}{l_0}$$

a z toho plyne $\varepsilon_E = (l_2 - l_{02})/l_0$ a také

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_E} = E.$$

Nyní upravíme vztah (1)

$$E = \frac{F}{S} \frac{l_0}{l - l_{02}}.$$

Ti z vás, kteří překročili napětí σ_U , tj. měřili prodloužení až do přetrhnutí, určovali vlastně

$$E = \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x},$$

což vedlo k nesprávnému výsledku. Naším úkolem bude tedy špagetu připravit, zatížit, odlehčit a po každém tomto kroku změřit její délku. Budeme muset zachovávat linearitu experimentu (nepřekročit mez úměrnosti), což se dá dosáhnout tím, že si pokaždé zjistíme deformaci, a když bude trvalé prodloužení větší než 1mm (tedy nejmenší dílek měřidla), pak měření vyloučíme.

Pomůcky

Špagety Delvita Levně bezvaječné, milimetrový papír, mikrometr, sponky na papír, niť, papír, lepicí páska, 3 velké mikroténové sáčky, sada lehkých závaží, přesný odhad.

Postup měření

1. Uvaříme několik špaget podle návodu (tedy s olejem a se solí). Musíme zabezpečit, aby před každým měřením byly čerstvě uvařené, jinak mohou velice změnit své vlastnosti, takže pro více měření je potřeba opakovaně vařit nové špagety.
2. Mezitím na vodorovnou podložku připevníme oceňované milimetrové papíry (v rozsahu minimálně 40 cm kolmo ke hraně stolu) a přikryjeme je rozstříhnutými sáčky, napneme a přilepíme je na stůl. Z niti a sponek vytvoříme háčky se závěsem na uchycení špagety na stůl a na spojení špagety se závažím - dosti dlouhým, neboť závaží musí viset ze stolu.
3. Z igelitového sáčku odstříháme roh, složíme do jakéhosi nového sáčku a propíchneme dalším háčkem ze sponky (vidíte, kde všude se hodí sponky?).
4. Uvařenou a vybranou špagetu opláchneme v teplé vodě a její konce upravíme podle obr. 2. Konec ovíjeme několikrát proužkem papíru, mezi to zavineme ohnutou sponku a obtočíme lepicí páskou. Papír nám zabezpečí, že závěs ze špagety nesklouzne (obr. 2).
5. Mikrometrem změříme její průměr a to tak, že mikrometr utahujeme dokud je ještě špageta mezi čelistmi volná (pootočíme o 1 – 2 dílky a zkontrolujeme, zda je volná, znovu pootočíme a zkontrolujeme, ...).



Obr. 2

6. Místo, kam budeme ukládat špagetu, polejeme tenkou vrstvou oleje – jedlého, pak špagetu zahákneme na háček na stole, volně uložíme na olejovou vrstvu a změříme její délku l_0 . Na její druhý konec zahákneme druhou soustavu háček–nit–háček. Na ze stolu visící háček zavěsíme připravený sáček se závažíčky a zaznameneáme její novou délku l_1 . Následně ji uvolníme a znovu zjistíme její novou délku a deformaci Δl_{def} .
7. Toto uděláme pro více špaget a různé zatížení. Zatížení volíme tak, aby deformace nebyla moc veliká. Dbáme taky na to, aby špagety, již uvařené, nestály ve vodě víc jak 20 minut, jinak napuchnou a změknou a při další manipulaci se velmi lehce lámou a trhají.

Naměřené údaje

Při výpočtu použito $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

č. m.	$d/10^{-5}\text{m}$	l_0/mm	m/g	l_2/mm	$\Delta l/\text{mm}$	def	E/Pa	$\Delta E/\text{Pa}$	$(\Delta E)^2/\text{Pa}^2$
1	254	261	5	282	21	x	–	–	–
2	241	273	2,90	282	21	x	–	–	–
3	237	247	2,65	285	12	x	–	–	–
4	240	332	1,40	339	7	–	143900	–5570	31024900
5	246	303	1,35	309	6	–	140660	–2330	5428900
6	260	330	1,80	339	9	x	–	–	–
7	257	249	1,30	245	5	–	122390	15940	254083600
8	248	211	1,20	215	4	–	128510	9820	96432400
9	239	155	1,35	159	4	–	152470	–1414	1999396
10	244	317	1,00	322	5	–	132970	5360	28729600
11	241	281	0,90	285	4	–	135920	2410	5808100
12	254	290	0,75	293	3	–	140310	–1980	3920400
13	250	282	1,40	287	5	–	157750	–19420	377136400
14	252	326	0,80	330	4	–	129200	10130	102616900
15	250	292	0,95	296	4	–	138550	–220	48400

Kolonka def je zaškrtnutá a ostatní údaje se nevypočítávají, jestliže trvalá deformace překročila 1mm.

Aritmetický průměr: $\bar{E} = 138330 \text{ Pa}$.

Standardní odchylka: $s_{\text{st}} = 9500 \text{ Pa}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka: $s_{\text{sm}} = 2900 \text{ Pa}$.

Systematická chyba měření průřezu: 5%,

měření změny délky: 25%,

s_{sys} tedy asi 30 kPa.

Celková chyba: $s_{\text{celk}} = 35 \text{ kPa}$.

Diskuze a závěr

Námi naměřená hodnota Youngova modulu pružnosti patří do intervalu $(140 \pm 40) \text{ kPa}$. Nejvíce ji kazí chyba systematická, která je způsobená nepřesným měřením prodloužení $\Delta l = l_2 - l_0$. Ta se dá snížit jenom přesnějším délkovým měřidlem (otázka je jakým), ale v žádném případě ne zvětšováním napětí σ .

Jiné možné metody (nebo něco na zamyšlení). Mnozí z vás špagetu pověsili za jeden konec, a pak měřili prodloužení. Málokdo si přitom dělal těžkou hlavu z hmotnosti špagety. A to byla chyba. Délková hustota průměrné špagety je asi $0,08 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-1}$ (průměrná hodnota z vašich řešení), tedy 25 cm dlouhá špageta má hmotnost 2 g. A při takové váze je horní část špagety už dávno zdeformována.

Jaroslava Schovancová se pokoušela určit E ze svislých kmitů tělesa o hmotnosti M zavěšeného na špagety. Pro periodu těch kmitů vychází

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Ml_0}{S_{\text{aktuální}} E}}.$$

Pro jemnost špagety je však zapotřebí pracovat s lehkým tělesem a malými kmity. Tady pak hraje roli i relaxační čas materiálu – špagety.

Nabízejí se i jiné možnosti realizace.

Miloslav Havelka navrhl a Petr Houštěk i naměřil takovéto provedení. Narovnat špagetu, připevnit její konce a natahovat její střed. Tato metoda však vyžaduje přesnější měření kolmo působící tahové síly.

Jan Kratochvíl a Pavol Mikčo navrhli zjistit E z naměřeného modulu pružnosti ve smyku metodou dynamickou (met. torzních kmitů), přičemž platí vztahy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2lJ}{\pi G r^4}},$$

$$G = \frac{mE}{2(m+1)},$$

kde J je moment setrvačnosti zavěšeného tělesa, G je torzní modul pružnosti, m je Poissonova konstanta, pro každou látku jiná.

Nápověda pro toho, kdo má chuť zjistit si Poissonovu konstantu pro špagetu

$$m = -\frac{\varepsilon}{\eta},$$

kde η je relativní příčné zkrácení. Pokud se průměr špagety zkrátí z původního poloměru r_0 na poloměr r pak, platí

$$\eta = \frac{r - r_0}{r_0}.$$

Eva Skopalová a Zdeněk Čejka jako jediní zjišťovali E i v závislosti na času vaření. Vyšlo jim, že dvakrát méně vařené špagety mají třikrát menší modul pružnosti – jsou tvrdší a méně jedlé.

Nějaká statistika vašich měření: Naměřené hodnoty se pohybovaly v rozmezí od 75 Pa do 16 MPa. Dají se rozdělit do dvou velkých skupin: okolo 120 kPa a okolo 400 kPa.

Na závěr Vám ještě děkujeme za slovní hříčky typu: Moje naměřená hodnota $E = = (144550,28 \pm 35504,37) \text{ Pa}$ je velice nepřesná ...

Milan Berta